

文章编号: 0253-2239(2004)02-274-5

# 有振幅调制和相位畸变光束通过硬边光阑的 $M^2$ 因子\*

文 侨 楚晓亮 张 彬  
(四川大学电子信息学院, 成都 610064)

**摘要:** 光束传输  $M^2$  因子是表征激光束的有用参量。利用矩形函数的复高斯函数的近似展开方法, 给出部分相干光通过硬边光阑后强度二阶矩的近似计算公式, 由此可得到部分相干光通过硬边光阑后的推广  $M^2$  因子。以有振幅调制和相位畸变光束为例, 推导出相应的推广  $M^2$  因子的解析表达式, 通过数值计算对提出的近似算法的计算精度进行了分析。研究表明, 使用该近似方法计算得到的推广  $M^2$  因子的计算误差小于 1%, 且通过该方法可直接得到相应的近似解析计算公式, 从而使计算得以简化, 并有效地提高了计算效率。

**关键词:** 激光技术; 光束质量; 部分相干光束; 硬边光阑; 推广  $M^2$  因子; 有振幅调制和相位畸变的激光束  
中图分类号: O436 文献标识码: A

## Generalized $M^2$ Factor of Laser Beams with Amplitude Modulations and Phase Distortion Passing Through Hard-Edge Apertures

Wen Qiao Chu Xiaoliang Zhang Bin  
(College of Electronics Information, Sichuan University, ChengDu 610064)  
(Received 2 October 2002; revised 17 March 2003)

**Abstract:** The beam propagation  $M^2$  factor is a useful parameter for characterizing laser beam. By using the treatment that the rectangular function can be expanded into an approximate sum of complex Gaussian functions with finite numbers, approximate formulas for the second-order moments of partially coherent beam after it passes hard-edge diaphragm are given. The generalized  $M^2$  factor of partially coherent beam after it passes hard-edge diaphragm can be obtained. A laser beam with amplitude modulation and phase distortion is taken as a typical example of partially coherent beams. The analytical expression for the generalized  $M^2$  factor is derived. The calculation precision of our method is analyzed by numerical calculations. It can be seen from the study that by making use of the approximate calculation method proposed, the calculation error for the generalized  $M^2$  factor is less than 1% and the approximate analytic expressions can be obtained immediately. Consequently, the calculation can be simplified and the calculation efficiency can be improved efficiently.

**Key words:** laser techniques; beam quality; partially coherent beam; hard-edge aperture; generalized  $M^2$  factor; laser beam with amplitude modulation and phase distortion

### 1 引 言

光束传输  $M^2$  因子是描述光束的重要参量之一。在实际的工作中, 由于光学元件的尺寸有限, 有必要对截断光束的特性进行研究。然而, 由于截断

光束在空间-频率域中的强度二阶矩为无穷大, 因此, 由 Siegman<sup>[1]</sup> 提出的一般的  $M^2$  因子定义不再适用。为此, Herrero 等<sup>[2,3]</sup> 又进一步对  $M^2$  因子的概念进行了推广, 使之能广泛地适用于截断光束。由于高功率激光器输出的激光常具有一定的振幅调制和相位畸变, 且具有部分相干性, Gori 等<sup>[4,5]</sup> 对无穷空间中部分相干光束  $M^2$  因子进行了研究, 文献[6] 进一步给出了部分相干光通过硬边光阑的推广  $M^2$

\* 国家自然科学基金(60108004)资助课题。

E-mail: wenqiao168@21cn.com

收稿日期: 2002-12-02; 收到修改稿日期: 2003-03-17

因子的积分计算公式,并以高斯-谢尔模型(GSM)光束为例,推导出截断高斯-谢尔模型光束的推广  $M^2$  因子的解析表达式。本文在此基础上,利用矩形函数的复高斯函数的近似展开方法<sup>[7]</sup>,给出了部分相干光束通过硬边光阑的强度二阶矩和推广  $M^2$  因子的近似计算公式。以有振幅调制和相位畸变光束为例,推导出相应的推广  $M^2$  因子的解析表达式,给出了典型的数值计算结果,并分析了本文提出的近似算法的计算精度。研究表明,本文的提出的近似方法可直接得到相应的近似解析计算公式,使计算得以简化,并大为减小了计算难度和提高了计算效率。

## 2 部分相干光束通过硬边光阑的 $M^2$ 因子

众所周知,部分相干光束可用空间-时间域中的互相干函数或空间-频率域中的交叉谱密度函数来描述。

假设交叉谱密度函数为  $W(x_1, x_2)$  的部分相干光束通过大小为  $[-D, D]$  的硬边光阑。为了简便且不失一般性,我们选择二维直角坐标系,并令其空间一阶矩  $\langle x \rangle$  和空间-频率域一阶矩  $\langle u \rangle$  都为零(这可以通过移动坐标轴来实现)。于是,部分相干光束通过硬边光阑的二阶矩可表示为<sup>[6]</sup>

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{I} \int_{-D}^D x^2 w(x, x) dx, \quad (1)$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{k^2 I} \int_{-D}^D \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x} dx + \frac{4w(D, D)}{k^2 ID} + \frac{4w(-D, -D)}{k^2 ID}, \quad (2)$$

$$\langle xu \rangle = \frac{1}{2ikI} \left[ \int_{-D}^D x_1 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big]_{x_1=x_2=x} dx, \quad (3)$$

式中,  $k$  为波数,  $I$  为光束通过硬边光阑后的总能量,可表示为

$$I = \int_{-D}^D w(x, x) dx. \quad (4)$$

由(1)式~(3)式可得到部分相干光束通过硬边光阑后的推广  $M^2$  因子为<sup>[3]</sup>

$$M^2 = 2k(\langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle - \langle xu \rangle^2)^{1/2}. \quad (5)$$

## 3 光束传输 $M^2$ 因子的近似计算方法

由于(1)式~(4)式中积分上下限为有限值,一般来说,利用(1)~(5)式很难得到部分相干光束的推广  $M^2$  因子的解析表达式,而常需要进行数值积分计算。本文将利用 Wen 和 Breazeale 等人提出矩形函数的复

高斯函数展开方法<sup>[7]</sup>,将公式中的有限积分变为无穷积分,从而,对于许多典型的激光描述模型来说,可得到相应的推广  $M^2$  因子的解析表达式。

在直角坐标系中,可将一维矩形函数

$$T(x) = \begin{cases} 1, & -D < x < D \\ 0, & |x| > D \end{cases} \quad (6)$$

展开为有限数目复高斯函数的叠加,即

$$T(x) = \sum_{n=1}^N A_n \exp\left[-B_n \left(\frac{x}{D}\right)^2\right], \quad (7)$$

式中,  $D$  为矩形函数半宽度,  $A_n$  为展开系数,  $B_n$  为复高斯系数,二者均可通过优化计算得到<sup>[7]</sup>,  $N$  为展开项数。当展开项数  $N$  足够大时,目标函数展开为复高斯函数存在的误差可以忽略。

于是,(1)式~(4)式可进一步近似表示为

$$\langle x^2 \rangle = \left| \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N A_n \exp\left[-B_n \left(\frac{x}{D}\right)^2\right] x^2 w(x, x) dx \right|, \quad (8)$$

$$\langle u^2 \rangle = \left| \frac{1}{k^2 I} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N \exp\left[-B_n \left(\frac{x}{D}\right)^2\right] \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x} dx + \frac{4w(D, D)}{k^2 ID} + \frac{4w(-D, -D)}{k^2 ID} \right|, \quad (9)$$

$$\langle xu \rangle = \left| \frac{1}{2kI} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N A_n \exp\left[-B_n \left(\frac{x}{D}\right)^2\right] \left[ x_1 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right]_{x_1=x_2=x} dx \right|, \quad (10)$$

$$I = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N A_n \exp\left[-B_n \left(\frac{x}{D}\right)^2\right] w(x, x) dx \right|. \quad (11)$$

由于  $A_n$  和  $B_n$  是复数, 然而, 从物理意义上来说, 光束的强度二阶矩应为实数, 因此, 在(8)式~(11)式中加上了绝对值符号。将(8)式~(10)式代入(5)式, 就可得到部分相干光束通过硬边光阑的推广光束传输  $M^2$  因子的近似计算结果。

#### 4 $M^2$ 因子的近似解析计算公式

在准单色场近似和高斯型随机相位畸变假设下, 有振幅调制和相位畸变光束的场分布可用交叉频谱密度函数表示为

$$W(x'_1, x'_2, 0) = I_0 \exp\left[-\frac{\sigma_p^2}{L_p^2} (x'_1 - x'_2)^2\right] + \sigma_A^2 \left[-\left(\frac{1}{L_A^2} + \frac{\sigma_p^2}{L_p^2}\right) (x'_1 - x'_2)^2\right], \quad (12)$$

式中,  $x'_1, x'_2$  是轴上的两点坐标,  $L_A$  和  $L_p$  分别表示振幅调制和相位畸变的尺度,  $\sigma_A^2$  为光强调制强度,  $\sigma_p^2$  为相位误差幅度, 通常  $I_0$  远大于噪声光强  $\sigma_A^2$ 。本文计算中设  $I_0$  在  $z = 0$  处具有高斯分布, 即

$$I_0 = \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{w_0^2}\right), \quad (13)$$

式中,  $w_0$  为光束的腰斑半径。

将(12)式代入(8)式~(11)式, 并利用积分公式<sup>[8]</sup>

$$\int_0^{+\infty} \exp(-at) t^n dt = n! a^{-n-1}, \quad (14)$$

可推导出有振幅调制和相位畸变光束通过硬边光阑的推广二阶矩为

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\sqrt{\pi} w_0^3}{2I} \left| \sum_{n=1}^N A_n \left[ Q_n^{-3/2} + \sigma_A^2 (Q_n - 2)^{-3/2} \right] \right|, \quad (15)$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2\sqrt{\pi}}{k^2 w_0 I} \left| \sum_{n=1}^N A_n \left\{ Q^{-3/2} + \frac{\sigma_p^2}{(L_p/w_0)^2} Q_n^{-1/2} + \sigma_A^2 \left[ \frac{w_0^2}{L_A^2} + \frac{\sigma_p^2}{(L_p/w_0)^2} \right] (Q_n - 2)^{-1/2} \right\} + \frac{4[\exp(-2\delta^2) + \sigma_A^2]}{\sqrt{\pi}\delta} \right|, \quad (16)$$

$$\langle xu \rangle = 0, \quad (17)$$

式中,  $\delta = D/w_0$  为光束截断参量,

$$I = \sqrt{\pi} w_0 \left| \sum_{n=1}^N A_n \left[ Q_n^{-1/2} + \sigma_A^2 (Q_n - 2)^{-1/2} \right] \right|, \quad (18)$$

$$Q_n = B_n/\delta^2 + 2. \quad (19)$$

进一步将(15)式~(17)式代入(5)式, 可得到有振幅调制和相位畸变光束的推广  $M^2$  因子的解析计算公式为

$$M^2 = \frac{2 \sqrt{\left| \sum_{n=1}^N A_n \left[ Q_n^{-3/2} + \sigma_A^2 (Q_n - 2)^{-3/2} \right] \times \left\{ \sum_{n=1}^N A_n \left[ Q_n^{-3/2} + \frac{\sigma_p^2}{(L_p/w_0)^2} Q_n^{-1/2} + \sigma_A^2 \left( \frac{w_0^2}{L_A^2} + \frac{\sigma_p^2}{(L_p/w_0)^2} \right) (Q_n - 2)^{-1/2} \right] + \frac{4[\exp(-2\delta^2) + \sigma_A^2]}{\sqrt{\pi}\delta} \right\} \right|}{\left| \sum_{n=1}^N A_n \left[ Q_n^{-1/2} + \sigma_A^2 (Q_n - 2)^{-1/2} \right] \right|}, \quad (20)$$

从(20)式可以看出, 有振幅调制和相位畸变光束通过硬边光阑的推广  $M^2$  因子不仅与相位畸变参量  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2$  和振幅调制参量  $\sigma_A^2$  有关, 还与截断参量  $\delta$  有关。进一步分析(20)式可知, 有振幅调制和相位畸变光束通过硬边光阑的推广  $M^2$  因子将随着相位畸变参量  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2$  和振幅调制参量  $\sigma_A^2$  的增大而增大。

当  $\sigma_A^2 = 0$  时, 对应于只有相位畸变情况, (20)式简化为

$$M^2 = 2 \sqrt{\left| \sum_{n=1}^N A_n Q_n^{-3/2} \times \left\{ \sum_{n=1}^N A_n \left[ Q_n^{-3/2} + \frac{\sigma_p^2}{(L_p/w_0)^2} Q_n^{-1/2} \right] + \frac{4\exp(-2\delta^2)}{\sqrt{\pi}\delta} \right\} \right|} \left| \sum_{n=1}^N A_n Q_n^{-1/2} \right|. \quad (21)$$

进一步分析可知, 当  $\sigma_A^2 = 0$  时, 由(12)式描述的只有相位畸变光束与部分相干高斯-谢尔模型光束等

价<sup>[9]</sup>, 此时, 只有相位畸变光束的相位畸变参量  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2$  与高斯-谢尔模型光束的相干参量  $\beta$  有关, 即

$$\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2 = (1/\beta^2 - 1)/2, \quad (22)$$

将(22)式代入(21)式, 可得到高斯-谢尔模型光束的推广  $M^2$  因子为

$$M^2 = 2 \sqrt{\left| \sum_{n=1}^N A_n Q_n^{-3/2} \times \left[ \sum_{n=1}^N A_n \left( Q_n^{-3/2} + \frac{1/\beta^2 - 1}{2} Q_n^{-1/2} \right) + \frac{4 \exp(-2\delta^2)}{\sqrt{\pi} \delta} \right] \right|^2} \left/ \left| \sum_{n=1}^N A_n Q_n^{-1/2} \right| \right. \quad (23)$$

(23)式表明, 高斯-谢尔模型光束的推广  $M^2$  因子不但与相干参量  $\beta$  有关, 还与光束截断参量  $\delta$  有关。

## 5 数值计算及其结果分析

利用(20)式计算有振幅调制和相位畸变光束的推广  $M^2$  因子, 典型结果如图 1、图 2、图 3 所示。

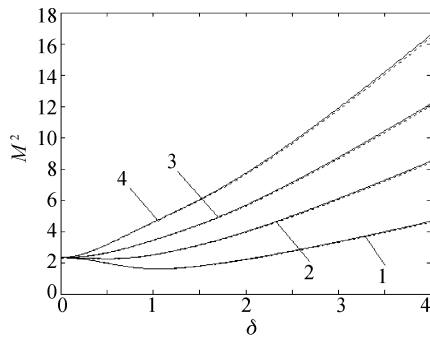


Fig. 1 Generalized  $M^2$  factor of laser beams with amplitude modulation and phase distortion varies as a function of the beam truncation parameter  $\delta$

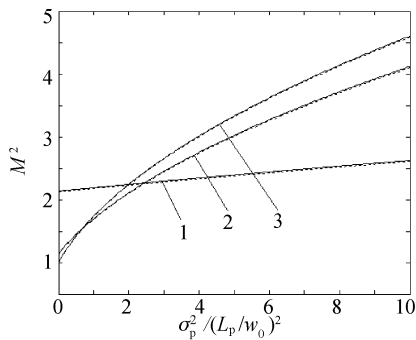


Fig. 2 Generalized  $M^2$  factor of laser beams with amplitude modulation and phase distortion varies as a function of phase fluctuation parameters  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2$

图 1 给出了  $M^2$  因子随光束截断参量  $\delta$  的变化曲线, 图中曲线 1~4 分别表示  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2$  为 0、2、5、10,  $\sigma_A^2 = 0.2$ ,  $(L_A/w_0)^2 = 1.0$ 。图 2 给出了  $M^2$  因子随相位畸变参数的变化曲线, 图中曲线 1~3 分别表示  $\delta$  为 0.3、1.0、3.0,  $\sigma_A^2 = 0.2$ ,  $(L_A/w_0)^2 = 1.0$ 。图 3 给出了  $M^2$  因子随振幅调制参量  $\sigma_A^2$  的变化曲线, 图中曲线 1~3 分别表示  $\delta$  为 0.3、1.0、3.0,  $(L_A/w_0)^2 = 1.0$ ,  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2 = 4.0$ 。为了说明

本文方法的有效性, 图中还给出了直接由数值积分计算得到的结果, 在图中用虚线表示。

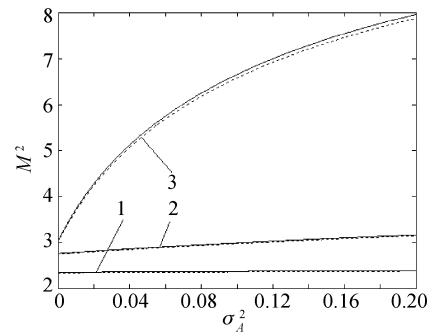


Fig. 3 Generalized  $M^2$  factor of laser beams with amplitude modulation and phase distortion varies as a function of amplitude modulation parameters  $\sigma_A^2$

由图 1~图 3 可以看出, 本文提出的近似方法的计算结果与直接进行数值积分计算得到的结果相差不到 1%。然而, 采用本文的提出的近似方法可直接得到相应的解析计算公式, 从而使计算得以简化, 并大为减小了计算难度和提高了计算效率。

进一步分析图 1 可知, 当  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2$  较小[例如,  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2 < 2$ ], 即光束的相位畸变较小时, 在截断参量  $\delta$  小于 1 的范围内,  $M^2$  因子随光束截断参量的增大而减小。而在截断参量  $\delta$  大于 1 以后,  $M^2$  因子则随光束截断参量  $\delta$  的增大而增大。当光束的相位畸变参量  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2$  较大时[例如,  $\sigma_p^2/(L_p/w_0)^2 > 2$ ],  $M^2$  因子将随光束截断参量  $\delta$  的增大而增大。由图 2, 3 可以看出, 有振幅调制和相位畸变光束的  $M^2$  因子将随相位畸变参量和振幅调制参量的增大而增大。

**结论** 本文利用矩形函数的复高斯函数的近似展开方法, 给出了部分相干光束通过硬边光阑的强度二阶矩的近似计算公式, 由此可推导出对截断和非截断光束均适用的推广  $M^2$  因子。以振幅调制和相位畸变光束为例, 推导出相应的推广  $M^2$  因子的解析公式。研究表明, 使用本文的近似方法计算得到的推广  $M^2$  因子的计算误差小于 1%, 从而说明本文方法的有效性。

## 参 考 文 献

- 1 Sigeman A E. New developments in laser resonators. *Proc. SPIE*, 1990, **1224**:6~9
- 2 Martinez-Herrero R, Mejias P M. second-order spatial characterization of hard - edge diffracted beams. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(19):1669~1671
- 3 Martinez-Herrero R, Mejias P M. Parametric characterization of coherent, lowest-order Gaussian beams propagation through hard-edged apertures. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(2):124~126
- 4 Gori F, Santarsiero M. The change of width of a partially coherent beam on paraxial propagation. *Opt. Commun.*, 1991, **82**(3~4):197~203
- 5 Santarsiero M, Gori F. Spreading properties of beams radiated by partially coherent Schell-model sources. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1999, **16**(1):106~112
- 6 Chu Xiaoliang, Zhang Bin. Generalized  $M^2$ -factor partially coherent beams propagating through hard-edged apertures. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2002, **22**(9):1051~1054 (in Chinese)
- 7 Wen J J, Breazeale M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams. *J. Acous. Soc. Am.*, 1998, **83**(5):1752~1756
- 8 Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F *et al.*. *Table of Integral Transforms*. New York: McGraw-Hill, 1954
- 9 Zhang Bin, Lü Baida. Focusing properties of laser beams of amplitude modulations and phase fluctuations. *Chin. J. Lasers* (中国激光), 1997, **A24**(5):415~420 (in Chinese)



## 《光学学报》三级学科名称

本刊要求所写的 4~6 个关键词中,头一个为该文的三级学科名称。现在本刊推荐使用下列三级学科名称。由于有些课题可能可以归入这个或那个学科,故选用时请注意着重文章的内容,使之课题与三级学科尽量切合。

Applied Optics	应用光学
Applied Optoelectronics	应用光电子学
Atmosphere Optics	大气光学
Biological Optics	生物光学
Film Optics	薄膜光学
Geometrical Optics (Imaging Optics)	几何光学(成像光学)
Guided Wave Optics (Fiber and Integrated Optics)	导波光学(光纤,集成光学)
Information Optics	信息光学
Laser Physics	激光物理
Laser Techniques	激光技术
Lasers	激光器
Luminescence	发光学
Nonlinear Optics	非线性光学
Ocean Optics	海洋光学
Optical Fiber Communication Technology	光纤通信技术
Optical Materials	光学材料
Optical Measurement	光学测量
Photochemistry	光化学
Physical Optics	物理光学
Plasma Physics	等离子体物理学
Quantum Optics	量子光学
Spectroscopy	光谱学
X-Ray Optics	X 射线光学