

文章编号: 0253-2239(2004)02-225-5

## 用于二维光址多分址系统的代数同余码研究\*

杨淑雯<sup>1</sup> 蒲涛<sup>1,2</sup> 徐铭<sup>1</sup> 李玉权<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 深圳大学新技术研究中心, 深圳 518060  
<sup>2</sup> 解放军理工大学通信工程学院, 南京 210007)

**摘要:** 总结了线性、二次和双曲等有限域内的代数同余运算在光码分多址系统中的应用, 将代数同余码分为三类: 跳频码、扩时码和跳频扩时码, 并给出它们的构造公式。提出了一种同时采用这三类编码分别用以提供不同类型用户服务的二维光码分多址方案, 该系统方案尤其适合于大量用户需要常规服务, 而少部分用户需要高速或高质量(QoS)服务的情况, 具有对速率和服务质量的强适应能力。为了证明该系统方案的可行性, 首先证明了三种码字的互相关常数, 然后推导了达到各种互相关值的概率, 最后得出混合系统中不同类型干扰对系统误码率的影响, 并进行了数值分析与讨论。

**关键词:** 光纤通信技术; 光码分多址; 代数编码; 线性同余运算

中图分类号: TN929.11 文献标识码: A

### Research of Algebraic Congruent Codes Used in Two-Dimensional Code Division Multiaddress System

Yang Shuwen<sup>1</sup> Pu Tao<sup>1,2</sup> Xu Ming<sup>1</sup> Li Yuquan<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> *Advanced Technology Research Centre, Shenzhen University, Shenzhen 518060*  
<sup>2</sup> *Institute of Communication Engineering, PLA University of Science and Technology, 210007*)

(Received 21 January 2003; revised 31 May 2003)

**Abstract:** After summarizing the application of linear, quadratic and hyperbolic operators in CDMA system, a generalized algebraic congruent code is given out by its construction formula in three different categories, which are frequency-hop (FH), time-spread (TS) and FH-TS codes. A novel two-dimensional optical CDMA system is given out, in which different categories of codes are used to provide different types of service. Such a OCDMA system is very fit for the case that a small part of services are with high bit rate or high quality of service, while great amount of services are common one. In order to prove the possibility of such a hybrid system, the cross-correlation constants between those three codes are given firstly, the probabilities to attend those cross-correlation values are calculated secondly, system's BER performances under several different types of interferences are provided at last. Numerical analysis and discussion is also given.

**Key words:** optical fiber communication technology; optical code division multiaddress (OCDMA); algebraic encoding; linear congruent operation

## 1 引 言

光码分多址(OCDMA)系统由于具有随机、异

步的多址接入能力和保密性强、组网灵活、可高速全光处理的特点,成为光通信研究的重要分支。一维时域光址多分址系统存在着码字容量受限、码组稀疏、码长过大、相关性差的问题。目前在对二维光址多分址系统的研究中,所采用的码字有一次重叠序列<sup>[1]</sup>、扩展双曲同余码(EHC, Extended hyperbolic congruence)<sup>[2]</sup>和素数跳频码<sup>[3]</sup>等。代数编码是利

\* 国家自然科学基金重点项目(60132040、国家自然科学基金(69982006)资助课题。

E-mail: putao@opticalab.njice.com

收稿日期:2003-01-21;收到修改稿日期:2003-05-31

用代数域内的各种运算得到所需的码字,根据所采用代数运算的种类不同可分为线性同余运算、二次同余(QC, Quadratic congruent)运算<sup>[4]</sup>、双曲同余(HC, Hyperbolic congruent)运算<sup>[5]</sup>和 Costas<sup>[6]</sup>运算等,但是它们都只能提供恒定扩频比、等优先级用户的接入服务。

本文提出的代数同余码是利用有限数域内的代数同余运算,产生跳频(Frequency hop)、扩时(Time spread)和两者时频组合生成的跳频扩时(FH-TS)三类码字。为了论证三类同余码可以构成混合光址多分址系统以提供不同的服务需求,在总结代数同余码码字特征的基础之上,本文分析了跳频、并行扩时码与跳频扩时码之间的互相关特性,继而分析了同时采用三类同余码的混合系统中多用户干扰的类型及其大小,从而得出同时采用这三种编码的混合系统,仍保持了所有用户的准正交性和可用的误码性能这一结论。

## 2 代数同余码的构造及码字特性

对一个给定的素数  $p$ ,可用  $y_i(k)$  来表示伽罗瓦域  $GF(p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$  内的一种同余运算,  $i, k$  均属于  $G(p)$ , 其中的  $i$  表示第几个序列,  $k$  表示该序列中的第几位。由一个给定的同余运算  $y_i(k)$ , 我们定义了 3 类代数同余码:跳频码、扩时码和跳频扩时码。它们的构造表达式分别如下:

跳频码为

$$\{[0, y_i(0)], [1, y_i(1)], \dots, [k, y_i(k)], \dots, [p-1, y_i(p-1)] \mid i \in [0, p-1]\}, \quad (1)$$

扩时码为

$$\{y_i(0), y_i(1) + p, \dots, y_i(k) + kp, \dots, y_i(p-1) + k(p-1) \mid i \in [0, p-1]\}. \quad (2)$$

跳频扩时码可表示为

$$\begin{aligned} & \{[y_i(0), j \otimes y_i(0)], [y_i(1) + p, j \otimes y_i(1)], \dots, \\ & [y_i(k) + kp, j \otimes y_i(k)], \dots, \\ & [y_i(p-1) + (p-1)p, j \otimes y_i(k)] \\ & \mid i, j \in [0, p-1]\}, \quad (3) \end{aligned}$$

其中  $\otimes$  为模  $p$  乘。上述三种同余码的码重都为  $p$ , (1) 式 ~ (3) 式中的  $p$  个数组分别表示  $p$  个“1”码的时间-波长位置。

由构造方法可知,前两类同余码的码字容量为  $p$ , 而跳频扩时码的容量较大,为  $p^2 - p$ 。

同余运算  $y_i(k)$  可以是线性的,还可以是二次同余、双曲同余和幂同余运算,表示如下:

$$1) y_i(k) = \frac{i}{k} + m \pmod{p}, \text{ 双曲同余运算;}$$

$$2) y_i(k) = i \frac{k(k+1)}{2} \pmod{p}, \text{ 二次同余运算;}$$

$$3) y_i(k) = ik \pmod{p}, \text{ 线性同余运算;}$$

$$4) y_i(k) = \alpha^k \pmod{p}, \text{ 其中 } \alpha \text{ 是 } p \text{ 的本原根, 幂同余运算。}$$

根据所采用的运算不同,可分为线性同余码、二次同余码、双曲同余码这三种,每种同余码又均可分为三类,这 9 类不同的同余码的自互相关常数及容量有如下特点:

1) 跳频码的自互相关常数与同余运算的性质有关,对于线性同余码,它们是 1, 对于二次或双曲同余码,它们是 2;

2) 二次或双曲同余扩时码的自互相关常数分别是相应跳频码的两倍,因为发生在跳频码自互相关中的一个碰撞对应于扩时码中的两个碰撞<sup>[6]</sup>;

3) 对于相同的运算,并行扩时码的自互相关常数是扩时码的  $P$  倍,但码重为  $P^2$ ;

4) 跳频扩时码的容量较跳频码和扩时码扩大近一个量级;

5) 线性同余扩时码,就是我们通常所称的素数序列,它的自相关旁瓣过高,所以不在异步码分多址系统中采用。

## 3 各类同余码相互间的码字特性

将同一运算生成的三类同余码用于同一个系统之中,作为不同用户的地址序列,不仅需要考虑到三者各自的自互相关性能,还需要考虑到三者相互间的干扰。在本节,我们将分别研究跳频码对跳频扩时码,以及并行扩时码(在  $p$  个波长采用相同扩时码)对跳频扩时码的最大互相关值,在下一节中,将计算达到互相关的概率,从而求得多用户干扰对系统误码率的贡献。

### 3.1 跳频码对跳频扩时码的干扰

为分别说明不同类型同余运算的跳频码对跳频扩时码的干扰(即互相关值)大小,在此给出定理 1 ~ 3 及其证明:

**定理 1** 对于线性同余运算,跳频码同跳频扩时码的最大互相关函数值为 1。

**证明:** 考虑以用户信息全“1”调制的跳频码,观察其中与跳频扩时码等长的一段,其表达式如下:

$$\{[k + mp, y_i(k)] \mid i, m, k \in G(p)\},$$

它表示的是  $p$  个波长,  $p^2$  个时隙的长序列,该序列与跳频扩时码的互相关最大值由运算  $y_i(k)$  决定。

设二者互相关的非 0 值发生在  $[k + mp, y_{i_1}(k)]$  与  $[y_{i_2}(k) + kp, j \otimes y_{i_2}(k)]$  的相对时移  $s$  处,  $s \in G(p)$ , 则有

$$y_{i_1}(k + s) \equiv jy_{i_2}(k) \cap y_{i_2}(k) \equiv k + s, \quad (4)$$

其中“ $\equiv$ ”代表模  $p$  同余于, 对于线性运算用  $ik$  代替  $y_i(k)$ , 得到

$$i_2 k \equiv k + s \cap ji_2 k \equiv i_1(k + s) \Rightarrow k \equiv \frac{s}{i_2 - 1} \equiv \frac{i_1 s}{ji_2 - s}. \quad (5)$$

上式表示当  $i_1, i_2, j$  为给定值时,  $k$  最多只有一个满足条件的解, 证毕。

**定理 2** 当采用二次同余运算时, 跳频码和跳频扩时码的最大互相关值为 2。

**证明:** 将  $y_i(k) = ik(k+1)/2$  代入(5)式, 则有

$$\begin{aligned} i_2 \frac{k(k+1)}{2} &\equiv k + s \cap i_1 \frac{(k+s)(k+s+1)}{2} \equiv \\ ji_2 \frac{k(k+1)}{2} &\Rightarrow i_2 k^2 + (i_2 - 2)k - 2s \equiv \\ 0 \cap i_1 k^2 + (2s + 1)i_1 k + s(s + 1)i_1 &\equiv \\ ji_2 k^2 + ji_2 k. & \quad (6) \end{aligned}$$

上式中的两个方程在  $s$  取某些特定值时退化为一个方程。由拉格朗日定理可得<sup>[8]</sup>, 二次方程最多只有 2 个非同余根, 因此采用二次同余韵算得跳频和跳频扩时码, 最大互相关为 2。

**定理 3** 当采用双曲同余运算时, 跳频码和跳频扩时码的最大互相关值为 1。

**证明:** 同定理 1。

### 3.2 并行扩时码对跳频扩时码的干扰

并行扩时码同跳频扩时码之间的互相关特性等同于扩时码自身的自互相关特性, 为

1) 当跳频扩时码的序列与并行扩时码的序列相同时, 即两者所采用的运算  $y_i(k)$  具有相同的  $i$  时, 互相关值为  $\lambda_a$ , 这样的跳频扩时码占总数的  $1/p$ 。当采用线性同余运算时, 由于  $\lambda_a = p - 1$ , 所以切忌同时使用具有相同码序号  $i$  的并行扩时码和跳频扩时码, 而对于二次同余和双曲同余运算, 无此限制;

2) 当跳频扩时码的序列与并行扩时码的序列不同时, 即两者所采用的运算  $y_i(k)$  具有不同的  $i$  时, 互相关值为  $\lambda_c$ , 这样的跳频扩时码占总数的  $(p - 1)/p$ 。

## 4 混合系统的误码性能

混合系统中某一类用户的误码性能, 由于干扰用户所采用的地址码对该用户地址码的碰撞所决定。上一节中讨论了不同码字间的碰撞最大值(互相关

常数)。本节将通过定理 4 ~ 6 及其证明, 首先计算达到各碰撞值的概率上限; 然后根据这些碰撞概率计算各种情况的干扰对误码率的贡献; 最后比较各类干扰的性能曲线。

**定理 4** 对于线性同余运算, 跳频扩时码同跳频码产生一次碰撞的概率小于  $1/p$ , 而两者产生 2 次碰撞的概率为 0。

**证明:**

$$q_1 = \Pr\{\text{跳频扩时码同跳频码产生一次碰撞}\} = \frac{1}{2} \Pr\{[k + s, y_{i_1}(k + s)] = [y_{i_2}(k), jy_{i_2}(k)]\}, \quad (7)$$

式中的  $1/2$  源于用户数据“0”、“1”等概率的假设。对于一个给定的码字,  $i_1, i_2$  和  $j$  都是常量, 由定理 1 可知, 对每个  $s, k(s)$  只有一个解。

故  $q_2 = \Pr\{\text{跳频扩时码同跳频码产生 2 次碰撞}\} = 0$ 。

将线性运算代入(7)式, 可得

$$q_1 = \frac{1}{2} \Pr\left\{\frac{s}{i_2 - 1} \equiv \frac{i_1 s}{ji_2 - s}\right\} = \frac{1}{2} \Pr\{s^2 - (ji_2 + i_1 - i_1 i_2)s \equiv 0\}, \quad (8)$$

$s \in [0, p - 1]$ , 由拉格朗日定理可知  $s$  在  $p$  个位置中至多只有 2 个位置满足上式, 故  $q_1 \leq 1/p$ 。定理 3 证毕。

**定理 5** 对于双曲同余运算, 跳频扩时码同跳频码产生一次碰撞的概率小于  $2/p$ , 而两者产生 2 次碰撞的概率为 0。

**证明:** 将双曲同余运算  $y_i(k) = i/k$  代入(4)式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{i_2}{k} &\equiv k + s \cap \frac{i_2}{k + s} \equiv j \frac{i_1}{k} \Rightarrow \\ k^2 + sk + i_2 &\equiv 0 \cap k \equiv \frac{sj i_1}{i_2 - j i_1}. \quad (9) \end{aligned}$$

上式中的 2 个等式需同时满足, 故  $q_2 = 0$ ,

$$q_1 = \Pr\left\{\frac{-i_2 \pm \sqrt{s^2 - 4i_2}}{2} \equiv \frac{sj i_1}{i_2 - j i_1}\right\}. \quad (10)$$

在  $p$  域的二次方程最多只有 2 个同余不等的根, 故  $q_1 \leq 2/p$ 。

**定理 6** 对于二次同余运算, 跳频扩时码同跳频码产生一次碰撞的概率小于  $8/p - 2/p^2$ , 而两者产生 2 次碰撞的概率小于  $2/p^2$ 。

**证明:** 将二次同余运算  $y_i(k) = k(k + 1)/2$  代入(4)式, 就可得(7)式中的两个等式。只有当两个方程退化为一个方程时, 才会产生两个碰撞:

$$q_2 = \Pr \left\{ \frac{i_2}{i_1 - ji_2} \equiv \frac{i_2 - 2}{(2s+1)i_1 - ji_2} \equiv \frac{-2}{(s+1)i_1} \right\} =$$

$$\Pr \{ s(i_1 i_2 + 4i_1) + i_1 i_2 + 2i_1 - 2ji_2 \equiv 0 \cap s \equiv j(i_2 - i_1) + i_2 + 2j - 1 \} \leq 1/p^2.$$

同时  $q_1 = \Pr\{(6) \text{ 式中的 } 2 \text{ 个方程有相同的根}\} = \Pr\{k_1 = k_3 \cup k_1 = k_4 \cup k_2 = k_3 \cup k_2 = k_4 - k_{1,2} = k_{3,4}\}$ , 其中

$$k_{1,2} = \frac{2 - i_2 \pm \sqrt{(i_2 - 2)^2 - 4i_2 s}}{2i_2}, \quad k_{3,4} = \frac{ji_2 - 2si_1 - i_1 \pm \sqrt{[(2s+1)i_1 - ji_2]^2 - 4i_1(s+1)(i_1 - ji_2)}}{2(i_1 - ji_2)},$$

于是  $q_1 \leq 4 \times 2/p - 1/p^2 = 8/p - 1/p^2$ .

在混合系统中,干扰按码字类别的不同可分为 3 种类型,我们分别分析它们对误码率的贡献:

A 类干扰:跳频码(或跳频扩时)码用户对跳频扩时码用户的干扰

这种干扰引起的误码,其概率由碰撞概率  $q_1$  和

$q_2$  决定,误码率的上界同  $q_1, q_2$  的关系由参考文献 [7] 中的(7)式和(23)式给出.当  $p$  足够大且  $K \gg 1$  时,误码率计算可采用高斯近似法<sup>[8]</sup>.针对 3 种不同同余运算的高斯近似误码率  $P_{A|L|G}, P_{A|Q|G}$  和  $P_{A|H|G}$  如下列各式所示:

$$P_{A|L|G} = \phi \left[ -\sqrt{p^3/4K(1-1/p)} \right], \tag{11}$$

$$P_{A|Q|G} = \phi \left\{ -p\sqrt{p}/\sqrt{32K[1-61/(8p)-2/p^2-1/(8p^3)]} \right\}, \tag{12}$$

$$P_{A|H|G} = \phi \left[ -\sqrt{p^3/8K(1-2/p)} \right], \tag{13}$$

式中  $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx$ .

B 类干扰:跳频扩时码用户对跳频码的干扰

由于跳频码的长度是跳频扩时码的  $1/p$ ,故跳频码被跳频扩时码碰撞的概率为后者被前者碰撞概率的  $2/p$ ,其中 2 源于公式 8 中用户数据的随机性.由此我们可以得出误码率的高斯近似  $P_{B|L|G}, P_{B|Q|G}$  和  $P_{B|H|G}$  如下所示:

$$P_{B|L|G} = \phi \left[ -p^2/2\sqrt{2} \sqrt{K(1-2/p^2)} \right], \tag{14}$$

$$P_{B|Q|G} = \phi \left\{ -\frac{p^2}{8} \frac{1}{\sqrt{K[1+3/(8p)-4/p^2-4/p^3-1/(4p^4)]}} \right\}, \tag{15}$$

$$P_{B|H|G} = \phi \left[ -\frac{p^2}{4\sqrt{K(1-4/p^2)}} \right]. \tag{16}$$

C 类干扰:跳频扩时码用户对并行扩时码用户的干扰

跳频扩时码与并行扩时码的互相关特性等同于扩时序列的自相关特性,只是并行扩时码的码重为  $p^2$ ,所以我们可以采用扩时序列的有关结论<sup>[8]</sup>.通过修改参考文献[8]中的(5)式,可以得到并行扩时码用户的高斯近似误码率,这里仅采用了线性同余运算:

$$P_{C|Q|G} = \phi \left[ \frac{-\sqrt{R_{SN}}}{2} \right] = \phi \left[ \frac{-p^2}{\sqrt{1.16K}} \right]. \tag{17}$$

图 1 中给出了采用  $p = 11$  的二次同余运算时,三种类型干扰的高斯近似误码性能比较.

由图 1 可见,对于并行扩时码而言,混合多址接

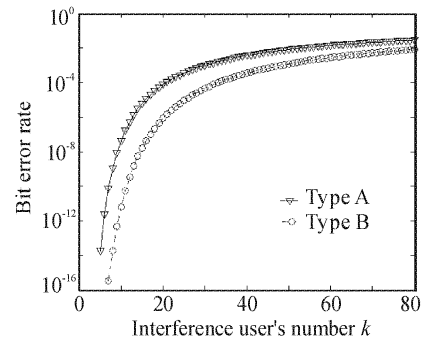


Fig. 1 Comparison of three types of interference's bit error rate, linear congruent was used, the prime number is  $p = 11$

入系统是一个无误码信道(不计接收机散粒噪声和

热噪声,光源强度噪声和光纤的色散),B类干扰的误码性能优于A类,这意味着跳频码的抗干扰能力优于跳频扩时码,而并行扩时码最强,所以在混合系统中,并行扩时码用户可以享受最高的服务质量。

图2中比较了采用不同同余运算的A类干扰特性。由图2可见,同样是A类干扰,采用不同的代数同余运算,其对系统误码率的贡献不同:采用线性同余运算的系统具有最小的A类干扰,其次是双曲同余运算,最差是二次同余运算。

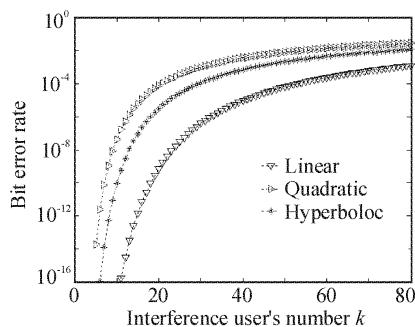


Fig. 2 The type a interference's BER comparison while 3 different operations are used

在图3中比较了采用不同同余运算的B类干扰特性。由图3可知,对于B类干扰,采用线性同余运算的误码性能总是优于双曲同余运算,而双曲同余运算优于二次同余运算。

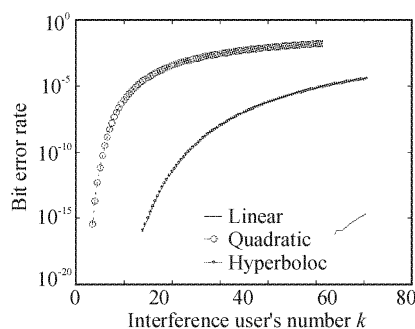


Fig. 3 The type B interference's BER comparison while 3 different operations are used

**结论** 本文提出了一种采用相同代数同余运算的混合光址多分址系统,其优点在于能提供可变速率、可变服务质量的服务。由生成公式可知混合系统中三种码序列的容量(即所能提供的最大用户数)分别是: $p^2 - p$ 个跳频扩时码, $p$ 个扩时码和 $p$ 个跳频码,其中跳频码的速率比其它两种高 $p$ 倍,而并行扩时码的抗干扰能力比其它两种高 $p$ 倍(自相关峰为 $p^2$ ,而其他两者均为 $p$ )。它适合于系统中大量用户需要的常规服务,而少部分用户需要高速或

高质量服务的情况。

对于同时使用跳频、扩时和跳频扩时码的二维光址多分址系统,三种同余运算中线性同余运算性能最佳,但是由于采用线性同余运算的扩时码自相关旁瓣太高,不能在异步系统中使用并行扩时码,而同步传输又将对网同步提出很高要求,从而失去码分多址随机异步的特点。所以当混合系统需要具有高质量用户时,不宜采用线性同余码,此时二次同余和双曲同余码均可采用,而尤以双曲同余码的性能为佳;当混合系统只需高速率用户时,线性同余码应为首选。

### 参 考 文 献

- 1 Fathallah H, Rusch L A. Robust optical FFH-CDMA communications: coding in place of frequency and temperature controls. *J. Lightwave Technol.*, 1999, **17** (8):1284~1293
- 2 Maric S V, Hahm M D, Titlebaum E L. Constructin and performance analysis of a new family of optical orthogonal codes for CDMA fiber-optic networks. *IEEE Transactions on Communications*, 1995, **43**:485~489
- 3 Ding Meiqi, Zhang Xianming, Zhao Kangsheng. Fiber Bragg grating CODEC based DSSS optical CDMA system. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2002, **22**(7):842~846 (in Chinese)
- 4 Maric S V, Kostic Z I, Titlebaum E L. A new family of optical code sequences for use in spread-spectrum fiber optic local area networks. *IEEE Transactions on Communications*, 1993, **41**:1217~1221
- 5 Maric S V, Titlebaum E L. A class of frequency hop codes with nearly ideal characteristics for use in multiple-access spread-spectrum communications and radar and sonar systems. *IEEE Transactions on Communications*, 1992, **40**:1442~1447
- 6 Rosen K. *Elementary Number Theory and Its Applications*. New York: Addison-Wesley, 1988
- 7 Azizoglu M, Salehi J A, Li Y. Optical CDMA via temporal codes. *IEEE Transactions on Communications*, 1992, **40**:1162~1170
- 8 Kwong W C, Perrier P A, Prucnal P R. Performance comparison of asynchronous and synchronous code-division multiple-access techniques for fiber-optic local area networks. *IEEE Transactions on Communications*, 1991, **39**:1625~1634
- 9 Zhou Changzun, Chen Yang, Peter Kung. Research of fiber Bragg Grating's thermal stability. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2003, **23**(4):434~439 (in Chinese)
- 10 Xu Ming, Yang Xianglin, Cai Ju. Performance analysis of DMS system. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2003, **23**(1):31~35 (in Chinese)
- 11 Xu Xinhua, Lu Changgui, Hong Congshen. Morie fiber Grating's spectrum character and applicatoin. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2002, **22**(12):1470~1475 (in Chinese)