

文章编号: 0253-2239(2004)11-1577-4

# 压缩态初始光场下变耦合系数的 Jaynes-Cummings 模型\*

许静平 羊亚平

(同济大学物理系, 上海 200092)

**摘要:** 讨论了初始光场为压缩态而且原子-场耦合系数随时间线性变化情形下的 Jaynes-Cummings 模型。具体研究了原子布居数反转、光场的压缩等随时间的演化性质, 讨论了初始光场的压缩系数、压缩相位及耦合系数变化的快慢对这些性质的影响。结果表明, 随着光场压缩系数的增大, 原子布居数反转的崩塌-回复现象的频率加快, 回复值减小, 且场中不再出现压缩性。当耦合系数变化较快时会加速崩塌-回复现象。压缩相位增大时, 则会减缓崩塌-回复现象的频率, 并使回复值减小。

**关键词:** 量子光学; Jaynes-Cummings 模型; 压缩态; 耦合系数

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

## Time-Dependent Atom-Field Coupling Jaynes-Cummings Model under an Initial Squeezed State

Xu Jingping Yang Yaping

(Department of Physics, Tongji University, Shanghai 200092)

(Received 5 December 2003; revised 16 February 2004)

**Abstract:** The Jaynes-Cummings models with a time-dependent atom-field coupling under the initial squeezed state of the optical field are discussed. Especially, the evolution of the atomic population inversion, and the squeezing properties of the field with time are studied. Further, the effects of the atom-field coupling coefficient, the squeezing parameter and phase on these properties are also discussed, and some results are obtained. With the increasing of squeezing coefficient, the frequency of collapse-revival in atomic population inversion are enhanced, and the amplitude of revival decreases, in the same time, there are no squeezing. When atom-field coupling coefficient changes rapidly, it will fasten the collapse-revival. With the increasing of squeezing phase, it will delay the collapse-revival and decrease the amplitude of revivals.

**Key words:** quantum optics; Jaynes-Cummings models; the squeezing state; the atom-field coupling coefficient

## 1 引 言

Jaynes-Cummings (J-C) 模型描述了二能级原子与单模电磁场的相互作用<sup>[1]</sup>。一方面, J-C 模型的数学形式比较简单, 可以严格求解, 在讨论场的统计性质方面具有较好的可靠性<sup>[2,3]</sup>; 另一方面, 在实验上, 人们可以利用高 Q 因子腔体和里德伯原子来实现这种理想模型<sup>[4]</sup>。因此, 在探讨光与物质相互作用等问题中, J-C 模型在实验和理论方面均受到

了广泛的关注<sup>[5~9]</sup>, 并揭示了许多量子现象, 如拉比振荡<sup>[5,6]</sup>, 原子布居数反转的崩塌和回复<sup>[7~9]</sup>, 腔体中场的压缩效应等。其中, 拉比振荡、崩塌和回复等现象也相继在其他量子系统中得到发现和研究<sup>[10]</sup>。随着研究的发展, J-C 模型也得到了不断的推广, 如三能级原子与一个双模压缩真空场的相互作用<sup>[11]</sup>, 光子腔中的 J-C 模型<sup>[12]</sup>, 克尔介质中的 J-C 模型<sup>[13]</sup>, 外加驱动场控制下的 J-C 模型<sup>[14]</sup>等。

在以往的研究中, 人们通常将原子-场的耦合系数作为常数来处理。在实际过程中, 耦合系数在电磁场与原子相互作用的初始时段是随时间变化的。在文献<sup>[15]</sup>中, 以相干态作为初始光场的变耦合系

\* 国家自然科学基金(90203007)、国家 973 计划资助课题。

E-mail: xx\_jj\_pp@hotmail.com

收稿日期: 2003-12-05; 收到修改稿日期: 2004-02-16

数的 J-C 模型得到了研究。但在 J-C 模型中,系统的演化性质与初始条件紧密相关。因此,在本工作中,将研究在压缩态初始光场条件下的 J-C 模型,主要研究光场的压缩系数、压缩相位及耦合系数变化的快慢等对布居数反转、光场压缩性质随时间演化的影响。在第 2 节中,将给出主要的模型及数学公式;在第 3 节中,将主要讨论初始条件对原子布居数反转性质的影响;第 4 节中将讨论初始条件对光场压缩性质的影响,并对本工作给予总结。

### 2 模型和运动方程

考虑一个二能级原子与单模电磁场的相互作用。当原子与场相互作用强度随时间变化时,系统哈密顿量为(旋波近似下)<sup>[14]</sup>

$$H = \omega_0 S_z + \omega a^+ a + gf(t)(a^+ S_- + a S_+), \quad (1)$$

其中原子算符  $S_{\pm}, S_z$  满足对易关系  $[S_+, S_-] = 2S_z, [S_z, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}$ 。 $\omega_0$  为原子共振跃迁频率, $\omega$  为单模电磁场频率。 $g$  为原子与电磁场之间相互作用的耦合常数。 $a$  与  $a^+$  分别为电磁场的湮灭及产生算符,它们满足对易关系  $[a, a^+] = 1$ 。 $f(t)$  是随时间变化的调制函数,取如下形式:

$$f(t) = \begin{cases} kt/T, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{other} \end{cases}, \quad (2)$$

式中  $k$  为调制函数控制参量, $T$  为相互作用时间。假

设原子初始时刻处于激发态,在  $t$  时刻系统状态可以用波函数表示为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) |n, e\rangle + b_n(t) |n, g\rangle, \quad (3)$$

$|n, e(g)\rangle$  表示原子处于激发态(基态),而电磁场具有  $n$  个光子。求解薛定谔方程,可以得到关于振幅  $a_n$  和  $b_n$  的演化方程

$$\begin{cases} i\dot{a}_n = gf(n+1)^{1/2} \exp(-i\Delta t) b_{n-1}, \\ i\dot{b}_{n+1} = gf(n+1)^{1/2} \exp(i\Delta t) a_n, \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\Delta = \omega - \omega_0$ 。

### 3 原子的布居数反转

假定原子与单模场共振  $\Delta = 0$ ,在这种情形下,可得  $a_n$  的运动方程

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + g^2 \left[ \frac{k}{T} \right]^2 (n+1) a_n = 0, \quad (5)$$

同样可以得到关于  $b_n$  的运动方程。为了便于讨论原子布居数的性质,定义布居数反转  $W$  为原子处于激发态与基态的几率差,即

$$W = \sum_n |C_n|^2 (|a_n|^2 - |b_{n+1}|^2), \quad (6)$$

$W$  的性质与系统的初始状态相关。在这里我们将讨论初始时原子处于激发态,而电磁场为压缩态的情况。光场压缩态可以写作

$$\begin{cases} |\beta\rangle_g = \exp\left[\frac{1}{2}\zeta^* a^2 - \frac{1}{2}\zeta(a^+)^2\right] \exp(\beta a^+ - \beta^* a) |0\rangle = \sum_n C_n |n\rangle, \\ |C_n|^2 = \frac{1}{n!} \frac{1}{|\mu|} \left| \frac{\nu}{2\mu} \right|^n \exp\left\{-|\beta|^2 + \frac{\nu^*}{2\mu} \beta^2 + \frac{\nu}{2\mu^*} \beta^{*2}\right\} H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right) H_n\left(\frac{\beta^*}{\sqrt{2\mu^*\nu^*}}\right), \end{cases} \quad (7)$$

式中  $\zeta = r \exp(i\theta), \mu = \cosh r, \nu = \exp(i\theta) \sinh r, \beta = |\beta| \exp(i\varphi), r$  是压缩系数, $\theta$  是压缩相位, $H_n(z)$  是厄米多项式。 $W(t)$  可以表示为

$$W(t) = \sum_n |C_n|^2 \cos\left(\frac{gk \sqrt{n+1} t^2}{T}\right), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

很显然,对于不同的初始状态, $W(t)$  将具有不同的演化性质。

首先考虑压缩系数  $r$  及原子-场耦合强度的调制函数  $f(t)$  对  $W(t)$  的影响。图 1 至图 3 描述了在不同压缩系数下及不同耦合系数时  $W(t)$  随时间的演化情况,其中曲线 D 描述了原子-场耦合系数为常数时  $W(t)$  的演化,即压缩态调制的 J-C 模型情况。当  $r$  很小时(见图 1,  $r = 0.1$ ),在  $W(t)$  的演化过程中,出

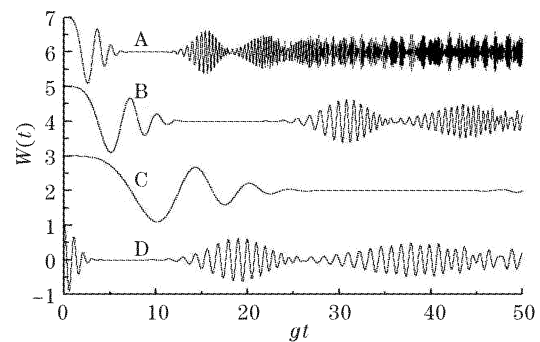


Fig. 1  $W(t)$  as a function of time in initial squeezing state,  $|\beta|^2 = 10, gT = 50, r = 0.1, \theta = 0$  and  $k = 8.0$  (curve A), 2.0 (curve B), 0.5 (curve C). Curve D is for the case of the constant coupling coefficient  
现明显的崩塌和回复现象,且  $W(t)$  包络近似于高

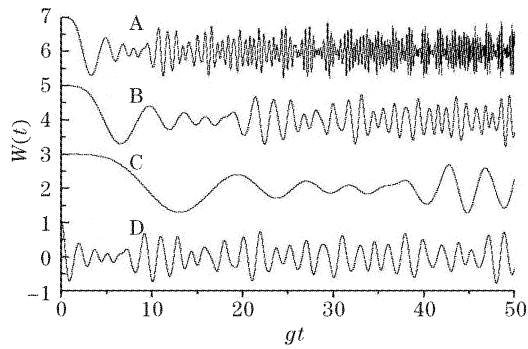


Fig. 2  $W(t)$  as a function of time in initial squeezing state,  $|\beta|^2=10, gT=50, r=1, \theta=0$  and  $k=8.0$  (curve A),  $2.0$  (curve B),  $0.5$  (curve C). Curve D is for the case of the constant coupling coefficient

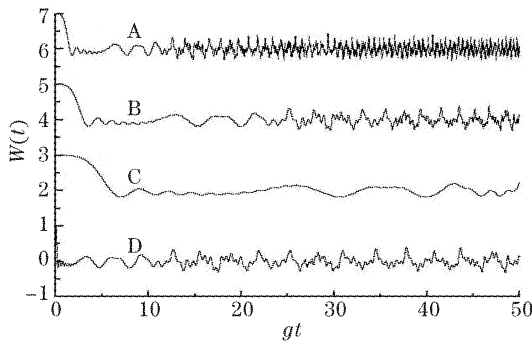


Fig. 3  $W(t)$  as a function of time in initial squeezing state,  $|\beta|^2=10, gT=50, r=3, \theta=0$  and  $k=8.0$  (curve A),  $2.0$  (curve B),  $0.5$  (curve C). Curve D is for the case of the constant coupling coefficient

斯型,在崩塌过程中其振荡的幅值可以趋于零。当  $r$  增大时(见图 2 和图 3),尽管崩塌和回复现象依然存在,但与相干态情形相比有很大不同。很显然,随着压缩系数的增大,崩塌和回复的频率增大,回复的幅值减小,而在崩塌过程中也没有明显地趋于零的过程,而且  $W(t)$  随时间的演化作一些相对简单的上下振荡。这些改变主要源于初始时光场性质的不同。当初始态光场为相干态时,光子分布为泊松分布,对  $W(t)$  性质起主要影响的光子态的光子数集中在峰值附近的一个小的区间。当平均光子数的光子态引起的拉比振荡与其近邻光子数态引起的拉比振荡的相位差为  $2\pi$  的整数倍时将出现回复现象。当压缩系数较小时,压缩态的光子数分布趋近泊松分布,  $W(t)$  的性质也趋近与相干态的情形。但当压缩系数较大时,光子数分布完全不同于泊松分布,其分布宽度随  $r$  增大而增宽。对  $W(t)$  性质起主要作用的光子态的光子数分布很宽,其回复值由这些光子数态引起的拉比振荡共同决定。由于不可能使这些拉比振荡的相位差均为  $2\pi$  的整数倍,它们之间会相互抵消

部分效应,因此回复值下降。

比较图 1~图 3 中的 A, B, C 及 D 曲线,可以发现耦合强度调制函数  $f(t)$  对  $W(t)$  的影响。图中曲线 A 表示原子-场耦合系数变化很快的情形( $k=8.0$ , 相应于突变的情形);曲线 C 表示原子-场耦合系数变化缓慢的情形( $k=0.5$ , 相应于绝热变化)。从 A, B, C 曲线可以看到,随着  $k$  的增大,崩塌和回复的频率加快。但与曲线 D(耦合系数恒定的情况)相比,可以发现:当  $k$  较小时,耦合系数的变化会对  $W(t)$  演化中的崩塌和回复现象起延迟作用,而当  $k$  比较大时,则起着加速的作用。

由于光子压缩态的光子数分布与压缩相位  $\theta$  以及  $\beta$  的相位  $\varphi$  相关,实际上与相对值  $\theta/2 - \varphi$  相关,因此该相位差对  $W(t)$  的演化也将产生影响。在图 4 与图 5 中,分别画出了不同  $\theta$  值( $\varphi$  取为零)时  $W(t)$  随时间的演化情况。比较图中的曲线 A、B 和 C 可以发现,当  $\theta$  增大时,崩塌与回复的频率将减小,同时回复的幅值将下降。

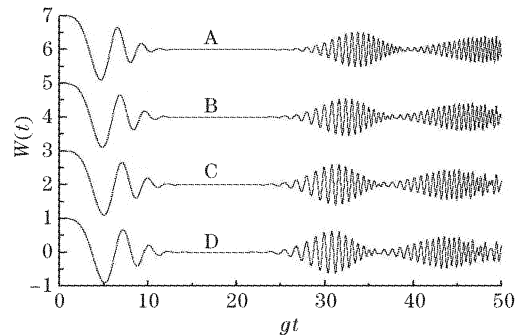


Fig. 4  $W(t)$  as a function of time for the one-photon process in initial squeezing state,  $|\beta|^2=10, gT=50, r=0.1, k=2$  and  $\theta=\pi$  (curve A),  $\pi/2$  (curve B),  $\pi/4$  (curve C) and  $0$  (curve D)

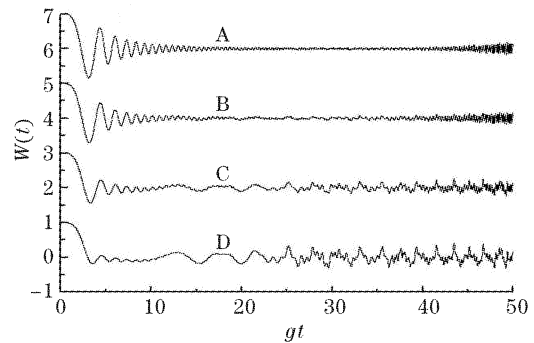


Fig. 5  $W(t)$  as a function of time for the one-photon process in initial squeezing state,  $|\beta|^2=10, gT=50, r=3, k=2$  and  $\theta=\pi$  (curve A),  $\pi/2$  (curve B),  $\pi/4$  (curve C) and  $0$  (curve D)

#### 4 光场的压缩性质

对于单模电磁场,我们利用场的产生和湮灭算符定义下列两个正交分量算符:

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+), \quad (9)$$

则  $[X_1, X_2] = i/2$ .

两算符的量子均方涨落之积满足

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle \cdot \langle(\Delta X_2)^2\rangle \geq 1/16,$$

若  $\langle(\Delta X_i)^2\rangle < 1/4 (i = 1, 2)$ , 则表示场在该分量上被压缩, 即具有压缩性. 引入压缩量

$$S_i = \langle(\Delta X_i)^2\rangle - 1/4, \quad (i = 1, 2)$$

$S_i < 0$  则意味着压缩效应的出现. 在下面的讨论中将主要考虑光场在  $X_2$  方向的压缩性质.

图 6、图 7 分别描述了  $k = 0.5$  和  $k = 4.0$  时压缩量  $S_2$  随时间的演化情况. 由于初始光场处于压缩态, 因此在演化初期光场依然处于压缩状态. 但随着时间的演化, 压缩量  $S_2$  逐渐增大至大于零, 此时光场在  $X_2$  方向的压缩效应将失去. 当压缩系数较大时, 光场在  $X_2$  方向的压缩效应将不会再次出现 (见图 6, 图 7 中的 A, B 曲线), 同时在  $X_1$  方向的压缩效应也不会出现. 压缩系数较小时的情况则不同, 光场在  $X_2$  方向的压缩效应随着时间的演化将重新出现 (见图 6, 图 7 中的 C 曲线), 而且在  $X_1$  方向的压缩效应也会随时间的演化而出现. 这样的结果与耦合系数变化快慢无关.

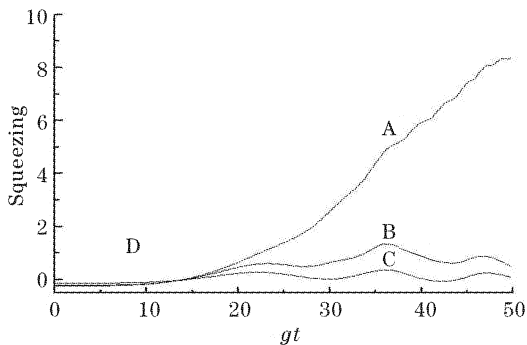


Fig. 6 Squeezing ( $S_2$ ) as a function of time with  $k=0.5$ ,  $|\beta|^2=5, \theta=0, gT=50$  and  $r=2$  (curve A), 1 (curve B), 0.5 (curve C)

在这一工作中我们讨论了当原子与光场的耦合系数随时间变化的情况下、压缩态光场作为起始态的 J-C 模型. 分析了原子的布居数反转以及场的压缩性质. 研究发现: 在系统随时间的演化过程中, 系统原子与场耦合系数变化的快慢、初始压缩光场的性质 (包括压缩系数, 压缩相位) 均对布居数反转以及场的压缩性质产生较大的影响.

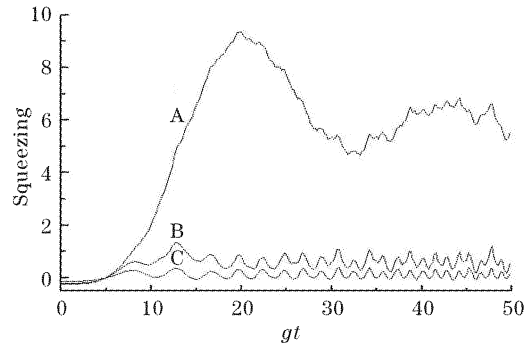


Fig. 7 Squeezing ( $S_2$ ) as a function of time with  $k=4.0$ ,  $|\beta|^2=5, \theta=0, gT=50$  and  $r=2$  (curve A), 1 (curve B), 0.5 (curve C)

#### 参 考 文 献

- Jaynes E T, Cummings F W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to beam maser. *Proc. IEEE*, 1963, **51**(1): 89~109
- Joshi A, Puri R R. Characteristics of Rabi oscillations in the two-mode squeezing state of the field. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(7): 4336~4342
- Puri R R, Agarwal G S. Finite-Q cavity electrodynamics: dynamical and statistical aspects. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35**(8): 3433~3449
- Brune M, Schmidt-Kaler F, Maali A *et al.*. Quantum Rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **76**(11): 1800~1803
- Raimond J M, Goy P, Gross M *et al.*. Collective absorption of blackbody radiation by rydberg atom in a cavity: An experiment on bose statistics and Brownian motion. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**(2): 117~120
- Meschede D, Walther H, Muller G. One-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **54**(6): 551~554
- Eberly J H, Narozhny N B, Sanchez-Mondragon J J. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**(20): 1323~1326
- Gentile T R, Hughey B J, Kleppner D. Experimental study of one- and two-photon Rabi oscillations. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **40**(9): 5103~5115
- Rempe G, Walther H, Klein N. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(4): 353~356
- Peng J S, Li G X. Effects of the dipole-dipole interaction on dynamic properties and atomic coherent trapping of a two-atom system. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **47**(5): 4212~4218
- Lai W K, Buzek V, Knight P L. Dynamics of a three-level atom in a two-mode squeezed vacuum. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(9): 6043~6056
- Quang T, Knight P L, Buzek V. Quantum collapses and revivals in an optical cavity. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(9): 6092~6096
- Joshi A, Puri R R. Dynamical evolution of the two-photon Jaynes-Cummings model in a Kerr-like medium. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(7): 5056~5060
- Li F L, Gao S Y. Controlling nonclassical properties of the Jaynes-Cummings model by an external coherent field. *Phys. Rev. (A)*, 2000, **62**: 043809 (1~6)
- Joshi A, Lawanda S V. Generalized Jaynes-Cummings models with a time-dependent atom-field coupling. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **48**(3): 2276~2284