

文章编号: 0253-2239(2004)11-1521-4

光纤中扰动的小信号增益*

钟先琼^{1,2} 陈建国¹ 李大义¹ 冯国英¹ 欧群飞¹ 陆丹¹

(¹ 四川大学光电系, 成都 610064
² 成都信息工程学院光电系, 成都 610041)

摘要: 从非线性薛定谔方程出发, 在小信号近似下, 推导并求解了光纤中扰动相位和幅度的演化方程, 利用得到的扰动相位及功率增益的表达式, 研究了初相位和频率对传输过程中扰动增益的影响。研究表明: 扰动的初相位对扰动增益的初值和初始阶段的演化规律有重要影响; 取决于扰动初相位, 任何一个频率的扰动增益都有可能达到一个共同的最大值; 在被认为无调制不稳定的正色散区和扰动频率大于截止频率的负色散区, 扰动增益随距离是振荡的; 在被认为有调制不稳定的扰动频率小于截止频率的负色散区, 频率相同而初相位不同的扰动增益将经历不同形式的演化后趋于同一正值。

关键词: 非线性光学; 小信号近似; 扰动功率增益; 扰动频率; 扰动初相位

中图分类号: O437 文献标识码: A

Small Signal Gains of Perturbation Propagating in Optical Fibers

Zhong Xianqiong^{1,2} Chen Jianguo¹ Li Dayi¹ Feng Guoying¹ Ou Qunfei¹ Lu Dan¹

(¹ Department of Optoelectronics, Sichuan University, Chengdu 610064
² Department of Optoelectronics, Chengdu University of Information and Technology, Chengdu 610041)

(Received 1 September 2003; revised 19 March 2004)

Abstract: Starting from the nonlinear Schrödinger equation, the evolution equations of the perturbation phase and magnitude in optical fibers have been deduced under small signal approximation. Using the obtained solutions of the perturbation phase and power gain, the influence of gain of perturbation propagation is investigated for different initial phases and frequencies. The results show that at the initial stage, the gain is greatly affected by the perturbation initial phase. Depending on the initial phase, all the unstable perturbations have the chance to claim a common maximum gain that is frequency independent. In the normal dispersion region, as well as in the abnormal region where the perturbation frequency is larger than the cut-off frequency and modulation instability is thought not to occur, the perturbation gains oscillate with the propagation distance. In the abnormal dispersion region when the perturbation frequency is smaller than the cut-off frequency, where modulation instability is thought to occur, the gains of perturbations with different initial phases while with the same frequency will evolve to the same positive value through different ways.

Key words: nonlinear optics; small signal approximation; power gain of perturbation; perturbation frequency; perturbation initial phase

1 引 言

由于在光孤子通信及超短脉冲产生等方面的应

用, 近二十年来人们对光纤中的调制不稳定性问题进行了大量研究^[1~6]。目前研究光纤中扰动功率增益的常用方法是将扰动的复振幅 α 写成

$$\{U_0 \cos(kz - \Omega T) + iV_0 \sin(kz - \Omega T)\}$$

或

$$\{U_0 \exp[i(kz - \Omega T)] + iV_0 \exp[i(kz - \Omega T)]\}$$

的形式^[1~6], 并且在数学推导中认定波数 k 是一个

* 中国工程物理研究院与国家自然科学基金委员会(10176019)联合资助课题。

E-mail: zxqlxh@sina.com

收稿日期: 2003-09-01; 收到修改稿日期: 2004-03-19

与传输距离无关的常数(更确切地说是纯虚数),这样一来,问题的数学处理大大地简化。然而,这种处理给本来自洽而且理论上应有普适解的扰动演化方程作了人为的限定。由于 k 的虚部与扰动增益有关,因而在纯虚数限定下虽然可以导出扰动的增益,但却掩盖了与传输距离相关的相位演化信息,因为相位与 k 实部有关。简而言之,前人对调制不稳定性处理在数学上是有缺陷的,因而导出的结论在物理上是不够完备的。深入探讨调制不稳定性这种重要的物理现象,获取一个全面、自洽的物理图像无论是在理论上还是在以此为基础的实际应用上都是十分必要的。

本文将扰动写成具有普适性的振幅加相位角的形式后,研究了光纤中扰动的功率增益,计算了具有不同的初相位和频率的扰动的增益系数随传输距离的变化规律。

2 扰动的演化方程

忽略光纤损耗时,光波的慢变振幅 A 满足下列传输方程^[1]

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - i \gamma |A|^2 A, \quad (1)$$

其中 β 为二阶色散系数, γ 是非线性系数。在连续或准连续情况下,其稳态解为

$$\bar{A} = P_0^{1/2} \exp(i\varphi_{NL}),$$

P_0 是入射光功率,非线性相移 $\varphi_{NL} = \gamma P_0 z$ 。为了讨论解的稳定性,在解中加入绝对值远小于 $P_0^{1/2}$ 的微扰 α ,于是慢变振幅变为 $A = (P_0^{1/2} + \alpha) \exp(i\varphi_{NL})$,把此式代入(1)式,在小信号近似下可线性化

得到^[1]

$$i \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2} - \gamma P_0 (\alpha + \alpha^*), \quad (2)$$

考虑到普适性,复数 α 可用振幅与相位两实数来表示,因而(2)式中频率为 Ω 的解可设为

$$\alpha = \delta(z) \exp\{i[\Psi(z) - \Omega T]\}, \quad (3)$$

其中, $\delta(z)$ 表示扰动振幅, $\varphi(z, T) = \Psi(z) - \Omega T$ 表示扰动相位, $\delta(z)$ 、 $\varphi(z, T)$ 、 $\Psi(z)$ 和扰动圆频率 Ω 均为实数,把(3)式代入(2)式并分离实虚部后可得 $\varphi(z, T)$ 和 $\delta(z)$ 的演化方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta \left[\Omega^2 + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\beta) \Omega_c^2 + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\beta) \Omega_c^2 \cos(2\varphi) \right], \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial z} = \frac{1}{4} |\beta|^2 \Omega_c^2 \sin(2\varphi) \delta, \quad (4b)$$

式中 sgn 为符号函数, $\Omega_c = (4\gamma P_0 / |\beta|)^{1/2}$ 可称为截止频率。由功率增益的定义及(4b)式可得扰动的功率增益为

$$g = \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial \delta^2}{\partial z} = \frac{1}{2} |\beta| \Omega_c^2 \sin(2\varphi). \quad (5)$$

3 扰动的演变规律

前人的研究表明^[1],调制不稳定发生在负色散区,从(4)式也可得出同样的结论。本文重点讨论 $\beta < 0$ 情况下扰动的演化规律。

3.1 扰动频率小于截止频率($\Omega^2 < \Omega_c^2$)

在这种情况下,对(4a)式积分可得到扰动相位的隐函数形式的解为

$$\operatorname{artanh} \left\{ \frac{2|\Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2} \sin[2\varphi]}{\Omega_c^2 + (\Omega_c^2 - 2\Omega^2) \cos[2\varphi]} \right\} - \operatorname{artanh} \left\{ \frac{2|\Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2} \sin[2\varphi(0)]}{\Omega_c^2 + (\Omega_c^2 - 2\Omega^2) \cos[2\varphi(0)]} \right\} = |\beta| |\Omega| z \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}, \quad (6)$$

其中 $\varphi(0)$ 是 $z = 0$ 时的扰动相位。把(6)式代入(5)式,可得相应的扰动功率增益为

$$g = \frac{D_1 \Omega_c^2 [\Omega_c^2 \tanh(\theta_1 + D_1 z) \pm |(\Omega_c^2 - 2\Omega^2) \tanh(\theta_1 + D_1 z) \cdot \operatorname{sech}(\theta_1 + D_1 z)|]}{\Omega_c^4 - (\Omega_c^2 - 2\Omega^2)^2 \operatorname{sech}^2(\theta_1 + D_1 z)}, \quad (7)$$

其中

$$\theta_1 = \operatorname{artanh} \frac{2|\Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2} \sin[2\varphi(0)]}{\Omega_c^2 + (\Omega_c^2 - \Omega^2) \cos[2\varphi(0)]}, \quad (8a)$$

$$D_1 = |\beta| |\Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}, \quad (8b)$$

利用 $z = 0$ 处(6)式的结果应与(5)式相同这一初始条件可解决(7)式中正负号的取舍问题。考察(6)式可以看出,当 $z \rightarrow \infty$ 时,扰动相位趋向于某个渐近

值,它满足

$$\varphi_\infty = n\pi + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{2\Omega^2}{\Omega_c^2} - 1 \right), \quad (9)$$

对应的扰动增益的渐近值 g_∞ 与文献[1]中的扰动增益相同,即:

$$g_\infty = |\beta| |\Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}.$$

由 g_∞ 的表达式可知,不同频率扰动的增益渐近值是不同的,当 Ω 为最大增长频率 $\Omega_c / \sqrt{2}$ 时,增益渐近

值最大($2\gamma P_0$)。值得一提的是,对于频率为零和截止频率的两种特殊扰动,利用(4)式及类似的分析方法可获得它们的增益表达式,分析发现,由文献报

道的零增益也只是该处增益的渐近值。

3.2 扰动频率大于截止频率($\Omega^2 > \Omega_c^2$)

此时,可求得扰动相位满足的隐函数形式为

$$\arctan \left\{ \frac{2|\Omega| \sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2} \sin[2\varphi]}{\Omega_c^2 + (\Omega_c^2 - 2\Omega^2) \cos[2\varphi]} \right\} - \arctan \left\{ \frac{2|\Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2} \sin[2\varphi(0)]}{\Omega_c^2 + (\Omega_c^2 - 2\Omega^2) \cos[2\varphi(0)]} \right\} = |\beta| |\Omega| z \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}, \quad (10)$$

相应的扰动功率增益为

$$g = \frac{D_2 \Omega_c^2 [\Omega_c^2 \tan(\theta_2 + D_2 z) \pm |(2\Omega^2 - \Omega_c^2) \tan(\theta_2 + D_2 z) \cdot \sec(\theta_2 + D_2 z)|]}{(2\Omega^2 - \Omega_c^2)^2 \sec^2(\theta_2 + D_2 z) - \Omega_c^4}, \quad (11)$$

其中

$$\theta_2 = \arctan \frac{2|\Omega| \sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2} \sin[2\varphi(0)]}{\Omega_c^2 + (\Omega_c^2 - \Omega^2) \cos[2\varphi(0)]}, \quad (12a)$$

$$D_2 = |\beta| |\Omega| \sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2}, \quad (12b)$$

(11) 式中正负号的取舍方法同上。分析(11)式可知,扰动增益随传输距离 z 的增加而时正时负,呈周期性振荡,即扰动幅度时而增长,时而衰减,扰动不会发散,通常认为此时主光波的传输是稳定的。此外,还可以看出,振荡周期满足

$$z_c \propto 1/(|\beta| |\Omega| \sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2}), \quad (13)$$

即扰动频率越高,振荡周期越小,增益变化越快。扰动

增益的最小值为 $-2\gamma P_0$,此时,扰动幅度衰减最快;扰动增益的最大值为 $2\gamma P_0$,此时,扰动幅度增长最快。可见扰动极大极小值均与扰动频率大小无关;当 $\theta_2 + D_2 z = n\pi$ 时,扰动增益为零,扰动幅度取极值。

正色散区($\beta > 0$)的情形与负色散区且扰动频率大于截止频率时类似,这里不赘述。

4 计算与讨论

4.1 扰动频率小于截止频率($\Omega^2 < \Omega_c^2$)

图 1 给出了不同情况下非稳定扰动增益随距离演变的曲线,计算中用文献[1]的参量。

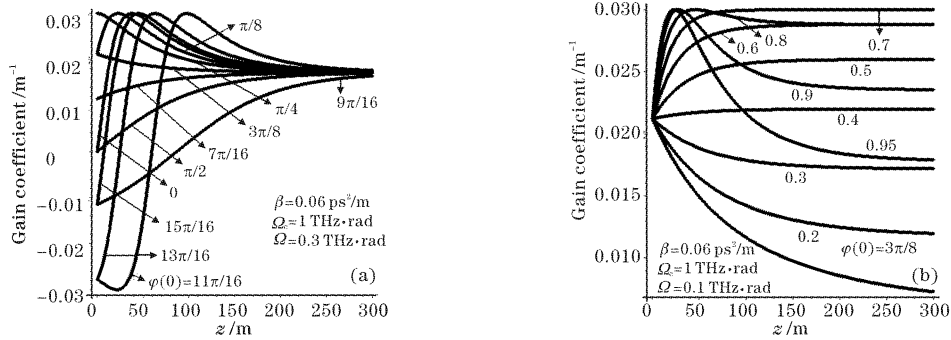


Fig. 1 Evolution of gain with propagation distance z for different (a) initial phases, and (b) frequencies, in the unstable regime

图 1(a) 考查了 $\Omega = 0.3$ THz 时不同扰动初相位的影响,图 1(b) 考查了 $\varphi(0) = 3\pi/8$ 时不同扰动频率的增益。由图可见,初始阶段的扰动增益是变化的。视初相位不同,增益趋于渐近值所需传输距离也不同。总的说来,扰动增益趋于渐近值前的变化规律有几种可能形式:从某一初值(正、负、或零)开始迅速上升到最大值 $2\gamma P_0$,然后下降直到渐近值,如图 1(a) 中 $\varphi(0) = 13\pi/16, 15\pi/16, 0, \pi/8$ 的几条曲线;从一负值开始下降到最小值 $-2\gamma P_0$,然后迅速上升到最大值 $2\gamma P_0$,然后再下降直趋渐近值,如图 1(a) 中 $\varphi(0) = 11\pi/16$ 的曲线;缓慢地单调上升到渐近值,如图 1(a) 中 $\varphi(0) = 9\pi/16, 7\pi/16, \pi/2$ 的

几条曲线;缓慢地单调下降到渐近值,如图 1(a) 中 $\varphi(0) = 3\pi/8, \pi/4$ 的两条曲线。由图还可看到,各曲线经过不同变化后趋向同一渐近值,这表明增益渐近值只与 Ω 有关,而与初相位无关。由图 1(b) 可见,不同频率扰动的增益渐近值不同。由(4a)式和(5)式可知,扰动的相位随距离是变化的,增益与扰动相位密切相关,增益并非常数。传统的扰动分析法实际上忽略了扰动的相位变化,故无法描述扰动增益随距离的演化信息。

4.2 扰动频率大于截止频率($\Omega^2 > \Omega_c^2$)

图 2 给出了所谓稳定扰动的增益演化曲线,使用的参量[1]已标在图中。图 2(a) 考查了 $\Omega = 2$ THz

时不同扰动初相位的影响,图 2(b)考查了 $\varphi(0) = \pi/5$ 时不同频率的影响。由图 2 可见,此时增益的

演化与解析分析是一致的。扰动初相位也要影响增益的初值和初始变化规律。

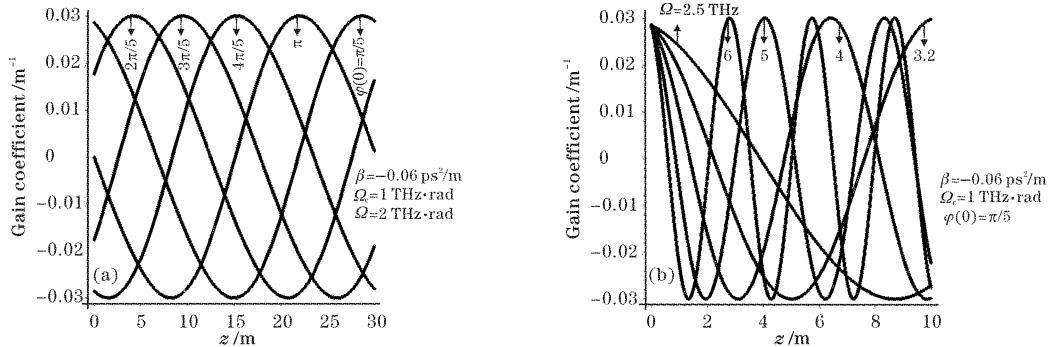


Fig. 2 Evolution of gain with propagation distance z for different (a) initial phases, and (b) frequencies, in the stable regime

参 考 文 献

- 1 Agrawal G P. *Nonlinear Fiber Optics*, second edition. New York: Academic press, 1995
- 2 Cavalcanti S B, Cressoni J C, Cruz H R *et al.*. Modulation instability in the region of minimum group-velocity dispersion of single-mode optical fibers via an extended nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **43**(11): 6162~6165
- 3 Abdullaev F K, Darmanyan S A, Bischoff S *et al.*. Modulation instability in optical fibers near the zero dispersion point. *Opt. Commun.*, 1994, **108**(1): 60~64
- 4 Xu Wencheng, Luo Aiping, Guo Qi *et al.*. Modulation instability in decreasing dispersion fibers. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2000, **20**(10): 1435~1439 (in Chinese)
- 5 Liu Xiumin, Zhang Xiaoguang, Lin Ning *et al.*. Modulation instability in non-Kerr-like optical fibers near the zero dispersion point. *Chin. J. Lasers* (中国激光), 2000, **B9**(1): 79~84
- 6 Zhang Shumin, Xu Wencheng, Luo Aiping *et al.*. Modulation instability of femtosecond optical pulses in decreasing dispersion fibers. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2001, **21**(6): 656~659 (in Chinese)