

文章编号: 0253-2239(2004)10-1421-8

高斯光束在单轴晶体中的布拉格衍射特性*

郭汉明 陈家璧 李湘宁 庄松林

(上海理工大学光学与电子信息工程学院, 上海 200093)

摘要: 利用适当的坐标变换和黎曼方法建立了高斯光束在单轴晶体中布拉格衍射的严格的耦合波理论, 获得了一组严格的耦合波方程和衍射效率计算公式, 讨论了衍射效率随折射率调制量的关系以及波长选择性和角度选择性, 同时分析了衍射效率对再现光宽度的要求。模拟计算表明, 异常光与异常光(ee)型布拉格衍射能够达到的最大衍射效率由记录时入射角决定, 而且通过各参量的适当的选择, 理论上 ee 型布拉格衍射能够在折射率调制量很低(如 8.2×10^{-5})的情况下获得接近 90% 的衍射效率。该理论模型为如何在较低折射率调制量下获得较高衍射效率提供了理论指导。

关键词: 衍射与光栅; 布拉格衍射; 耦合波理论; 高斯光束; 单轴晶体; 黎曼方法

中图分类号: O734 文献标识码: A

Bragg Diffraction of a Gaussian Beam in a Uniaxial Crystal

Guo Hanming Chen Jiabi Li Xiangning Zhuang Songlin

(College of Optics and Electronics Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093)

(Received 14 May 2003; revised 11 December 2003)

Abstract: A rigorous coupled wave theory for the Bragg diffraction of a Gaussian beam in the uniaxial crystal is derived and a group of rigorous coupled wave equations and diffraction efficiency formula are obtained in terms of the proper coordinate transformation and Riemann method. The relations between the efficiency and the index modulation, the wavelength selectivity and the angular selectivity are discussed. At the same time, the requirement of the efficiency on width of the reconstruction beams is also analyzed. Simulation calculations show that, for the extraordinary to extraordinary (ee) Bragg diffraction, the possible maximum efficiency is determined by the incident angle of the recording beams. Moreover, by choosing every parameter properly, the theoretical efficiency can reach approximately 90% in the very low index modulation such as 8.2×10^{-5} for ee type Bragg diffraction. This model may give a theoretic guidance for how to obtain high efficiency in the low index modulation condition.

Key words: diffraction and gratings; Bragg diffraction; coupled wave theory; Gaussian beams; uniaxial crystal; Riemann method

1 引 言

体全息光栅在集成光学、全息学、光谱学中, 尤其近来高密度光存储的研究中, 有着广泛的应用^[1]。对这种光栅衍射特性的分析主要采用耦合波理

论^[2~8], 但是尽管耦合波理论的研究目前已经有了很大的发展, 在晶体中高斯光束布拉格衍射的耦合波理论却还不完善。

1969 年, Kogelnik^[2]建立的经典耦合波理论模型是一种无限大平面波的耦合波模型, 这种理论模型在分析厚度较大的各向同性平面记录介质中的体全息光栅衍射特性时获得了很大的成功, 但是不宜分析晶体中的体全息光栅衍射特性。从 20 世纪 60 年代末到 80 年代初, Solymar 等^[3,4]建立了有限

* 上海市科委光科专项项目(012261018, 036105033)资助课题。

E-mail: jbchenk@online.sh.cn

收稿日期: 2003-05-14; 收到修改稿日期: 2003-12-11

宽度光束的耦合波模型。他们的模型分析了各向同性介质中记录光和再现光为有限宽度的平面波光束和高斯光束的体全息光栅衍射。在满足布拉格条件的情况下,利用黎曼方法给出了在某些特定条件下的解析解,但对于偏离布拉格条件时发生的波长选择性和角度选择性等重要指标不能进行分析。随后,Gaylord 等^[5~7]提出了另外一种模型——严格耦合波模型(RCWT)。这种模型是基于 Kogelnik 理论,也就是说,它也是针对一维的无限大平面波这种情况,不同之处是它考虑了多级衍射光,直接利用电场和磁场的在边界连续的条件用数值方法求解。到了 20 世纪 90 年代,Chen-Wen Tarn^[8]发表了一篇关于高斯光束在各向异性介质中的布拉格衍射的文章。在这篇文章中,作者虽然考虑了布拉格偏移和二阶分量,但是使用的是标量波动方程,并且该模型的记录光栅区是由无限大的平面光波形成的区域,与实际情况也有一定的差异。

在实际使用情况中,光栅区往往是由两个有限宽度的光束在晶体中形成的交叉区域,衍射再现时用的是高斯光束。因此本文根据这一实际情况建立严格耦合波理论,来讨论各向异性介质中体全息光栅的布拉格衍射特性。在第 2 节的理论模型中详尽地讨论了晶体中光波场诸参量之间的关系,从矢量波动方程出发建立了严格耦合波方程,提出了合理的边界条件,利用黎曼方法给出了解析解。在第 3 节中,以 LiNbO₃ 晶体为例进行的模拟计算,讨论了衍射效率随折射率调制量的关系以及波长选择性和角度选择性,同时分析了衍射效率对再现光宽度的要求,提出了在较低折射率调制量下获得较高衍射效率的方法。

2 理论模型

假定在单轴晶体中记录了一个有限宽度的平面波干涉产生的体光栅,再现光波为有限宽度的高斯光束。单轴晶体中,存在 o 光(偏振方向垂直于波矢 \mathbf{K} 和光轴所确定的平面)和 e 光(偏振方向位于波矢 \mathbf{K} 和光轴所确定的平面),它们的电场振动方向是互相垂直的。由于单轴晶体的各向异性,o 光和 e 光也能够互相耦合,因此在不同体光栅条件下,有两种布拉格衍射类型:各向同性布拉格衍射和各向异性布拉格衍射。各向同性布拉格衍射包括再现光和衍射光均为 o 光的 oo 型衍射和再现光和衍射光均为 e 光的 ee 型衍射,各向异性布拉格衍射包括 oe(再

现光为 o 光、衍射光为 e 光)和 eo(再现光为 e 光、衍射光为 o 光)型^[6,15]。在本文中讨论的是 ee 型衍射,并且不考虑吸收。

2.1 平面波干涉场照明下调制相对介电张量分布

文中讨论的布拉格衍射光束的几何模型如图 1 所示。其中,记录体光栅时的参考光束和物光束分别为 R' 和 S' , $W_{R'}$ 表示参考光束 R' 的宽度, $W_{S'}$ 表示物光束 S' 的宽度,参考光束 R' 的波矢 $\mathbf{K}'_{R'}$ 与 x 轴负方向夹角为 θ_0 ,物光束 S' 的波矢 $\mathbf{K}'_{S'}$ 与 x 轴负方向夹角也为 θ_0 ,因此形成的光栅波矢 \mathbf{K}_g 平行于 z 轴。取光轴 c 为 z 轴方向。由于光栅波矢 \mathbf{K}_g 平行于光轴 c ,在单轴晶体中只可能发生各向同性布拉格衍射^[15]。这时,在图 1 所示的几何配置下,相对介电张量 ϵ_r 非对角线上的分量均为零,对于 LiNbO₃ 晶体,对角线上的分量为 $\epsilon_{11} = n_o^2 - n_o^4 r_{13} E_{sc}$ 、 $\epsilon_{22} = \epsilon_{11}$ 、 $\epsilon_{33} = n_e^2 - n_e^4 r_{33} E_{sc}$, n_o , n_e 分别为 o 光和 e 光的折射率, E_{sc} 为空间电荷场。 $r_{13} = 1 \times 10^{-11}$ m/V 而 $r_{33} = 3.26 \times 10^{-11}$ m/V。

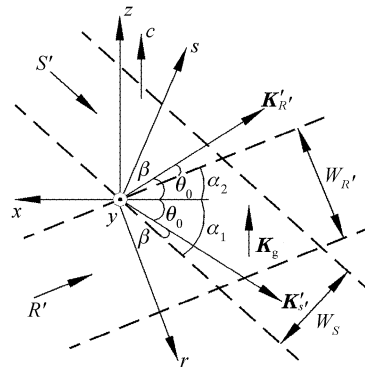


Fig. 1 The geometry of a crossed beam grating

在图 1 中,电场的振动方向位于 xz 平面内。假定记录时使用的是有限宽度的平面波,参考光 R' 和物光 S' 的电场分布可以写成

$$\mathbf{E}_{R'} = \mathbf{e}_{R'} E_{R'0} \exp(-j\mathbf{K}'_{R'} \cdot \mathbf{r}), \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_{S'} = \mathbf{e}_{S'} E_{S'0} \exp(-j\mathbf{K}'_{S'} \cdot \mathbf{r}), \quad (2)$$

式中 \mathbf{r} 为位置矢量, $\mathbf{e}_{R'}$ 和 $\mathbf{e}_{S'}$ 是两光束的电场振动方向的单位矢量, $E_{R'0}$, $E_{S'0}$ 为两光束的常数电场振幅大小,

$$\mathbf{K}'_{R',S'} = K'(-x \cos \theta_0 \pm z \sin \theta_0),$$

K' 为记录晶体中参考光波 R' 和物光波 S' 的波数。根据晶体光学,单轴晶体中波数 K' 为

$$K' = \frac{2\pi n_o n_e}{\lambda_0 \sqrt{n_o^2 + (n_e^2 - n_o^2) \sin^2 \theta_0}}, \quad (3)$$

不失一般性,可假设由光折变效应产生空间电荷场的过程是线性的,则该空间电荷场分布可以写成

$$E_{sc} = E_0 [\exp(-j\mathbf{K}_g \cdot \mathbf{r}) + \exp(j\mathbf{K}_g \cdot \mathbf{r})], \quad (4)$$

式中 E_0 是空间电荷场的大小, 光栅波矢 $\mathbf{K}_g = \mathbf{K}'_R - \mathbf{K}'_S = z\mathbf{K}_g$, K_g 为光栅波数。这表明, 记录时空电荷场“光栅”波矢与 z 轴方向同向。

另一方面, 空间电荷场即折射率光栅的分布区域由有限宽度参考光束 R' 和物光束 S' 的交叉区域形成。要想知道光栅区的边界就必须知道这两个光束的方向。根据晶体光学, 单轴晶体中波矢 \mathbf{K}_i 与光束方向的夹角即离散角可以用波矢与光轴之间夹角表示为

$$\tan \beta = \frac{n_e^2 - n_o^2}{2(n_o^2 \cos^2 \theta_0 + n_e^2 \sin^2 \theta_0)} \sin 2(90^\circ - \theta_0), \quad (5)$$

显然参考光束 R' 和物光束 S' 的离散角在数值上是相等的。对于负单轴晶体, e 光的光线较其波法线远离光轴, 所以由图 1 可得

$$\alpha_1 = \theta_0 + \beta, \quad \alpha_2 = \theta_0 - \beta, \quad (6)$$

式中 α_1 为物光光束 S' 与 x 轴负方向的夹角, α_2 参考光光束 R' 与 x 轴负方向的夹角。这样光栅区的边界就可以根据(5)式、(6)式给出。

2.2 再现高斯光束与衍射光场相叠加的总光波场

折射率光栅的分布区域被再现光照明就会发生衍射。在再现光束 R 不满足布拉格条件的一般条件下, 即波长、入射角均相对于布拉格条件有一个偏移时, 再现光束 R 和衍射光束 S 的电场分布可以写成

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_R R_0(x, y, z) \exp(-j\mathbf{K}_R \cdot \mathbf{r}), \quad (7)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_S S_0(x, y, z) \exp[-j(\mathbf{K}_R - \mathbf{K}_g) \cdot \mathbf{r}], \quad (8)$$

式中 $\mathbf{K}_R = K(-x \cos \theta + z \sin \theta)$, 其他参量含义类似于记录光参量的定义。对于 e 光, K 为再现光光束 R 的波数, 其大小仍由(3)式确定, λ 是再现光光束 R 在真空中的波长。

再现光束 R 和衍射光束 S 的电场振动方向的单位矢量 $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_S$ 位于 xz 平面内, 将其分解成 x, z 分量有利于进行两光场的合成。分解的方法可以借助于表达电位移矢量和电场矢量之间关系的物质方程。电位移矢量、光波波矢与电场矢量共面, 前两者相互垂直。已知光波波矢 \mathbf{K} 以及单轴晶体的寻常折射率和非寻常折射率, 自然可以求出电场振动方向的单位矢量。另外, 衍射光光束 S 的波矢 $\mathbf{K}_S = \mathbf{K}_R - \mathbf{K}_g$, 如果假设波矢 \mathbf{K}_S 与 x 轴负方向的夹角为 θ_s , 那么波矢 \mathbf{K}_S 也可以表示成

$$\mathbf{K}_S = |\mathbf{K}_S|(-x \cos \theta_s - z \sin \theta_s),$$

夹角 θ_s 就可以联立这两个等式确定, 其余弦和正弦的表达形式为

$$\begin{cases} \cos \theta_s = \frac{K \cos \theta}{\sqrt{K^2 + K_g^2 - 2KK_g \sin \theta}}, \\ \sin \theta_s = -\frac{K \sin \theta - K_g}{\sqrt{K^2 + K_g^2 - 2KK_g \sin \theta}}, \end{cases} \quad (9)$$

得到再现光光束 R 和衍射光束 S 的电场振动方向的单位矢量 \mathbf{e}_R 和 \mathbf{e}_S 后, 光栅中总的光波场矢量为就可以写成

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} R_1 R_0(x, y, z) \exp(-j\mathbf{K}_R \cdot \mathbf{r}) + S_1 S_0(x, y, z) \exp[-j(\mathbf{K}_R - \mathbf{K}_g) \cdot \mathbf{r}] \\ 0 \\ R_2 R_0(x, y, z) \exp(-j\mathbf{K}_R \cdot \mathbf{r}) + S_2 S_0(x, y, z) \exp[-j(\mathbf{K}_R - \mathbf{K}_g) \cdot \mathbf{r}] \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式中

$$R_1 = +n_e^2 \sin \theta / \sqrt{n_e^4 \sin^2 \theta + n_o^4 \cos^2 \theta}, \quad R_2 = n_o^2 \cos \theta / \sqrt{n_e^4 \sin^2 \theta + n_o^4 \cos^2 \theta},$$

$$S_1 = -n_e^2 \sin \theta_s / \sqrt{n_e^4 \sin^2 \theta_s + n_o^4 \cos^2 \theta_s}, \quad S_2 = n_o^2 \cos \theta_s / \sqrt{n_e^4 \sin^2 \theta_s + n_o^4 \cos^2 \theta_s},$$

对于 ee 型布拉格衍射, 光栅中总的光波场满足如下矢量波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})] = 0, \quad (11)$$

接下来的问题就是要通过矢量波动方程(11)求解衍射光场 S 的分布。

2.3 耦合波方程

将(4)式、(10)式代入波动方程(11), 并且假设再现光 R 的振幅 $R_0(x, y, z)$ 和衍射光 S 的振幅

$S_0(x, y, z)$ 是缓慢变化的函数。忽略它们的二阶偏导数, 并且只保留 0 级和 -1 级布拉格衍射项, 使波动方程成立的条件简化为指数 $\exp(-j\mathbf{K}_R \cdot \mathbf{r})$ 和 $\exp[-j(\mathbf{K}_R - \mathbf{K}_g) \cdot \mathbf{r}]$ 项前面的系数为零。消去混合二阶偏导, 可以得到如下耦合波方程:

$$R_2^2 \cos \theta \cdot \frac{\partial R_0}{\partial x} + R_1^2 \sin \theta \cdot \frac{\partial R_0}{\partial z} + j\kappa S_0 = 0, \quad (12)$$

$$S_2^2 \cos \theta \cdot \frac{\partial S_0}{\partial x} + S_1^2 (\vartheta - \sin \theta) \frac{\partial S_0}{\partial z} - j \frac{[K \sin \theta \cos \theta (R_1^2 S_2^2 - R_2^2 S_1^2) - \vartheta K_g R_1 R_2 S_1^2]}{2R_1 R_2} S_0 + j\kappa R_0 = 0, \quad (13)$$

其中 ϑ 为布拉格偏移量

$$\vartheta = 2K \sin \theta - K_g / K, \quad (14)$$

耦合系数

$$\kappa = \pi(n_e^4 r_{33} R_2 S_2 - n_o^4 r_{13} R_1 S_1) \times E_0 \sqrt{n_o^2 + (n_e^2 - n_o^2) \sin^2 \theta} / (\lambda n_o n_e), \quad (15)$$

进而按照类似于 Solyman^[3,4] 的方法, 引入如下新的 rsy 坐标系:

$$\begin{cases} r = R_1^2 \sin \theta \cdot x - R_2^2 \cos \theta \cdot z, \\ s = -S_1^2 (\vartheta - \sin \theta) \cdot x + S_2^2 \cos \theta \cdot z, \end{cases} \quad (16)$$

则耦合波方程(12)、(13)可以改写成

$$\frac{\partial R(r, s, y)}{\partial s} + j\kappa_0 S(r, s, y) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial S(r, s, y)}{\partial r} + j\kappa_0 R(r, s, y) = 0, \quad (18)$$

式中

$$\begin{cases} \kappa_0 = \frac{\kappa}{\cos \theta \cdot [R_1^2 S_2^2 \sin \theta - R_2^2 S_1^2 (\vartheta - \sin \theta)]}, \\ R(r, s, y) = R_0(r, s, y) \exp(jar), \\ S(r, s, y) = S_0(r, s, y) \exp(jar), \\ a = -\frac{[K \sin \theta \cos \theta (R_1^2 S_2^2 - R_2^2 S_1^2) - \vartheta K_g R_1 R_2 S_1^2]}{2R_1 R_2 \cos \theta \cdot [R_1^2 S_2^2 \sin \theta - R_2^2 S_1^2 (\vartheta - \sin \theta)]}, \end{cases} \quad (19)$$

将(19)式代入(18)式, 耦合波方程可以改写成

$$\partial^2 S(r, s, y) / (\partial s \partial r) + \kappa_0^2 S(r, s, y) = 0, \quad (20)$$

双曲型二阶线性偏微分方程(20) 在一定的边界条件下可以直接利用黎曼方法^[3,9] 求解。

2.4 有关边界条件的讨论和黎曼方法的积分域

衍射发生在单轴晶体中记录的有限宽度的平面波干涉产生的体光栅中, 因此波动方程即耦合波方程的边界条件应当由进入时高斯光束通过的体光栅面以及与输出衍射光平面相对的体光栅面来决定。也就是说由图 1 中虚线组成的平行四边形左半边的下边(以下称为边界 ①) 和上边(以下称为边界 ②) 组成求解方程(20) 的边界。

边界 ① 可以根据(5) 式、(6) 式导出, 在坐标系 rsy 中表示为

$$s = f(r) = \frac{S_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1 - S_1^2 (\vartheta - \sin \theta) \cos \alpha_1}{R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_1 - R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1} r,$$

以及,

$$-\frac{W_R R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_1}{\sin 2\theta_0} \leq r \leq \frac{W_R R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1}{\sin 2\theta_0}, \quad \frac{W_R S_1^2 (\vartheta - \sin \theta) \cos \alpha_1}{\sin 2\theta_0} - \frac{W_R S_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1}{\sin 2\theta_0} \leq s \leq 0.$$

再现光 R 在边界 ① 上尚未发生衍射, 因此再现光 R 在边界 ① 上的复振幅分布是已知的, 由方程(18) 可以得到衍射光 S 在边界 ① 上的偏导数。另外本文讨论的情况对布拉格条件的偏离很有限, 在边界 ① 左下方的区域基本没有返回的衍射光 S 。因而根据电场连续性原理, 可以认为在边界 ① 衍射光分布为零, 即在边界 ① 上的边界条件为

$$S[r, f(r), y] = 0, \quad \partial S[r, f(r), y] / (\partial r) = -j\kappa_0 R_0[r, f(r), y] \exp(jar), \quad (21)$$

同理, 边界 ② 在坐标系 rsy 中可以表示为

$$s = m(r) = -\frac{S_2^2 \cos \theta \sin \alpha_2 + S_1^2 (\vartheta - \sin \theta) \cos \alpha_2}{R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_2 + R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_2} r,$$

以及,

$$-\frac{W_S R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_2}{\sin 2\theta_0} - \frac{W_S S_2^2 \cos \theta \sin \alpha_2}{\sin 2\theta_0} \leq r \leq 0, \quad \frac{W_S S_1^2 (\vartheta - \sin \theta) \cos \alpha_2}{\sin 2\theta_0} \leq s \leq \frac{W_S R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_2}{\sin 2\theta_0},$$

再现光 R 在边界 ② 上为零, 因而衍射光 S 在边界 ② 上的偏导数为零, 同时衍射光分布也为零, 即在边界 ② 上的边界条件为

$$S[r, m(r), y] = 0, \quad \frac{\partial S[r, m(r), y]}{\partial r} = 0. \quad (22)$$

黎曼方法的实质是利用斯托克斯或格林公式将

围线积分为零,进而选取围线的一部分为沿线积分为零的特征线,使上述边界上的积分能够表示特征线交点处的被求函数值。因此在确定边界条件(21)式、(22)式以后要进一步确定合理利用这些边界条件的围线。不难证明,在 rsy 坐标系中边界①和边界②仍然是由原点出发的两条线段,而且它们在坐标系中的位置只有两种可能:第一种情况是当 $R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_1 > R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1$ 时边界①和边界②在 rsy 坐标系中都位于第三象限(如图2所示),第二种情况下是当 $R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_1 < R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1$ 时两条边界分别位于在 rsy 坐标系中第二、四象限(如图3所示)。在本文中偏离布拉格条件很有限的假设下第一种情况相当于夹角 θ_0 大于 46° ,第二种情况下则相当于夹角 θ_0 小于 46° 。

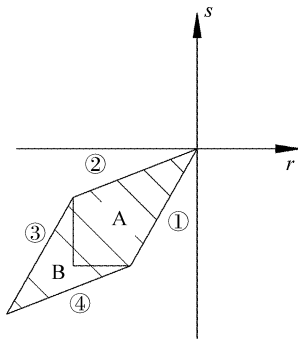


Fig. 2 The first case of the line integral

利用黎曼方法计算图中阴影区中任意一点的函数值,即衍射光复振幅可以选择通过该点且与 r 及 s 坐标轴相平行的两条线作为特征线。在第二种情况下这两条线将会与边界①和②分别相交,可以由边界条件(21)式、(22)式直接计算出衍射光复振

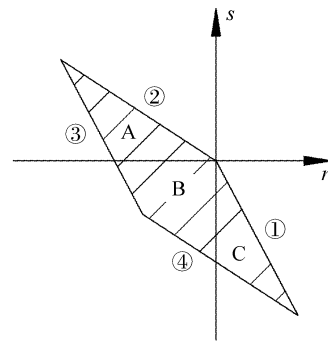


Fig. 3 The second case of the line integral

幅。在第一种情况下,只有在 A 区中的任一点衍射光分布可以用黎曼方法直接计算,对于 B 区中的点则需要对边界条件(21)式、(22)式做一点推广。通过 B 区中的点的两条特征线将与边界①和②相交在其延长线上。在这两延长线部分,再反光 R 均为零,因此可以假设两延长线部分上衍射光及其对于 r 坐标的偏导数均为零。

2.5 出射面上的衍射光分布和衍射效率

尽管图2和3中阴影区内每一点的衍射光复振幅都可以用黎曼方法计算出来,本文最关心的还是由整个光栅区域衍射出来的光分布,也就是说由图中边界④射出来的光分布。由于边界④在 rsy 坐标系下是与边界②具有相同斜率的倾斜直线,因此在 rsy 坐标系下表达的边界④上的光强分布很不直观。为了更直观表达在出射面上衍射光 s 的光强分布,可以引入如下 uvy 坐标系

$$\begin{cases} u = -x \sin \alpha_2 - z \cos \alpha_2, \\ v = -x \sin \alpha_1 + z \cos \alpha_1, \end{cases} \quad (23)$$

在 uvy 坐标系下,出射面的表达形式非常简单,为 $u = W_{R'}$ 。坐标系 rsy 与坐标系 uvy 的关系为

$$r = g(u, v) = \frac{[R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1 - R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_1]u - [R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_2 + R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_2]v}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (24)$$

$$s = h(u, v) = \frac{[S_1^2 (\vartheta - \sin \theta) \cos \alpha_1 - S_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1]u + [S_1^2 (\vartheta - \sin \theta) \cos \alpha_2 + S_2^2 \cos \theta \sin \alpha_2]v}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (25)$$

在第一种情况下,出射面上衍射光 S 的光强分布可以表示成

$$S_0(W_{R'}, v, y) = -j\kappa_0 \exp[-jag(W_{R'}, v)] \int_{r_A}^0 R_0[r', f(r'), y] \exp(jar') \times J_0 \{ 2\kappa_0 \sqrt{[r' - g(W_{R'}, v)][f(r') - h(W_{R'}, v)]} \} dr', \quad (26)$$

其中 $r_A = W_{R'}(R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1 - R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_1) / \sin 2\theta_0$ 。

在第二种情况下,边界④分在 B 和 C 两个不同区域上,出射面上衍射光 S 的光强分布可以表示成

当 $\frac{R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1 - R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_1}{R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_2 + R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_2} W_{R'} < v < \frac{S_1^2 (\sin \theta - \vartheta) \cos \alpha_1 + S_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1}{S_1^2 (\vartheta - \sin \theta) \cos \alpha_2 + S_2^2 \cos \theta \sin \alpha_2} W_{R'}$,

$$S_0(W_{R'}, v, y) = -j\kappa_0 \exp[-jag(W_{R'}, v)] \int_{f^{-1}[h(W_{R'}, v)]}^0 R_0[r', f(r'), y] \exp(jar') \times J_0 \{ 2\kappa_0 \sqrt{[r' - g(W_{R'}, v)][f(r') - h(W_{R'}, v)]} \} dr', \quad (27)$$

当 $v < \frac{R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_1 - R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_1}{R_2^2 \cos \theta \sin \alpha_2 + R_1^2 \sin \theta \cos \alpha_1} W_{R'}$

$$S_0(W_{R'}, v, y) = -j\kappa_0 [-jag(W_{R'}, v)] \int_{f^{-1}[h(W_{R'}, v)]}^{g(W_{R'}, v)} R_0[r, f(r'), y] \exp(jar') \times J_0 \{ 2\kappa_0 \sqrt{[r' - g(W_{R'}, v)][f(r') - h(W_{R'}, v)]} \} dr'. \quad (28)$$

衍射光在出射面 $u=W_{R'}$ 处的功率为

$$P_d = \alpha \int_{-W_{S'}/2}^{W_{S'}/2} dy \int_0^{W_{S'}} |S_0(W_{R'}, v, y)|^2 dv, \quad (29)$$

这里 α 为比例系数。

再现时,我们假定再现光光束 R 始终从边界 ① 的中点处入射,那么再现光光束 R 的复振幅在 xyz 坐标系下的分布 R_0 可以表示成

$$R_0(x, y, z) = \exp\left[-\frac{(x \sin \theta + z \cos \theta + W_{R'}/2)^2 + y^2}{w_r^2}\right], \quad (30)$$

这里 w_r 为再现时再现光光束 R 的高斯半宽度。有了方程(30),根据坐标变换,再现光光束 R 的复振幅在 rsy 和 uvy 坐标系下的分布将能够很容易确定。

因为入射光的功率

$$P_i = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |R_0(u, y)|^2 du = \frac{\alpha \pi w_r^2}{2}, \quad (31)$$

故衍射效率可以表示为

$$\eta = \frac{P_d}{P_i} = \frac{2P_d}{\alpha \pi w_r^2}, \quad (32)$$

3 模拟计算和讨论

这一节利用第 2 节推导的数学模型来探讨衍射

效率随折射率变化量、再现光高斯半宽度的关系以及 ee 型体全息光栅的波长选择性和角度选择性。讨论中选用的各参量为:LiNbO₃ 晶体的寻常光折射率 $n_o=2.287$,异常光折射率 $n_e=2.2$,记录时采用光波的波长为 $\lambda_0=0.6328 \mu\text{m}$ 的有限宽度的平面光波,角度 $\theta_0=15^\circ$ 。以下各图中曲线 a 表示记录时参考光 R' 、物光 S' 的宽度均为 $2000\lambda_0$;曲线 b 表示记录时参考光 R' 、物光 S' 的宽度均为 $1500\lambda_0$;曲线 c 表示记录时参考光 R' 、物光 S' 的宽度均为 $1000\lambda_0$ 。

3.1 衍射效率随折射率变化量的关系

图 4 中,曲线 a 的再现光 R 的高斯半宽度为 $w_r=400\lambda$,曲线 b 为 $w_r=300\lambda$,曲线 c 为 $w_r=200\lambda$;再现时完全满足布拉格条件入射,即再现光波长 $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$,入射角 $\theta=15^\circ$ 。从图 4(a)可以看出,LiNbO₃ 晶体中 ee 型体全息光栅的衍射效率并不会随着折射率调制量 ϵ_m 的增加而一直增加,当达到某一值时,衍射效率会达到最大值, ϵ_m 继续增加,衍射效率反而会急剧下降。对于不同宽度的记录光束而言,使衍射效率达到最大值的 ϵ_m 不同,宽度越小,所需的折射率调制量 ϵ_m 越大。图 4(b)为图 4(a)的局部放大图,由图可见在记录条件一定的情况下,情况 a 所需的最佳折射率调制量 $\epsilon_m=8.2 \times 10^{-5}$,情

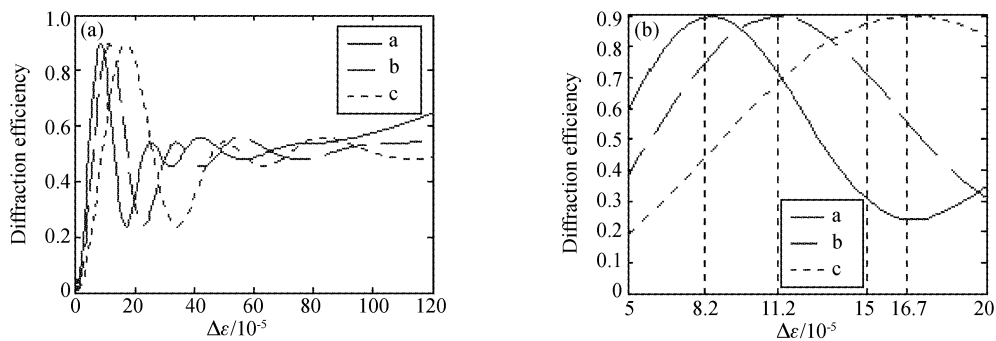


Fig. 4 The relation between the diffraction efficiency η and the index modulation ϵ_m .

(a) Total figure, (b) local zoom figure

况 b 所需的最佳折射率调制量 $\epsilon_m = 11.2 \times 10^{-5}$, 情况 c 所需的最佳折射率调制量 $\epsilon_m = 16.7 \times 10^{-5}$ 。衍射效率与记录条件紧密相关, 并不是折射率调制量 ϵ_m 越大越好。图 4 中的各种情况, 衍射效率能够达到的最大值基本相同, 均约为 90%, 并不是 ee 型布拉格衍射在理论上能够达到的最大衍射效率。通过改变除角度 θ_0 以外的各种参量, 如折射率调制量 ϵ_m 、记录时参考光 R' 和物光 S' 的宽度、再现光 R 的高斯半宽度 w_r , 并通过这些参量的不同组合来计算衍射效率, 可以发现, 只要角度 θ_0 相等, 不同组合下能够达到的最大衍射效率基本相同, 但是当角度 θ_0 改变, ee 型布拉格衍射能够达到的最大衍射效率是不同的。例如, 当 $\theta_0 = 10^\circ$, $\lambda = \lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$, $\epsilon_m = 8.2 \times 10^{-5}$ 、记录时参考光 R' 、物光 S' 的宽度均为 $1500\lambda_0$ 、再现光 R 的束腰半径 $w_r = 300\lambda$, 衍射效率是 100%。当 $\theta_0 = 20^\circ$ 时, 无论如何改变其它参量, ee 型布拉格衍射能够达到的最大衍射效率均是 72.4%。这也就是说, ee 型布拉格衍射在理论上能够达到的最大衍射效率由记录时入射角 θ_0 决定, 而且角度 θ_0 越大, 能够达到的最大衍射效率越小, 在角度 θ_0 较小时, ee 型布拉格衍射的衍射效率在理论上可以达到 100%。图 4 还显示了一个重要信息: 在 LiNbO_3 晶体中, 由于电光张量中的 r_{33} 分量比 r_{13} 分量大 3 倍多, 而 r_{33} 分量只对 e 光起作用, r_{13} 分量只对 o 光起作用, 所以 ee 型布拉格衍射在充分利用 r_{33} 分量后, 能够在折射率调制量 ϵ_m 较小的情况下获得较高的衍射效率[如图 4(a)所示]。

3.2 ee 型体全息光栅的波长选择性和角度选择性

图 5 和图 6 中曲线 a 表示折射率调制量 $\epsilon_m = 8.2 \times 10^{-5}$, 束腰半径 $w_r = 400\lambda$, 曲线 b 表示折射率调制量 $\epsilon_m = 11.2 \times 10^{-5}$, 束腰半径 $w_r = 300\lambda$, 曲线 c 表示折射率调制量 $\epsilon_m = 16.7 \times 10^{-5}$, 束腰半径 $w_r = 200\lambda$ 。在讨论波长选择性时, 假设入射光满足布拉格角入射, 而在讨论角度选择性时, 假设入射光

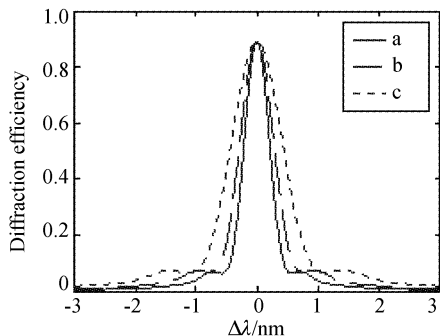


Fig. 5 The wavelength selectivity

的波长等于记录光的波长。从图 5 和图 6 可以看出, ee 型体全息光栅的布拉格衍射具有很好的波长选择性和角度选择性。当再现光偏移布拉格角或布拉格波长时, 衍射效率急剧下降, 达到第一个极小值后, 衍射效率会略微增加, 最后缓慢趋近于零。另外, 增大折射率调制量 ϵ_m 虽然可以降低达到衍射效率的最大值所需要的记录光束的宽度(即降低光栅区的大小), 但是波长选择性和角度选择性会变差。这一特点说明, 如果一味地增大折射率调制量 ϵ_m 以追求小的光栅区大小, 可能会严重丧失体全息光栅的优点——灵敏的波长选择性和角度选择性。

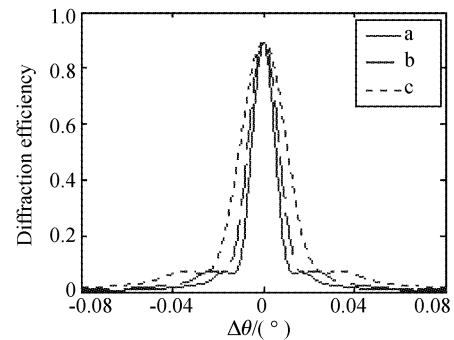


Fig. 6 The angular selectivity

3.3 衍射效率与再现光束腰半径的关系

在图 7 中, 曲线 a 表示折射率调制量 $\epsilon_m = 8.2 \times 10^{-5}$, 曲线 b 表示折射率调制量 $\epsilon_m = 11.2 \times 10^{-5}$, 曲线 c 表示折射率调制量 $\epsilon_m = 16.7 \times 10^{-5}$ 。图 7 反映出, 折射率调制量越大, 所需要的光栅区越小, 也就是说, 所需要的记录光的宽度越小, 此时再现光的束腰半径也必须更小, 基本上等于记录光束腰半径的 1/5。其原因是, 当再现光束腰半径太小时, 光束的频谱很宽, 过多的频谱分量不满足布拉格入射条件, 从而降低了衍射效率。当再现光束腰半径太大时, 就会造成部分光没有与光栅区作用, 不能产生衍射光, 也就降低了衍射效率。对于小的光栅区, 虽然

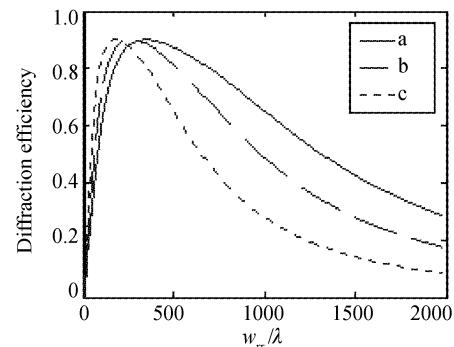


Fig. 7 The relation between the diffraction efficiency and the Gaussian-half-width of reconstruction light

再现光的束腰半径更小,频谱宽,但是由于折射率调制量大,使得满足布拉格入射条件的再现光仍然能获得足够的衍射作用,其效果比加大再现光宽度的作用更好。

结论 本文建立了高斯光束在单轴晶体中的耦合波模型,通过该模型预测了,在理论上 LiNbO_3 晶体中的 ee 型布拉格衍射能够达到的最大衍射效率由记录时入射角 θ_0 决定,而且角度 θ_0 越大,能够达到的最大衍射效率越小,在角度 θ_0 较小时,ee 型布拉格衍射的衍射效率在理论上可以达到 100%。而且 ee 型布拉格衍射具有很好的波长选择性和角度选择性。通过分析可以发现,仅仅依靠增大折射率调制量 ϵ_m 并不一定能够得到高衍射效率、灵敏的波长选择性和角度选择性。衍射效率和光栅区的大小、再现光的束腰半径(近似等于记录光宽度的 1/5)紧密相连。如果改变记录光波长进行模拟计算,还可以发现光栅区的大小是波长的相对值,它与波长的大小无关。也就是说,如果使用更短的波长($\lambda_0 = 0.514 \mu\text{m}$),以同样的光栅相对大小,可以获得相同的衍射效率。此外,在实际情况中,折射率调制量 ϵ_m 随 $\text{Fe}:\text{LiNbO}_3$ 晶体的掺杂(Fe)浓度的增加而增加^[10],但是其极限值是 $\epsilon_m = 7 \times 10^{-4}$,继续增加掺杂浓度反而会导致折射率调制量下降^[11]。而且, $\text{Fe}:\text{LiNbO}_3$ 晶体中记录的体光栅是电子光栅,它在常温下是不稳定的,必须采取某种固定措施,最常用的是热固定。对于热固定,在高掺杂的情况下,固定效率非常低,从而大大降低了固定后光栅的衍射效率,要获得较高的固定效率,必须是低掺杂^[12~14]。这一特点极大的阻碍了 $\text{Fe}:\text{LiNbO}_3$ 晶体中体光栅的应用,而 ee 型布拉格衍射无疑是提供了一种在较低的折射率调制量下获得较高衍射效率的途径。

参 考 文 献

- Gaylord T K, Moharam M G. Analysis and applications of optical diffraction by gratings. *Proc. IEEE*, 1985, **73**(6): 894~937
- Kogelnik H. Coupled wave theory of thick holograms gratings. *The Bell. Syst. Technol. J.*, 1969, **48**(9): 2909~2947
- Solymar L, Jordan M P. Two-dimensional transmission type volume holograms for incident plane waves of arbitrary amplitude distribution. *Opt. and Quant. Electron.*, 1977, **9**: 437~444
- Moharam M G, Gaylord T K, Magnusson R. Diffraction characteristics of three-dimensional crossed-beam volume gratings. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **70**(4): 437~442
- Moharam M G, Gaylord T K. Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, **71**(7): 811~818
- Glytsis E N, Gaylord T K. Rigorous three-dimensional coupled-wave diffraction analysis of single and cascaded anisotropic gratings. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1987, **4**(11): 2061~2078
- Jarem J M, Banerjee P P. Exact, dynamical analysis of the Kukhtarev equations in photorefractive barium titanate using rigorous coupled-wave diffraction theory. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(4): 819~831
- Chen-Wen Tarn. Gaussian-beam profile deformation via anisotropic photorefractive gratings formed by diffusive, photovoltaic and drift mechanisms; a system transfer function approach. *Opt. Engng.*, 1998, **37**(1): 229~236
- Guo Dunren. *Mathematical Method of Physics* (数学物理方法). Beijing: People's Education Press, 1978. 428~433 (in Chinese)
- Li Xiaochun, Wu Minxian. Theoretical study of dynamical scope in photorefractive crystal in the volume holographic storage system. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1997, **17**(9): 1209~1215 (in Chinese)
- Peithmann K, Buse K, Krätzig E. Photorefractive properties of highly iron- or copper-doped lithium niobate crystals. *OSA TOPS*, 1999, **27**: 50~53
- Yariv K, Orlov S S, Rakuljic G A. Holographic store dynamics in lithium niobate: theory and experiment. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1996, **13**(11): 2513~2523
- Liu Bo, Liu Liren, Xu Liangying. Characteristics of thermal fixing of photorefractive holograms in lithium niobate. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1999, **19**(7): 941~947 (in Chinese)
- Jiang Zhuqing, Song Xuehua, Tao Shiquan. Optimum researches on characteristics of thermal fixing of volume holograms in photorefractive crystal. *Chin. J. Lasers* (中国激光), 2001, **28**(2): 160~164 (in Chinese)
- Liu Simin, Guo Ru, Ling Zhenfang. *Photorefractive Nonlinear Optics* (光折变非线性光学). Beijing: Chinese Standard Press, 1992. 136 (in Chinese)