

文章编号: 0253-2239(2003)09-1143-6

模式正交性对哈特曼-夏克传感器 波前测量等的影响

段海峰 李恩得 王海英 杨泽平 张雨东
(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

摘要: 分析了哈特曼-夏克波前传感器采用模式法重构波前相位算法的数学模型, 仿真实验了重构模式之间不正交对重构精度的影响, 指出模式之间的不正交不影响算法的实现。在哈特曼-夏克传感器应用模式法进行波前测量和波前校正的过程中, 模式之间的正交性并不是算法实现的必要条件, 正交化处理算法对波前重构、波前校正精度的提高没有影响。

关键词: 自适应光学; 哈特曼-夏克传感器; 正交; 模式重构; 波前校正
中图分类号: TP202 文献标识码: A

1 引 言

哈特曼-夏克(Hartmann-Shack, H-S)波前传感器已被广泛应用于自适应光学系统、激光光束质量诊断、光学元件和光学系统检测、大气扰动测量等诸多领域^[1~3]。哈特曼-夏克测量的是波前相位斜率, 需要经过波前复原求出相位值, 复原的方法主要有区域法^[4]和模式法两类^[5]。在模式法中, 由于泽尼克(Zernike)多项式的圆域正交性, 并且其各阶模式与光学设计中的赛德尔(Sedel)像差(如: 离焦、像散、彗差等)系数相对应, 因此在圆瞳孔径上常用其作为正交基进行波前重构。而且, 各模式项之间的正交性也被认为是进行模式重构的条件, 因此, 对于非圆瞳光学系统, 由于泽尼克多项式的非正交性, 认为不能再用它进行波前模式重构, 针对环形孔、方形孔提出了泽尼克-塔蒂安(Zernike-Tatian)^[6]、泽尼克-马哈詹(Zernike-Mahajan)^[7]、勒让德(Legendre)^[8]多项式进行模式重构。基于算法通用性的考虑, 文献[9]应用线性代数理论, 根据泽尼克多项式在非圆域上格拉姆(Gram)矩阵的性质选择其阶项, 使其彼此线性无关, 然后通过格拉姆矩阵的正交分解或格拉姆-施密特(Gram-Schmidt)正交化方法, 构造一组正交基矢量, 从而实现任意形状孔径上的光束波前模式重建及泽尼克多项式描述。同样基于线性变换的方法, 文献[10]在自适应光学波前

校正算法的研究中提出了本征模式法, 实现变形反射镜驱动器影响函数模式的正交化, 并以其作为自适应光学系统的波前校正模式。

本文通过分析基于波前斜率信息的模式重构、模式校正算法的数学过程, 以及模式项正交化前后波前重构、校正的数学表达式之间的关系, 认为模式重构过程是基于测量斜率的最小二乘拟合过程, 模式之间的正交性并不是算法实现的充分必要条件, 模式项正交化前后波前求解结果是完全等价的, 并通过仿真分析、实验结果验证了模式之间不正交对波前重构和波前校正的影响。

2 波前模式重构的数学基础

在单位圆 $R(r \leq 1)$ 上, 一个完整的波前 $\phi(x, y)$ 可以用泽尼克多项式展开:

$$\phi(x, y) = \sum_{k=1}^l a_k \cdot z_k(x, y), \quad (1)$$

式中 l 为模式数; a_k 为第 k 项泽尼克多项式系数; z_k 为第 k 项泽尼克多项式。上式一般不存在通常意义下的解, 即对任何 l 维向量 \mathbf{a} ,

$$\phi(x, y) - \sum_{k=1}^l a_k \cdot z_k(x, y) \neq 0. \quad (2)$$

因此需用最小二乘准则求系数向量 \mathbf{a} , 即

$$\iint_R [\phi(x, y) - \sum_{k=1}^l a_k \cdot z_k(x, y)]^2 dx dy \rightarrow \min. \quad (3)$$

应用求极值的方法, 对上式取 a_k 的偏导数, 令其等于 0, 从而导出线性方程

$$\begin{pmatrix} (Z_1, Z_2) & (Z_1, Z_2) & \dots & (Z_1, Z_l) \\ (Z_2, Z_2) & (Z_2, Z_2) & \dots & (Z_2, Z_l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Z_l, Z_1) & (Z_l, Z_2) & \dots & (Z_l, Z_l) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_1, \phi) \\ (Z_2, \phi) \\ \vdots \\ (Z_l, \phi) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

式中 $(Z_i, Z_j) = \iint_{\kappa} Z_i(x, y) Z_j(x, y) dx dy.$ (5)

当重构多项式 $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_l)$ 彼此线性无关时, 由上式可得(1) 式的最小二乘解

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_1, Z_2) & (Z_1, Z_2) & \dots & (Z_1, Z_l) \\ (Z_2, Z_2) & (Z_2, Z_2) & \dots & (Z_2, Z_l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Z_l, Z_1) & (Z_l, Z_2) & \dots & (Z_l, Z_l) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (Z_1, \phi) \\ (Z_2, \phi) \\ \vdots \\ (Z_l, \phi) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

特别的, 由于泽尼克多项式在单位圆上彼此正交, 重构系数根据(6) 式可由下式求得

$$a_k = \frac{\iint_{\kappa} \phi(x, y) z_k(x, y) dx dy}{\iint_{\kappa} z_k(x, y) z_k(x, y) dx dy}. \tag{7}$$

在非圆域, 泽尼克多项式彼此不正交, 但只要多项式在给定区域彼此线性无关, (6) 式仍成立。

在实际测量中, 哈特曼-夏克传感器测量的是波前两个正交方向的斜率, 待求的是波前的相位, 无法根据(1) 式建立二者的直接联系, 于是对(1)式取偏导数, 得

$$\left. \begin{aligned} G_x(x, y) &= \sum_{k=1}^l a_k \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \\ G_y(x, y) &= \sum_{k=1}^l a_k \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

其中 G_x 、 G_y 分别为 x 、 y 方向上的波前斜率。

针对哈特曼-夏克采样是离散的, 对每个子孔径区域内斜率平均采样的特点, 模式重构是根据每一模式项在子孔径区域的平均斜率建立子孔径斜率向量与模式系数向量的线性关系^[11]:

$$G = Z \cdot A \tag{9}$$

利用测得波前相位斜率向量 G , 用奇异值分解法求出的波前重构矩阵 Z 的广义逆 Z^+ , 就可以求出最小二乘意义下的模式函数系数向量 A

$$A = Z^+ \cdot G. \tag{10}$$

上式的数学意义是使

$$\|G - ZA\|^2 \rightarrow \min. \tag{11}$$

上式为(3) 式的离散形式, 两式的最小二乘准则本质上是相同的, 根据(3) 式~ (6) 式最小二乘法的求解过程, 模式项之间线性无关是最小二乘拟合的条件, 正交仅仅是线性无关的特例。而由(8) 式~

(10) 式模式法的求解过程可以看出, 模式法进行波前重构的实质是建立各模式斜率项在空间采样点的斜率值与测量的斜率间的关系, 根据(11) 式确定的准则求出各模式项系数的最小二乘解, 然后由(1) 式重构出波前。整个求解过程中, 基于正交条件的最小二乘系数求解过程即(2) 式在重构算法中没有发挥作用, 模式法的数学基础是以(11) 式为准则的最小二乘求解过程, 当重构模式不正交但线性无关时, 重构算法依然成立。

分析文献[9] 和文献[10] 在波前重构、波前校正中的正交化算法, 其数学本质是将在给定区域不正交的模式项 $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ 作一次线性变换, 即

$$B = ZQ. \tag{12}$$

使 $B = (B_1, B_2, \dots, B_m)$ 在给定区域正交。由线性代数理论及最小二乘算法的要求, 不正交的模式项 Z 是线性无关的, 则变换矩阵 Q 是满秩矩阵, 分别用模式项 Z 和 B 代入(8) 式~ (9) 式, A 、 C 代表模式系数, 重构过程为

$$\left. \begin{aligned} G &= Z_R \cdot A, & A &= Z_R^+ \cdot G, \\ G &= B_R \cdot C, & C &= B_R^+ \cdot G, \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

其中 Z_R 、 B_R 是由多项式 Z 、 B 生成的重构矩阵, A 、 C 为待求的模式向量, 上标+ 表示广义逆。因 $B_R = Z_R \cdot Q$ 代入上式, 由广义逆矩阵理论^[12]

$$C = B_R^+ \cdot G = Q^+ Z_R^+ \cdot G = Q^+ A. \tag{14}$$

则被测波前的两种模式表示的关系为

$$\phi = BC = ZQQ^+ A = ZA. \tag{15}$$

由(13) 式~ (15) 式可以看出, 通过线性变换实现正交化与不进行正交化进行模式重构的区别仅在于一次矩阵变换和反变换, 二者的波前表示是等价的。

3 仿真及实验分析

3.1 仿真实验: 正交性对模式重构精度的影响

哈特曼-夏克传感器采用泽尼克模式进行波前重构时, 存在模式像差的耦合及混淆问题, 影响重构精度。长期以来认为是由于泽尼克偏导函数的不完全正交性以及空间采样带宽的有限性引起的^[13, 14]。根据上面的分析, 模式之间正交性不影响重构算法实现, 因此正交性不会对重构精度产生大的影响。我们选用前 10 阶泽尼克多项式和 5 项三角函数作为重构模式, 三角函数的表达式为

$$B(x, y) = A \cos 2\pi(f_x x + f_y y),$$

$$f_x = f_y = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

由于前 10 项与后 5 项是不正交的, 根据 (7) 式, 模式重构的系数解耦过程必然存在模式混淆问题, 从而影响重构精度。在单位圆上, 哈特曼-夏克采样点选为 8×8 , 图 1 是依据 (8) 式~ (10) 式分别以 15 阶多项式为入射波前进行重构的重构精度, 重构精度定义为拟合残差均方根与原始波前均方根之比, 如下式

$$\beta_{\text{recon},j} = \frac{\sqrt{\iint [Z_j(x, y) - \varphi_{\text{recon},j}(x, y)]^2 dx dy}}{\sqrt{\iint Z_j^2(x, y) dx dy}}, \quad (17)$$

式中 Z_j 为原始波前, $\varphi_{\text{recon},j}$ 为重构波前。 $\beta_{\text{recon},j}$ 反映了重构波前与原始波前的差异程度, $\beta_{\text{recon},j}$ 越小, 表示重构精度越高。图 2 是以前 15 阶泽尼克多项式为入射波前进行重构的精度, 由仿真结果可以看出, 圆域 8×8 点阵的哈特曼-夏克对正交模式和非正交模式项的重构精度相当, 重构模式项不正交对重构精度影响很小。

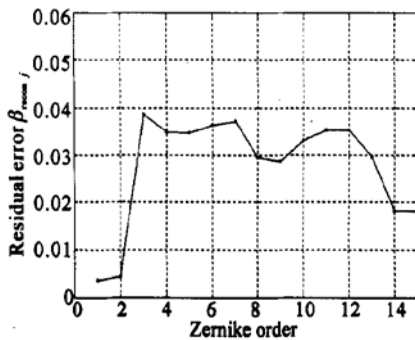


Fig. 1 Residual errors for the non-orthogonality reconstruction mode



Fig. 2 Residual errors for the orthogonality reconstruction mode (Zernike mode)

3.2 非圆域模式重构波前测量实验

泽尼克多项式在方形孔径上彼此不再正交, 我们分别仿真计算了直接采用泽尼克多项式和文献[9]提出的对泽尼克多项式正交化处理得到的一组正交多项式进行模式重构的精度[由(17)式定义], 仿真中以前 35 阶泽尼克多项式表示入射波前。哈特曼-夏克的子孔径数为 10×10 , 图 3 是直接采用泽尼克多项式进行模式重构的精度, 图 4 是采用文献[9]的算法进行模式重构的精度。两种算法的重构精度完全相同, 这表明在方形孔径上采用泽尼克多项式进行模式重构, 是否作正交化变换对波前重构精度无影响。



Fig. 3 Residual errors for the first 35 Zernike modes using Zernike modal algorithm



Fig. 4 Residual errors for the first 35 Zernike modes using orthogonalizing algorithm

图 5、图 6 是对两块像差板分别用 10×10 子孔径哈特曼-夏克与干涉仪的实测波前结果, 哈特曼-夏克的重构算法分别直接采用泽尼克多项式和正交化算法进行模式重构, 两种方法的重构波前结果完全相同, 如图 5(a) 和图 6(a) 所示, 图 5(b) 和图

6(b) 是干涉仪的测量结果, 图 5(c) 和图 6(c) 图是两测量结果对应坐标位置的相位值相减的结果。实验结果表明虽然泽尼克多项式在方形区域不再正交, 但用它作模式基底进行波前测量是可行的。

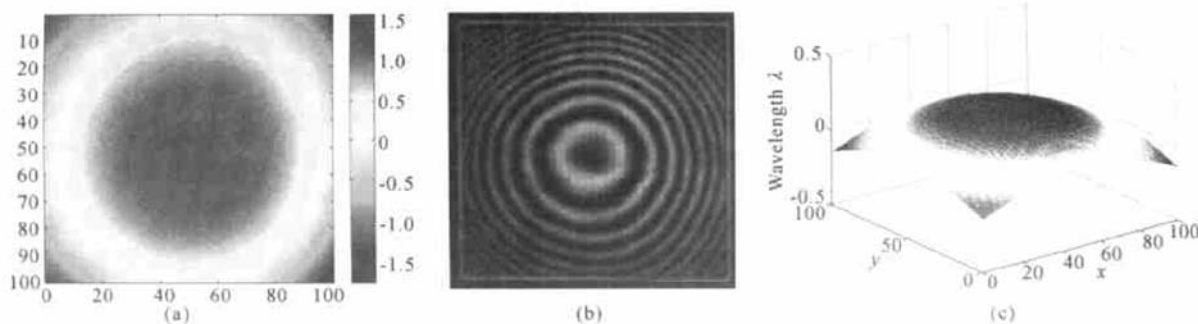


Fig. 5 The wavefront measured by (a) Hartmann-Shack sensor ($PV = 3.339 \lambda$, $RMS = 0.657 \lambda$) and (b) interferometer ($PV = 3.336 \lambda$, $RMS = 0.723 \lambda$, $PTS = 18251$). (c) The residual error of wavefront measured by Hartmann-Shack compared with ZYGO interferometer. ($PV = 0.342 \lambda$, $RMS = 0.068 \lambda$)

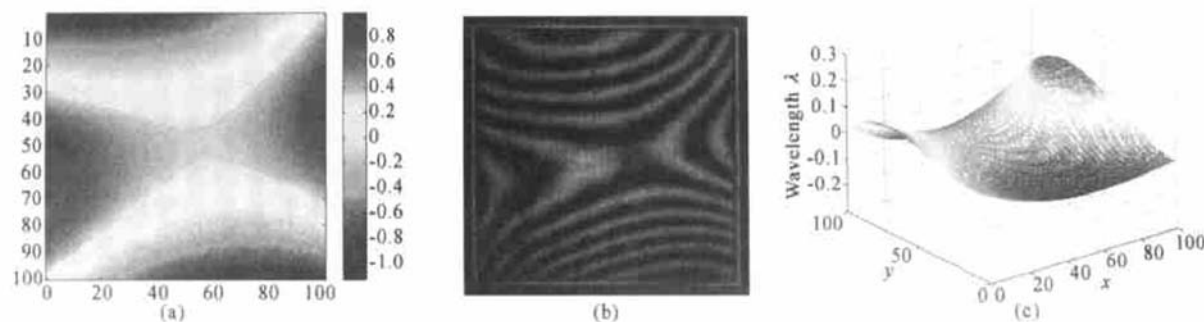


Fig. 6 The wavefront measured by (a) Hartmann-Shack sensor ($PV = 2.133 \lambda$, $RMS = 0.459 \lambda$) and (b) interferometer ($PV = 2.160 \lambda$, $RMS = 0.436 \lambda$, $PTS = 18414$). (c) The residual error of wavefront measured by Hartmann-Shack compared with interferometer. ($PV = 0.432 \lambda$, $RMS = 0.0474 \lambda$)

泽尼克模式在环形区域上也是不正交的, 文献 [15] 通过数值仿真, 结果也表明无需对泽尼克多项式作正交化处理, 直接利用它进行模式重构, 测量结果是可靠的。

3.3 正交性对自适应光学系统波前校正的影响

1990 年 Wenhan Jiang 等^[16] 和 Boyer 等^[17] 几乎同时提出直接斜率法, 用于自适应光学系统中的波前复原, 即利用哈特曼-夏克波前传感器测量的入射波前相位斜率, 直接解耦变形镜各驱动器控制电压。将直接斜率法与模式法波前重构进行比较, 可以看出直接斜率法的电压解耦与模式法波前重构的多项式系数求解相同, 变形镜所有驱动器影响函数是模式系列, 控制电压则是模式系数。由于各驱动器影响函数存在交联, 因此它们必定彼此不正交。我们选用图 7 所示的 45 单元变形镜与 10×10 子孔径哈特曼-夏克布局匹配方式, 分别采用直接斜率法和文

献 [10] 的本征模法仿真分析系统对前 65 阶泽尼克多项式像差的波前校正精度 [由 (17) 式定义, Z_j 为原始波前, $\varphi_{\text{recon},j}$ 为变形镜拟合波前], 图 8 是直接斜率法的拟合精度, 图 9 是本征模法的拟合精度, 结果表明两种算法的拟合精度完全一致, 正交化处理对提高变形镜波前拟合能力未产生作用。

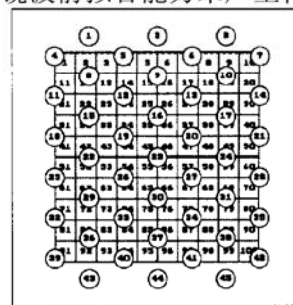


Fig. 7 The arrangement of deformable mirror (DM) and Hartmann-Shack sensor actuators

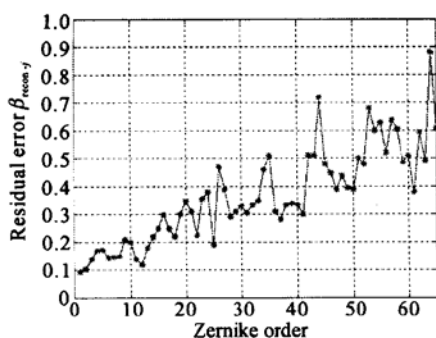


Fig. 8 Fitting residual error of the first 65 Zernike modes using direct-gradient algorithm

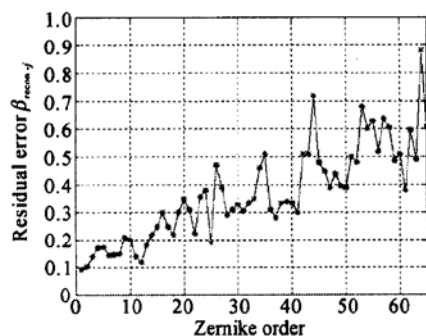


Fig. 9 Fitting residual error of the first 65 Zernike modes using eigen-mode algorithm

结论 评价模式重构的标准是测量精度, 本文分析了基于斜率测量的哈特曼-夏克波前传感器, 采用模式法重构波前相位算法的数学基础, 通过仿真分析和实验验证了重构模式之间不正交对波前测量、波前校正精度的影响, 结果表明模式之间不正交对波前重构与波前校正的精度影响很小。这样哈特曼-夏克波前传感器采用模式法进行波前测量、自适应光学系统波前校正的模式选取时, 只需保证重构模式彼此线性无关, 我们就可以弱化对模式正交性的要求, 针对被测对象的特性选择有效的数学模型, 加强重构模式对被测波前描述的完备性研究。

参 考 文 献

- Jiang Wenhan, Wang Chunhong, Ling Ning. 61 Element adaptive optical system. *Chin. J. Quant. Electron.* (量子电子学报), 1998, **15**(2): 193~ 199 (in Chinese)
- Li Xinyang, Jiang Wenhan, Wang Chunhong *et al.*. Analysis of an adaptive control algorithm used in an adaptive optical system. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2001, **21**(3): 283~ 289 (in Chinese)
- Rao Changhui, Jiang Wenhan, Ling Ning. Atmospheric parameters measurements for non-Kolmogorov turbulence with a Shack-Hartmann wave-front sensor. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2000, **20**(9): 1201~ 1207 (in Chinese)
- Southwell W H. Wave-front estimation from wave-front slope measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, **70**(8): 998~ 1006
- Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3): 207~ 211
- Swantner W H, Lowrey W H. Zernike-Tatian polynomials for interferogram reduction. *Appl. Opt.*, 1980, **19**(1): 161~ 163
- Mahajan V N. Zernike annular polynomials for imaging systems with annular pupils. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, **71**(1): 75~ 85
- Rayces J L. Least-squares fitting of orthogonal polynomials to the wave-aberration function. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(13): 2223~ 2228
- Duan Haifeng, Yang Zeping, Wang Shuqing *et al.*. Model wavefront reconstruction of Shack-Hartmann sensor on arbitrary area and wavefront expression by Zernike polynomials. *Chin. J. Lasers* (中国激光), 2002, **A29**(6): 517~ 520 (in Chinese)
- Gaffard J P, Ledanois G. Adaptive optical transfer function modeling. *Proc. SPIE*, 1991, **1542**: 34~ 45
- Xian Hao, Li Huagui, Jiang Wenhan. Measurement of the wavefront phase of a laser beam with Hartmann-Shack sensor. *Opto-Electronic Engineering* (光电工程), 1995, **22**(2): 38~ 45 (in Chinese)
- Wang Songgui, Yang Zhenhai. *Generalized Inverse Matrix Theory and Application* (广义逆矩阵及应用). Beijing: Beijing Industry University Press, 1996. 118~ 121 (in Chinese)
- Herrmann J. Cross coupling and aliasing in modal wavefront estimation. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, **71**(8): 989~ 992
- Zhou Renzhong, Yan Jixiang, Yu Xin *et al.*. *Adaptive Optics* (自适应光学). Beijing: National Defense Industrial Press, 1996
- Zhang Qiang, Lu Baida, Jiang Wenhan. Zernike modal wavefront reconstruction for annular field. *High Power Laser and Particle Beams* (强激光与粒子束), 2000, **12**(3): 306~ 310 (in Chinese)
- Zhang Qiang, Xu Bing, Jiang Wenhan. Optimum matching of wave-front sensor and wave-front corrector for annular beam. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1999, **19**(3): 386~ 389 (in Chinese)
- Boyer C, Vincent M, Gerard R. Adaptive optics: interaction matrix measurements and real time control algorithms for COME-ON project. *Proc. SPIE*, 1990, **1271**: 63~ 81

The Effect of Mode Orthogonality on Precision of Wavefront Measurement and Correction Using Hartmann-Shack Sensor

Duan Haifeng Li Ende Wang Haiying Yang Zeping Zhang Yudong
(*Institute of Optics & Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209*)
(Received 20 May 2002; revised 17 August 2002)

Abstract: The mathematic model of modal wavefront reconstruction using Hartmann-Shack (H-S) wavefront sensor is analysed. The effect of non-orthogonality of the mode on the reconstruction precision is simulated, and it is indicated that the non-orthogonality does not affect the use of modal algorithm. The conclusion is that the mode orthogonality is not a necessary condition in the course of wavefront measurement and correction using Hartmann-Shack sensor, and the orthogonalizing algorithm cannot improve the measurement and correction precision in Hartmann-Shack sensor and adaptive system.

Key words: adaptive optics; Hartmann-Shack wavefront sensor; orthogonality; modal wavefront reconstruction; wavefront correction

告《光学学报》投稿者

今年以来,《光学学报》来稿量翻番,而发表容量基本不变,造成《光学学报》的发表周期过长。为了尽快缩短发表周期,提升《光学学报》的学术质量,从现在开始,大幅度提高录用水准,把《光学学报》办成刊登优质学术论文的品牌期刊。

录用的具体要求如下:

- 1) 创新性明显: 物理思想新或所用方法新,结果新;
- 2) 可信性强: 研究背景交代清楚,引用相应文献完整;
- 3) 实验数据丰富完整,详实可靠;理论分析参量、假设条件已清楚列出;
- 4) 理论分析详尽,深入透彻;并曾从多方面加以考虑、验证过;研究内容足以证明结论;
- 5) 研究结果具有足够的学术价值和普遍意义,在本分支学科或光学领域将会有一定影响;
- 6) 论文撰写条理清楚,重点突出,语言简洁,篇幅适中,摘要、关键词、字符、公式书写、图表、参考文献等均符合《光学学报》征稿简则中所载明的10项要求。

《光学学报》编辑部
2003年9月20日