

文章编号: 0253-2239(2003)08-0906-4

非线性李相干态的光子统计性质*

宋同强 诸跃进

(宁波大学物理系, 宁波 315211)

摘要: 利用 f 振子的湮没算符和产生算符的逆算符的性质, 得到了 $SU(1,1)$ 李代数的两个双模非厄密实现, 在此基础上引入了两种非线性李相干态, 并讨论了它们的光子统计性质和相位特性。

关键词: 量子光学; f 振子; 非线性李相干态; 非经典效应

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

1 引 言

多年来, 量子群及其代数结构一直是物理学家和数学家广泛关注的问题。从数学上讲, 量子代数形式上是一种准三角的霍普夫(Hopf)代数。在物理上, 将量子群用于研究具体的物理问题, 也取得了一些进展。例如, 将量子群 $SU_q(2)$ 的一个实现(即 q 变形振子), 唯象地用于双原子分子的振动-转动谱、双原子分子的离解能、变形核的振动-转动谱^[1,2] 等方面, 取得了一定的进展。 q 变形振子是一种特殊的非线性振子, 其振荡频率是振幅的双曲函数。所谓 f 振子, 实际上是 q 变形振子的简单推广, 其振荡频率是振幅的任意函数。

最近, de Matos Filho 和 Vogel^[3] 发现当囚禁原子或离子的运动区域远小于激光波长[即兰姆-迪克(Lamb-Dicke)极限]时, 其质心运动可以用非线性相干态 $|f, \alpha\rangle$ 描述。和通常的相干态的定义类似, 非线性相干态 $|f, \alpha\rangle$ 是算符 $f(N)a$ 的本征态, 其中 a 是通常的谐振子的湮没算符, 算符函数

$$f(k) = L_k^i(\eta^2)[(k+1)L_k^0(\eta^2)]^{-1},$$

这里, η 是兰姆-迪克参量, $L_k^i(x)$ 是缔合拉盖尔(Laguerre)多项式。这一重要的研究发现极大地激发了人们对各种非线性量子态的研究兴趣, 分别研究了奇偶非线性相干态的相位特性和各种非经典效应^[4~6]。最近, 我们讨论了非线性压缩态和非线性 $SU(1,1)$ 相干态的量子统计性质^[7,8]。结果表明, 它们的相位特性和量子统计性质非常敏感地依赖兰姆-迪克参量, 与通常的奇偶相干态、压缩态、 $SU(1,1)$

相干态相比有非常大的区别。在本文中, 将研究非线性李相干态的光子统计性质和相位特性。

2 非线性李相干态

f 振子的湮没算符 b_i 和产生算符 b_i^\dagger 定义为

$$\left. \begin{aligned} b_i &= a_i f(N_i), \\ b_i^\dagger &= f(N_i) a_i^\dagger, \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N_i &= a_i^\dagger a_i, \\ [b_i, N_i] &= b_i, \\ [b_i^\dagger, N_i] &= -b_i^\dagger, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里 f 是数目算符的实函数, a_i 和 a_i^\dagger 是通常的湮没算符和产生算符。湮没算符 b_i 和产生算符 b_i^\dagger 满足下列对易关系:

$$\left. \begin{aligned} [b_i, b_i^\dagger] &= (N_i + 1) f^2(N_i + 1) - N_i f^2(N_i), \\ i &= 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

类似于参考文献[9]的讨论, 我们引入 b_i 和 b_i^\dagger 的逆算子

$$b_i^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} f(n+1)} |n+1\rangle_i \langle n|, \quad (4)$$

$(b_i^\dagger)^{-1} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} f(n+1)} |n\rangle_i \langle n+1| = (b_i^{-1})^\dagger, \quad (5)$$

容易证明

$$b_i b_i^{-1} = (b_i^\dagger)^{-1} b_i^\dagger = 1, \quad (6)$$

$$b_i^{-1} b_i = b_i^\dagger (b_i^\dagger)^{-1} = 1 - |0\rangle_i \langle 0|, \quad (7)$$

这说明 b_i^{-1} 是 b_i 的右逆, $(b_i^\dagger)^{-1}$ 是 b_i^\dagger 的左逆。利用逆算子 b_i^{-1} , $(b_i^\dagger)^{-1}$ 和数目算子 N_i , 我们引入下列算子

* 浙江省自然科学基金(101006)资助课题。

E-mail: stq504@nbip.net.cn

收稿日期: 2002-05-20; 收到修改稿日期: 2002-09-05

$$\left. \begin{aligned} B_i^+ &= N_i b_i^{-1}, \\ B_i &= (b_i^+)^{-1} N_i, \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

容易证明下列关系式：

$$[b_i, B_i^+] = 1, \quad [B_i, b_i^+] = 1, \quad (9)$$

$$B_i^+ b_i = b_i^+ B_i = N_i, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} [B_i, N_i] &= [B_i, b_i^+ B_i] = B_i, \\ [B_i^+, N_i] &= [B_i^+, B_i^+ b_i] = -B_i^+, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这说明 B_i^+ (B_i) 是 b_i (b_i^+) 的正则共轭。利用(8)式~(11)式,很容易得到 $SU(1,1)$ 李代数的两个非厄密实现：

$$\left. \begin{aligned} K_- &= b_1 b_2, \quad K_+ = B_1^+ B_2^+, \\ K_0 &= \frac{1}{2}(N_1 + N_2 + 1), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

或者

$$\left. \begin{aligned} K_- &= B_1 B_2, \quad K_+ = b_1^+ b_2^+, \\ K_0 &= \frac{1}{2}(N_1 + N_2 + 1), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由 $SU(1,1)$ 李代数的两个非厄密实现,我们引入两类新的李相干态,它们满足

$$K_- |\xi, q\rangle = \xi |\xi, q\rangle, \quad (14)$$

$$(N_1 - N_2) |\xi, q\rangle = q |\xi, q\rangle, \quad (15)$$

在数态表象中

$$|\xi, q\rangle_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(in\varphi) |n+q, n\rangle, \quad (16)$$

$$|\xi, q\rangle_2 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \exp(in\varphi) |n+q, n\rangle, \quad (17)$$

其中

$$C_n = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{\{[f(n)]![f(n+q)]!\}^2 n!(n+q)!} \right\}^{-1/2} \frac{|\xi|^n}{\sqrt{n!(n+q)! [f(n)]! [f(n+q)]!}}, \quad (18)$$

$$D_n = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} \{[f(n)]![f(n+q)]!\}^2}{n!(n+q)!} \right\}^{-1/2} \frac{|\xi|^n [f(n)]! [f(n+q)]!}{\sqrt{n!(n+q)!}}, \quad (19)$$

$$[f(n)]! = f(1)f(2)\cdots f(n), \quad [f(0)]! = 1, \quad (20)$$

容易证明 $|\xi, q\rangle_1$ 和 $|\xi, q\rangle_2$ 分别是 $K_- = b_1 b_2$ 和 $K_- = B_1 B_2$ 的本征态,即

$$\left. \begin{aligned} b_1 b_2 |\xi, q\rangle_1 &= \xi |\xi, q\rangle_1, \\ B_1 B_2 |\xi, q\rangle_2 &= \xi |\xi, q\rangle_2, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

当 $f(k) \equiv 1$ 时, $|\xi, q\rangle_1$ 和 $|\xi, q\rangle_2$ 即是通常的李相干态

$$|\xi, q\rangle = \left[\frac{|\xi|^q}{I_q(2|\xi|)} \right]^{1/2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n+q, n\rangle, \quad (22)$$

其中 $I_q(x)$ 是虚宗量贝塞尔函数。

一般说来,对于不同的非线性函数 $f(k)$,可由方程(16)和(17)得到各种各样的非线性李相干态。在下面的讨论中,我们取非线性函数 $f(k)$ 为

$$f(k) = L_k^1(\eta^2) [(k+1)L_k^0(\eta^2)]^{-1}, \quad (23)$$

其中 η 是兰姆-迪克参量, $L_k^l(x)$ 是缔合拉盖尔多项式。

3 非线性李相干态的统计性质

二阶单模相干函数定义为^[10]

$$g_i^{(2)}(0) = \frac{\langle a_i^{+2} a_i^2 \rangle}{\langle a_i^+ a_i \rangle^2}, \quad (24)$$

$g_i^{(2)}(0) < 1$ 意味着光场的模 i 呈现反聚束效应。图1和图2分别给出了 $g_1^{(2)}(0)$ 和 $g_2^{(2)}(0)$ 随 $r = |\xi|$ 的变化。由图1不难看出,随着兰姆-迪克参量 η 的减小,模1的反聚束效应减弱。与通常的李相干态相比较,对于较小的 $r = |\xi|$,非线性李相干态的反聚束效应较弱,但是,对于较大的 $r = |\xi|$,非线性李相干态的反聚束效应比通常的李相干态的反聚束效应强。对于模2也有类似的结论,但是,对于较小的兰姆-迪克参量 η ,当 $r = |\xi|$ 较小时,模2不呈现反聚束效应。

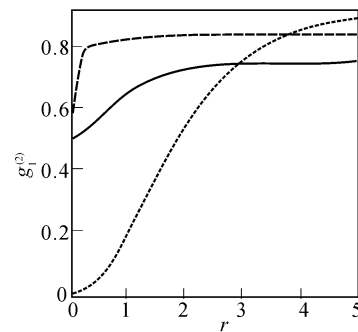


Fig. 1 $g_i^{(2)}(0)$ vs. $r(=|\xi|)$ for (a) $q=2, \eta=0.8$ (solid line); (b) $q=2, \eta=0.6$ (dash line); (c) $q=2, f(k)=1$ (dot line)

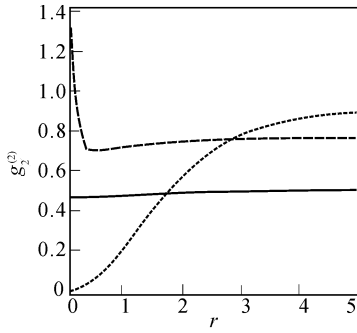


Fig. 2 $g_{12}^{(2)}(0)$ vs. $r(=|\xi|)$ for (a) $q=2, \eta=0.8$ (solid line); (b) $q=2, \eta=0.6$ (dash line); (c) $q=2, f(k)=1$ (dot line)

双模间的二阶相干度定义为^[12]

$$g_{12}^{(2)}(0) = \frac{\langle a_1^+ a_1 a_2^+ a_2 \rangle}{\langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle}, \quad (25)$$

$g_{12}^{(2)}(0) > 1$ 说明光场双模的光子是相关的。图 3 给出了 $g_{12}^{(2)}(0)$ 随 $r = |\xi|$ 的变化。不难看出, 光场双模的光子始终是相关的, 这与通常的孛相干态不同。对于较大的兰姆-迪克参量 η , 光场双模的光子之间的关联较强。

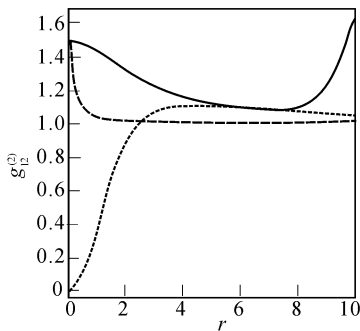


Fig. 3 $g_{12}^{(2)}(0)$ vs. $r(=|\xi|)$ for (a) $q=2, \eta=0.9$ (solid line); (b) $q=2, \eta=0.6$ (dash line); (c) $q=2, f(k)=1$ (dot line)

柯西-施瓦茨不等式由下面的式子给出

$$\langle a_1^+ a_1 a_2^+ a_2 \rangle^2 \leq \langle a_1^{+2} a_1^2 \rangle \langle a_2^{+2} a_2^2 \rangle, \quad (26)$$

如果上面的不等式不成立^[10], 则表示光场的双模之间是一种非经典相关。定义

$$I_0 = \frac{[\langle a_1^{+2} a_1^2 \rangle \langle a_2^{+2} a_2^2 \rangle]^{1/2}}{|\langle a_1^+ a_1 a_2^+ a_2 \rangle|} - 1, \quad (27)$$

$I_0 < 0$ 意味着柯西-施瓦茨不等式被破坏。图 4 给出了 I_0 随 $r = |\xi|$ 的变化。可以看出, 对于较大的兰姆-迪克参量 η , 柯西-施瓦茨不等式被较大的破坏。与通常的孛相干态相比较, 对于较大的 $r = |\xi|$, 非线性孛相干态中柯西-施瓦茨不等式得到更大的破坏。

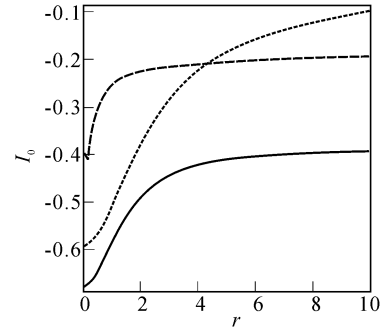


Fig. 4 I_0 vs. $r(=|\xi|)$ for (a) $q=2, \eta=0.8$ (solid line); (b) $q=2, \eta=0.6$ (dash line); (c) $q=2, f(k)=1$ (dot line)

4 非线性孛相干态 $|\xi, q\rangle_2$ 的相位统计性质

Pegg-Barnett 定义了如下的相位态^[12]:

$$|\theta\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \exp[i(n\theta)] |n\rangle, \quad (28)$$

对于单模光场 $|\psi\rangle$, 其光场相位的概率分布函数为

$$P(\theta) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+1}{2\pi} |\langle \theta | \psi \rangle|^2, \quad (29)$$

此概率分布函数满足

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} P(\theta) d\theta = 1, \quad (30)$$

对于双模光场 $|\psi\rangle$, 可类似地得到其光场相位的概率分布函数

$$P(\theta_1, \theta_2) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s+1}{2\pi} \right)^2 |\langle \theta_1, \theta_2 | \psi \rangle|^2, \quad (31)$$

由(17)式和(31)式, 孛相干态 $|\xi, q\rangle_2$ 的相位概率分布函数可以表示为

$$P(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \left\{ 1 + 2 \sum_{n>m} D_n D_m \cos[(n-m)(\varphi - \theta_1 - \theta_2)] \right\}, \quad (32)$$

其中 D_k 由(20)式给出。

图 5 给出了通过数值计算得到的非线性孛相干态 $|\xi, q\rangle_2$ 的相位概率分布, 比较图 5(a) 和图 5(b) 可以看出, 当兰姆-迪克参量 η 较小时, 非线性孛相干态 $|\xi, q\rangle_2$ 的相位概率分布与通常的孛相干态类似。但是, 当兰姆-迪克参量 η 较大时, 相位概率分布的峰增多, 说明量子干涉效应增强, 这与通常的孛相干态有非常明显的区别。

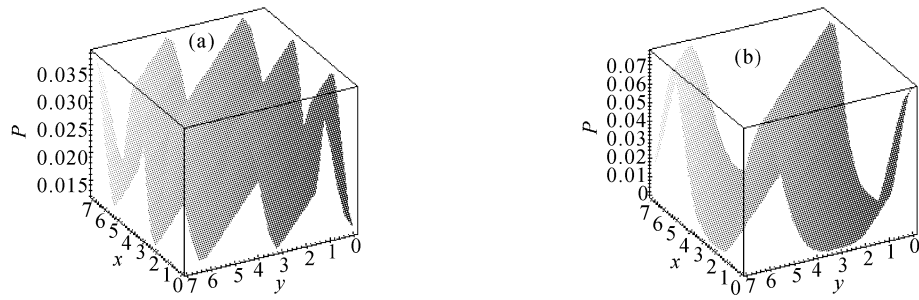


Fig. 5 (a) Phase distribution function P vs. $x=\theta_1, t=\theta_2, |\xi|=2, q=2, \eta=0.8$; (b) Phase distribution function P vs. $x=\theta_1, y=\theta_2, |\xi|=2, q=2, \eta=0.4$

结论 本文利用 f 振子的湮没算符和产生算符的逆算符的性质,得到了 $SU(1,1)$ 李代数的两个双模非厄密实现,在此基础上引入了两种非线性李相干态,研究了当非线性函数 $f(k) = L_k^1(\eta^2)[(k+1)L_k^0(\eta^2)]^{-1}$ 时非线性李相干态 $|\xi, q\rangle_2$ 的光子统计性质和相位特性。结果表明,它们的相位特性和量子统计性质非常敏感地依赖兰姆-迪克参量,与通常的李相干态相比有非常大的区别。

随着囚禁原子实验的不断发展,使得实验上实现囚禁原子质心运动的非经典态成为可能^[11,12],这一技术的最大优点是克服了腔场量子电动力学(QED)实验中的耗散效应。如果考虑囚禁原子在二维各向同性谐振子势场的运动,其质心运动的振动态可能和这里讨论的非线性李相干态有联系,这一问题正在考虑中。

参 考 文 献

- 1 Yan Hong, Chang Zhe, Guo Hanying. q -rotating oscillator model. *Acta Physica Sinica* (物理学报), 1991, **40**(11):1377~1387 (in Chinese)
- 2 Yang Guangcan. Energy level number and dissociation energy of diatomic molecules described by the q -deformed oscillator model. *Acta Physica Sinica* (物理学报), 1993, **42**(1):92~94 (in Chinese)
- 3 de Matos Filho R L, Vogel W. Nonlinear coherent states. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **54**(5):4560~4563
- 4 Mancini S. Even and odd nonlinear coherent states. *Phys. Lett. (A)*, 1997, **233**(4~6):291~296
- 5 Roy B. Nonclassical properties of the real and imaginary nonlinear Schrodinger cat states. *Phys. Lett. (A)*, 1998, **249**(1):25~29
- 6 Roy B, Roy P. Phase properties of even and odd nonlinear coherent states. *Phys. Lett. (A)*, 1999, **257**(5,6):264~268
- 7 Song Tongqiang, Fan Hongyi. Phase properties of the nonlinear squeezed vacuum state. *Phys. Lett. (A)*, 2002, **294**(4):66~70
- 8 Song Tongqiang, Fan Hongyi. Properties of two-mode nonlinear squeezed vacuum and coherent squeezed vacuum states. *J. Phys. (A)*, 2002, **35**(1):1~7
- 9 Fan Hongyi. Inverse operators and some new completeness relations in q -deformed Fock space. *Phys. Lett. (A)*, 1994, **191**(5,6):347~351
- 10 Peng Jinsheng, Li Gaoxiang. *Introduction to Modern Quantum Optics* (近代量子光学导论). Beijing: Science Press, 1996. 62~79, 156~164 (in Chinese)
- 11 Cirac J I, Blatt R, Parkins A S *et al.*. Even and odd coherent states of the motion of a trapped ion. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**(6):762~765
- 12 de Matos Filho R L, Vogel W. Preparation of Fock states by observation of quantum jump in a ion trap. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **76**(4):608~611

Nonclassical Effects of the Nonlinear Pair Coherent States

Song Tongqiang Zhu Yuejin

(Department of Physics, Ningbo University, Ningbo 315211)

(Received 20 May 2002; revised 5 September 2002)

Abstract: Using the properties of the inverses of annihilation and creation operators of f -oscillator, two two-mode non-Hermitian realization of $SU(1,1)$ Lie algebra is obtained, and on this basis, two nonlinear pair coherent states are introduced, their statistical properties of photon and phase characteristics are discussed.

Key words: quantum optics; f -oscillator; nonlinear pair coherent states; nonclassical effects