

文章编号: 0253-2239(2003)07-0809-6

# 用科尔-霍普夫变换法求非均匀光波导导模 本征方程的严格解\*

余守宪

(北方交通大学物理系, 北京 100044)

**摘要:** 采用科尔-霍普夫(Cole-Hopf)变换法,将渐变折射率波导导模的本征值方程变换为里卡提(Riccati)方程,通过较简洁的数学演算导出导模的传播常量与模场分布的解析解,给出了平方律分布、对称爱泼斯坦(Epstein)分布、爱泼斯坦层的平板波导与平方律分布圆光纤 4 种折射率分布的计算公式。

**关键词:** 渐变折射率波导; 传播常量; 模场; 科尔-霍普夫变换; 里卡提方程

中图分类号: TN252 文献标识码: A

## 1 引 言

在量子力学中,采用科尔-霍普夫变换,将给定势函数的薛定谔方程变换成里卡提方程来求解,可以避免涉及特殊函数等较复杂计算的困扰,通过较简捷的数学演算求出各个束缚态的能级与定态波函数<sup>[1~3]</sup>。鉴于渐变折射率导模的模式本征方程与定态薛定谔方程数学形式相同,本文把科尔-霍普夫变换法移植到导波光学中,用较简捷的方法导出了 4 种折射率分布的渐变折射率波导(平方律分布、对称爱泼斯坦分布、爱泼斯坦层的平板波导与平方律分布圆光纤)导模本征方程的严格解。

## 2 理论与方法

平板介质波导的 TE 模服从标量波方程

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k_0^2 n^2(x) - \beta^2]\psi(x) = 0, \quad (1)$$

式中,  $\psi$  为场强振幅,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  为真空中的波数,  $\lambda$  为真空中的光波波长,  $\beta$  为传播常量,  $n^2(x)$  为折射率的分布函数。

注意到在势能函数为  $V(x)$  的一维势场中运动的粒子的定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + [V(x) - E]\psi(x) = 0, \quad (2a)$$

或

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [\epsilon - v(x)]\psi(x) = 0, \quad (2b)$$

式中,  $\epsilon = 2mE/\hbar^2$ ,  $v(x) = 2mV(x)/\hbar^2$ 。方程(1)与方程(2)数学形式相同,因此,将量子力学的数学方法移植到介质波导标量波方程(1)的求解是可行的。

已有文献报道<sup>[1]</sup>,可以采用科尔-霍普夫变换法将二阶的微分方程薛定谔方程(2)变换成一阶的常微分方程里卡提方程来求解,可以避免涉及特殊函数等较复杂计算的困扰,通过较简捷的计算,导出各个束缚态的能级与波函数。本文将这一方法用于求解平板波导导模的本征方程(1)以及圆光纤的相类似的方程(见后面)。文献[1,7]将此法称为里卡提变换法,但鉴于在非线性物理<sup>[4]</sup>中常称之为科尔-霍普夫变换法<sup>[5,6]</sup>,且已有广泛应用,故称之为科尔-霍普夫变换法似较恰当。

为求解本征方程(1),把它改写为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [v(x) - \beta^2]\psi = 0, \quad (3)$$

其中  $v(x) = k_0^2 n^2(x)$

采用科尔-霍普夫变换,将  $\psi(x)$  变换为  $u(x)$ :

$$u(x) = -\frac{d}{dx}(\ln\psi) = -\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx}. \quad (4)$$

这相应于积分变换

$$\psi(x) = C \cdot \exp\left[-\int_{x_0}^x u(\xi) d\xi\right], \quad (5)$$

其中,  $C$  为归一化系数,取决于积分限  $x_0$  的选择。对于导模,  $\psi(x)$  应满足物理条件:单值连续,有限而且

在  $x \rightarrow \infty$  时  $\psi(x) \rightarrow 0$ ,因此,  $u(x)$  应满足  $\int_{x_0}^x u(\xi) d\xi$

\* 北方交通大学科技论文基金资助课题。

E-mail: wbli@center.njtu.edu.cn

收稿日期: 2002-07-29

当  $x \rightarrow \infty$  时趋于无限大的条件。

利用变换式(4)或(5),可以把本征方程(3)变换成等价的一阶非线性常微分方程(里卡提方程):

$$\frac{du}{dx} - u^2 = v(x) - \beta^2. \quad (6)$$

已给折射率分布函数  $n^2(x)$ , 则  $v(x) = k_0^2 n^2(x)$  已给定, 这时, 通常不难得到方程(6)的一个特解  $u_0(x)$ , 使得当  $\beta^2 = \beta_0^2$  时  $u_0(x)$  能满足方程(6)。只要  $u_0(x)$  为可积分函数, 而且  $x \rightarrow \infty$  时,  $\int_0^x u(\xi) d\xi$  趋于无限大, 则由式(5)可知  $\psi(x)$  在区间  $(x_0, \infty)$  内没有零点, 因此, 与  $u_0(x)$  相对应的场函数

$$\psi_0(x) = C \cdot \exp\left[\int_{x_0}^x -u_0(\xi) d\xi\right], \quad (7)$$

应为  $TE_0$  模的模场分布函数。

以已求得的  $u_0(x)$  为基础, 即可进而求出各个导模的传播常量和相应的模场分布函数。

为此, 可把满足物理要求的特解写成

$$u(x) = u_0(x) - \frac{1}{P} \frac{dP}{dx}, \quad (8)$$

其中,  $P(x)$  为待定函数, 代入里卡提方程(6), 若能求得特解  $P(x)$  及相应的  $\beta^2$  值即可得到模场函数为

$$\psi(x) = P(x) \cdot \exp\left[-\int_{x_0}^x u_0(\xi) d\xi\right]. \quad (9)$$

将(8)式代入方程(6), 得到

$$\frac{du_0}{dx} - u_0^2 - \left(\frac{d^2 P}{dx^2} - 2u_0 \frac{dP}{dx}\right) = v(x) - \beta^2,$$

容易看出, 只要找到适当的函数  $\Omega(x)$  以满足

$$\frac{du_0}{dx} - u_0^2 + \Omega = v(x) - \beta^2, \quad (10a)$$

$$\text{其中 } \Omega = -\frac{1}{P} \left(\frac{d^2 P}{dx^2} - 2u_0 \frac{dP}{dx}\right), \quad (10b)$$

则对应于本征值  $\beta^2$  的  $P(x)$  应满足方程

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - 2u_0 \frac{dP}{dx} + \Omega(x)P(x) = 0, \quad (11)$$

由方程(11)解得  $P(x)$ , 则由式(10a)可得到本征值  $\beta^2$ , 而相应的模场函数  $\psi$  由式(9)给出。

注意方程(11)中的  $\Omega(x)$  依赖于本征值  $\beta^2$ , 于是可见式(11)为二阶常微分方程(附加边界条件)的本征方程。根据二阶线性常微分方程的本征值存在定理(参看文献[10]), 可知, 有一序列单调变化的本征值  $\beta_1^2, \beta_2^2, \beta_3^2, \dots$ , 而与第  $n$  个本征值  $\beta_n^2$  相对应的  $P_n(x)$  或  $\psi_n(x)$  应有  $n$  个零点 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 所以由(9)式可知,  $\psi_n(x)$  是满足  $x \rightarrow \infty$  时  $\psi(x) \rightarrow 0$  这

一物理要求的  $TE_n$  模模场分布函数。

综上所述, 本征值方程(3)的求解归结为: 由方程(6)求出满足要求的  $u_0(x)$  及相应的  $\beta_0^2$  值, 得到  $TE_0$  模的场函数  $\psi_0(x)$ , 然后以此为基础, 由方程(11)和(10)求得一序列函数  $P_n(x)$  及相应的本征值  $\beta_n^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 得到各个导模的传播常量  $\beta_n$  以及由式(9)给出的导模模场函数  $\psi_n(x)$ 。显然, 这一方法是有较广泛的适用性的。以下各节给出 4 个有实际意义的实例, 说明解法的具体应用, 并显示其优点。

### 3 平方律分布的平板波导

考虑平方律分布的平板波导

$$n^2(x) = n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a}\right)^2\right], \quad (12)$$

式中,  $n_1$  是波导传播轴上的折射率,  $\Delta$  和  $a$  是与折射率分布形状有关的两个参量, 参量  $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$ , 参量  $a$  是扩散深度,  $n_2 = n(a)$  即  $x = a$  处包层的折射率值。弱导情况下,  $\Delta \ll 1$ ,  $\Delta \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ , 参量  $\Delta$  亦即芯区中心与包层的相对折射率差。

把  $n^2(x)$  代入标量波方程(1)中, 有

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k_0^2 \left[n_1^2 - 2n_1^2 \Delta \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \beta^2\right] \psi = 0.$$

为简化数学演算, 引入波导的归一化频率(归一化宽度)  $V$  和归一化传播常量  $b$ :

$$V = k_0 a (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}, \quad b = \frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad (13)$$

$$\text{并令 } \xi = \frac{V}{a} x = k_0 (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} x,$$

则标量波方程可改写为无量纲形式的本征方程:

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \left[1 - \left(\frac{\xi}{V}\right)^2 - b\right] \psi(\xi) = 0. \quad (14)$$

用科尔-霍普夫变换法求解本征方程(14), 这里  $v(\xi) = 1 - \left(\frac{\xi}{V}\right)^2$ , 而  $b$  为待求的本征值。

先求  $TE_0$  模的精确解析解, 令  $b_0$  为归一化传播常量。由式(6), 有

$$\frac{du_0}{d\xi} - u_0^2(\xi) = 1 - \left(\frac{\xi}{V}\right)^2 - b_0,$$

容易得到方程的解(满足物理条件)为

$$u_0(\xi) = \frac{\xi}{V}, \quad b_0 = 1 - \frac{1}{V}, \quad (15)$$

于是  $TE_0$  模的模场分布函数

$$\psi_0(\xi) = C \cdot \exp\left[-\int \frac{\xi}{V} d\xi\right] = C \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{2V}\right). \quad (16)$$

为求 TE<sub>n</sub> 模 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 的精确解析解, 用式(11), 有

$$\frac{d^2 P}{d\xi^2} - 2 \frac{\xi}{V} \cdot \frac{dP}{d\xi} + \Omega(\xi)P = 0. \quad (17)$$

若令待求的函数  $\Omega(\xi) = c$  (常量), 并令  $\xi = \sqrt{V}z$ , 则上式可改写为

$$\frac{d^2 P}{dz^2} - 2z \frac{dP}{dz} + cVP = 0. \quad (18)$$

容易看出上式的合理解为  $n$  次多项式  $P_n(z)$ , 将  $P_n(z)$  代入方程, 可由  $z^n$  的系数应为零定出  $cV = 2n$ , 因而方程变为

$$\frac{d^2 P}{dz^2} - 2z \frac{dP}{dz} + 2nP = 0, \quad (19)$$

这是厄米多项式  $H_n(z)$  所满足的微分方程, 故  $P_n(z) = H_n(z)$ , 于是由(9)式得到 TE<sub>n</sub> 模的模场分布函数及归一化传播常量分别为

$$\psi_n(x) = H_n\left(\frac{\sqrt{V}x}{a}\right) \exp\left(-\frac{V}{2} \frac{x^2}{a^2}\right), \quad (20)$$

$$b_n = b_0 + c = 1 - \frac{2n+1}{V}. \quad (21)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

#### 4 对称爱泼斯坦型分布的平板波导

对称爱泼斯坦型折射率分布为

$$n^2(x) = n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \operatorname{sech}^2(x/a), \quad (22)$$

其中,  $n_1$  为芯区中心的折射率, 而  $n_2$  为两侧距中心无限远的折射率, 即  $n^2(\pm\infty) = n_2^2$ ,  $a$  为扩散深度。

定义的归一化传播常量  $b = \frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$ , 则标量波

方程可写成

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k_0^2(n_1^2 - n_2^2) \left[ \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{a}\right) - b \right] \psi = 0.$$

若定义的归一化频率(宽度)  $V = k_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} a$ , 则方程可改写为

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \left[ \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{V}\right) - b \right] \psi(\xi) = 0, \quad (23)$$

其中  $\xi = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} x$ 。

为求解 TE<sub>0</sub> 模, 用方程(6), 有

$$\frac{du_0}{d\xi} - u_0^2 = \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{V}\right) - b_0, \quad (24)$$

设  $u_0 = a \tanh(\xi/V)$ , (25)

代入方程(24), 可以验明  $u_0$  能满足方程

$$\alpha = \frac{1}{2V} (\sqrt{1+4V^2} - 1), \quad (26)$$

$$b_0 = \alpha^2 = \left[ \frac{\sqrt{1+4V^2} - 1}{2V} \right]^2, \quad (27)$$

(27)式给出 TE<sub>0</sub> 模的归一化传播常量, 相应的模场分布函数为

$$\psi_0(\xi) = C \cdot \exp\left[-\int a \tanh\left(\frac{\xi}{V}\right) d\xi\right] = C \cdot \left[ \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{V}\right) \right]^{aV}. \quad (28)$$

下面再以  $u_0(\xi)$  为基础, 求解 TE<sub>n</sub> 模 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )。为此, 应用方程(11), 并取  $\Omega = c$  (常量), 有

$$\frac{d^2 P}{d\xi^2} - 2a \tanh\left(\frac{\xi}{V}\right) \frac{dP}{d\xi} + cP = 0. \quad (29)$$

先计算 TE<sub>1</sub> 模和 TE<sub>2</sub> 模, 再推广到任意 TE<sub>n</sub> 模。若取

$$P_1(\xi) = \sinh(\xi/V), \quad (30)$$

代入(29)式, 则当  $c = \frac{1}{V^2}(2aV - 1)$  时, 能满足方程,

$P_1(\xi)$  只有  $\xi = 0$  这一个零点, 可知  $P_1(\xi)$  给出 TE<sub>1</sub> 模。

由方程(10), 有

$$du_0/d\xi - u_0^2 = -c + \operatorname{sech}^2(\xi/V) - b_1,$$

可得

$$b_1 = b_0 - c = \alpha^2 - 2 \frac{\alpha}{V} + \frac{1}{V^2} = \left(\alpha - \frac{1}{V}\right)^2,$$

由此可知 TE<sub>1</sub> 模的归一化传播常量为

$$b_1 = \left[ \frac{\sqrt{1+4V^2} - 3}{2V} \right]^2, \quad (31)$$

相对应的模场分布函数不难应用式(8)求得。

同样, 若取

$$P_2(\xi) = c_0 + \sinh^2(\xi/V),$$

代入式(28), 则当  $c = \frac{1}{V^2}(4aV - 4)$  时, 能满足方程。

$P_2(\xi)$  有 2 个零点。

由方程(10), 有

$$du_0/d\xi - u_0^2 = -c + \operatorname{sech}^2(\xi/V) - b_2,$$

可得

$$b_2 = b_0 - c = \alpha^2 - \frac{4\alpha}{V} + \frac{4}{V^2} = \left(\alpha - \frac{2}{V}\right)^2,$$

由此可知 TE<sub>2</sub> 模的归一化传播常量为

$$b_2 = \left[ \frac{\sqrt{1+4V^2} - 5}{2V} \right]^2. \quad (32)$$

容易看出, 如果设  $P_n(\xi)$  为  $\eta = \sinh(\xi/V)$  的奇次型与偶次型多项式

$$P_n(\xi) = c_1 \eta + c_3 \eta^3 + c_5 \eta^5 + \dots,$$

$$P_n(\xi) = c_0 + \xi_2 \eta^2 + \xi_4 \eta^4 + \dots,$$

代入方程(29)中,令最高次幂项的系数等于零,即可导出 TE<sub>n</sub> 模(*n* 为奇数或偶数)的归一化传播常量为

$$b_n = \left[ \frac{\sqrt{1+4V^2} - (2n+1)}{2V} \right]^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

不难导出多项式  $P_n(\xi)$  中各个系数  $c_k$  之间的递推公式并应用式(9)求得相对应的导模模场分布。

以上的计算,较之文献[8]给出的简捷不少,足以说明科尔-霍普夫变换法的优点。

## 5 爱泼斯坦层平板波导

爱泼斯坦层折射率分布是对称爱泼斯坦分布的推广到非对称情况<sup>[8]</sup>。折射率分布函数为

$$n^2(x) = n_3^2 + \frac{n_2^2 - n_3^2}{2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{x}{a}\right) \right] + \left[ n_1^2 - \frac{1}{2}(n_2^2 + n_3^2) \right] \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{a}\right). \quad (34)$$

如图 1 所示,当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $n^2 \rightarrow n_3^2$ ; 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $n^2 \rightarrow n_2^2$ ; 当  $x = 0$  时,  $n^2 = n_1^2$ 。当  $n_2 = n_3$  时,  $n^2(x)$  退化为对称爱泼斯坦分布。

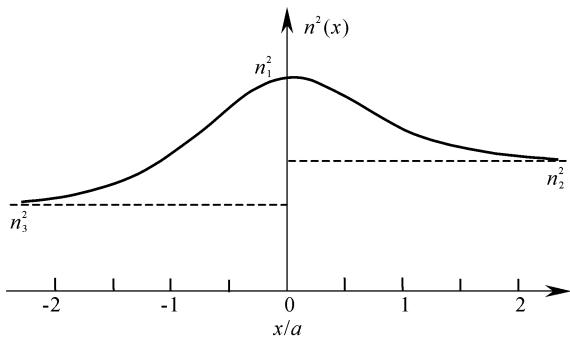


Fig. 1 The general Epstein-layer profile of refractive index

定义非对称参量  $c^2$  与归一化传播常量  $b$

$$c^2 = \frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad b = \frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad (35)$$

式中,  $N = \beta/k_0$  为模折射率,则波动方程可写为

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left[ -\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^2 \tanh\left(\frac{\xi}{V}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}c^2\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{V}\right) - b \right] \psi(\xi) = 0, \quad (36)$$

其中,  $\xi = k_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}x$ 。

TE<sub>0</sub> 模的归一化传播常量  $b_0$  及模场分布函数的求解如下。

求解方程

$$\frac{du_0}{d\xi} - u_0^2 = v(\xi) - b_0,$$

其中

$$v(\xi) = -\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^2 \tanh\left(\frac{\xi}{V}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}c^2\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{V}\right). \quad (37)$$

设试探解为

$$u_0 = \alpha \tanh(\xi/V) + \gamma, \quad (38)$$

其中,  $\alpha$  及  $\gamma$  为待定常量,不难看出,它能满足方程(37)。将式(38)代入方程(37),再令方程左边和右边  $\tanh(\xi/V)$  项及  $\operatorname{sech}^2(\xi/V)$  项以及常量项分别相等,可得

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \frac{1}{V}\alpha - \left(1 + \frac{1}{2}c^2\right) &= 0, \\ 2\alpha\gamma &= -\frac{1}{2}c^2, \quad b_0 = \alpha^2 + \gamma^2 - \frac{1}{2}c^2. \end{aligned}$$

由此解得

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2V} \left[ \sqrt{1 + 4\left(1 + \frac{1}{2}c^2\right)V^2} - 1 \right], \\ \gamma &= -\frac{1}{4\alpha}c^2, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

从而有  $b_0 = (\alpha + \gamma)^2$ , (40)

而  $\psi_0$  也可由  $u_0(\xi)$  得出

$$\psi_0(\xi) = C \exp\left\{ -\int \left[ \alpha \tanh\left(\frac{\xi}{V}\right) + \gamma \right] d\xi \right\} = C \exp(-\gamma\xi) \left[ \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{V}\right) \right]^{\alpha V}. \quad (41)$$

不难验证,当  $n_2^2 = n_3^2$  即非对称系数  $c^2 = 0$  时,  $b_0$  与  $\psi_0(\xi)$  分别退化为对称爱泼斯坦分布的(27)式与(28)式。

为求解 TE<sub>n</sub> 模,可以方程(11)中取  $\Omega = c$ (常量),有

$$\frac{d^2P}{d\xi^2} - 2 \left[ \alpha \tanh\left(\frac{\xi}{V}\right) + \gamma \right] + cP = 0, \quad (42)$$

即

$$\left[ \exp\left(\frac{2\xi}{V}\right) + 1 \right] \frac{d^2P}{d\xi^2} - 2 \left\{ \alpha \left[ \exp\left(\frac{2\xi}{V}\right) - 1 \right] + \gamma \left[ \exp\left(\frac{2\xi}{V}\right) + 1 \right] \right\} \frac{dP}{d\xi} + c \left[ \exp\left(\frac{2\xi}{V}\right) + 1 \right] P = 0. \quad (43)$$

改换自变量,令  $z = \exp(2\xi/V)$ , 则

$$\frac{dP}{d\xi} = \frac{2}{V} z \frac{dP}{dz}, \quad \frac{d^2P}{d\xi^2} = \frac{4}{V} \left( z^2 \frac{d^2P}{dz^2} + z \frac{dP}{dz} \right).$$

于是方程(43)可改写为

$$(z + z^3) \frac{d^2 P}{dz^2} + [z + (\alpha - \gamma)z - V(\alpha + \gamma)z^2] \frac{dP}{dz} + \frac{V^2}{4} c(z + 1)P = 0. \quad (44)$$

由上式可见,可设解为多项式

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

代入以定出各个系数  $a_k$ 。若令代入后最高幂次项  $z^{n+1}$  的系数等于零,即可求出  $c$ 。我们有

$$\frac{V^3}{4} c = V(\alpha + \gamma)n - n(n-1),$$

因而

$$\begin{aligned} c &= \frac{4n}{V^2} [(\alpha + \gamma)V - (n-1)], \\ b_n &= b_0 - c = \\ &(\alpha + \gamma)^2 - \frac{4n(\alpha + \gamma)}{V} + \frac{4n(n-1)}{V^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

这就是第  $n$  个 TE 模的归一化传播常量,各个系数  $a_k$  定出后,即可求得导模的模场分布。为省篇幅,从略。

## 6 平方律分布圆光纤

设圆光纤的折射率分布是轴对称的,沿轴向折射率保持不变,圆截面上折射率按平方律分布,即

$$n^2(r) = n_1^2 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right], \quad (46)$$

其中,  $n_1 = n(0)$  为光纤轴心处的折射率,  $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$  是相对折射率差,  $a$  为光纤芯的半径,这里已假定包层的折射率为常量并忽略包层的影响。

在标量波近似下,可以把场分布函数的径向部分  $r$  所满足的方程写成<sup>[9]</sup>

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right) + \left\{ k_0^2 n_1^2 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] - \frac{m^2}{r^2} - \beta^2 \right\} \psi(r) = 0, \quad (47)$$

其中  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为真空中的光波波长,  $\beta$  为传播常量,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m$  代表沿圆周方向的节点数的一半,  $m/r$  给出沿圆周方向单位弧长的相移。

求解方程(47)的通常方法<sup>[9]</sup>是经过一系列变换把它变换成惠特克(Whittaker)方程,以求满足边界条件的解,计算比较复杂冗长。本文采用科尔-霍普夫变换法求解,使计算明显简化。

$$\text{令 } \psi(r) = r^{-1/2} U(r), \quad (48)$$

把方程(47)变换成

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + [b_0 - b_1 r^2 - b_2 r^{-2} - \beta^2] U(r) = 0, \quad (49)$$

其中

$$b_0 = k_0^2 n_1^2, \quad b_1 = k_0^2 n_1^2 \frac{2\Delta}{a^2}, \quad b_2 = m^2 - \frac{1}{4}. \quad (50)$$

用科尔-霍普夫变换

$$u = -\frac{1}{U} \cdot \frac{dU}{dr}, \quad (51)$$

求解 TE<sub>*m*</sub> 模的传播常量  $\beta_{nm}$  及模场的径向分布函数  $\psi_{nm}(r)$ 。

先对 TE<sub>*m*</sub> 模求解。为此,取

$$u_0(r) = a_1 r + a_2 r^{-1}. \quad (52)$$

由方程(6),有

$$\frac{du_0}{dr} - u_0^2 = b_0 - b_1 r^2 - b_2 r^{-2} - \beta^2,$$

得

$$\begin{aligned} a_1^2 r^2 + a_1(a_2 - 1) + (a_2^2 + a_2)r^{-2} = \\ \beta^2 - b_0 + b_1 r^2 + b_2 r^{-2}. \end{aligned}$$

由此可见,为满足此方程应有

$$\begin{aligned} a_1^2 &= b_1, \quad (2a_2 - 1)a_1 = \beta^2 - b_0, \\ a_2^2 + a_2 &= b_2. \end{aligned}$$

为保证  $U(r) = \exp\left[-\int u_0(r) dr\right]$  当  $r \rightarrow \infty$  时趋于零,应取  $a_1 > 0$ , 而为保证  $\beta < k_0 n_1$  (导模的要求)应取  $a_2 < 0$ 。于是解得待定常量  $a_1, a_2$  分别为

$$a_1 = k_0 n_1 \sqrt{2\Delta}/a, \quad a_2 = -\frac{1}{2}(2m+1), \quad (53)$$

而

$$\beta^2 = b_0 + (2a_2 - 1)a_1,$$

得到传播常量

$$\beta_{m0} = k_0 n_1 \left[ 1 - \frac{2\sqrt{2\Delta}}{k_0 n_1 a} (m+1) \right]^{1/2}, \quad (54)$$

而

$$\begin{aligned} U(r) &= \exp\left[-\int u_0(r) dr\right] = \\ &\exp\left[-\int (a_1 r + a_2 r^{-1}) dr\right], \end{aligned}$$

即

$$U(r) = r^{m+1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} k_0 n_1 \frac{\sqrt{2\Delta}}{a} r^2\right]. \quad (55)$$

令

$$s_0 = \left[ \frac{a}{\sqrt{2\Delta} k_0 n_1} \right]^{1/2}, \quad (56)$$

可知径向场分布函数可写为

$$\psi_{m0}(r) = r^{-1/2} U(r) = r^m \exp\left[-\frac{1}{2} \left( \frac{r}{s_0} \right)^2\right], \quad (57)$$

这里  $s_0$  即光纤光学中所常称的模斑尺寸。

为求解  $TE_{nm}$  模, 可以在方程(11)中取  $\Omega = c$  (常量), 于是, 由

$$\frac{d^2 P}{dr^2} - 2u_0 \frac{dP}{dr} + cP = 0, \quad u_0 = a_1 r + a_2 r^{-1},$$

有

$$\frac{d^2 P}{dr^2} - 2(a_1 r + a_2 r^{-1}) \frac{dP}{dr} + cP = 0. \quad (58)$$

容易看出, 满足这一微分方程的函数  $P$  应为仅有奇次幂的  $(2n-1)$  次多项式, 写作

$$P_n(r) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot r^{2k-1}. \quad (59)$$

将式(59)代入方程(58), 令最高次项  $r^{2n-1}$  的系数等于零, 即得

$$c = 2a_1(2n-1)$$

于是, 由

$$\frac{du_0}{dr} - u_0^2 + c = b_0 - b_1 r^2 - b_2 r^{-2} - \beta^2,$$

即

$$a_1 - a_2 r^{-2} - a_1^2 r^2 - 2a_1 a_2 - a_2^2 r^{-2} + c = b_0 - b_1 r^2 - b_2 r^{-2} - \beta^2,$$

可解得

$$\beta^2 = -a_1(1-2a_2) + b_0 - c = -2k_0 n_1 \frac{\sqrt{2\Delta}}{a} \cdot (m+2n+1) + k_0^2 n_1^2,$$

即

$$\beta_{nm} = k_0 n_1 \left[ 1 - \frac{2\sqrt{2\Delta}}{n_1 k_0 a} (m+2n+1) \right]^{1/2}. \quad (60)$$

这里  $\beta_{nm}$  即为所求的  $TE_{nm}$  模的传播常量。

多项式  $P_n(r)$  的各个系数  $c_k (k=1, 2, 3, \dots)$  可

由  $P_n(r)$  代入方程(58)后各个项  $r^n$  的系数均等于零所得到的系数间的递推公式依次得出, 由此求出  $TE_{nm}$  模的模场分布函数  $\psi_{nm}(r)$ , 为节省篇幅, 在此从略。

以上演算表明, 采用科尔-霍普夫变换法求解, 数学运算明显地简化。

### 参 考 文 献

- 1 Haley S B. An underrated entanglement: Riccati and Schrödinger Equations. *Am. J. Phys.*, 1997, **65** (3): 237~243
- 2 Zhu Dongpei, Shi Mingjun, Chen Yinhua. A method for solving ground state of quantum system. *Acta Physica Sinica* (物理学报), 1992, **41**(4):533~541 (in Chinese)
- 3 Zhu Dongpei, Shi Mingjun, Chen Yinhua. A nonlinear approach to determining quantum energy spectrum. *J. China University of Science and Technol.* (中国科技大学学报), 1992, **22**(2):38~43 (in Chinese)
- 4 Liu Shikuo, Liu Shida. *Nonlinear Equations in Physics* (物理学中的非线性方程). Beijing: Peking University Press, 2000. 281~283 (in Chinese)
- 5 Cole J D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 1951, **3**:225~236
- 6 Hopf E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ . *Commun. Pure Appl. Math.*, 1950, **3**:201~230
- 7 She Shouxian. Solution of the isotonic oscillator problem by Riccati transformation. *Acta Physica Sinica* (物理学报), 2002, **51**(5):1054~1056 (in Chinese)
- 8 Adams M J. *An Introduction to Optical Waveguides*. Chichester: John-Wiley & Sons, 1981. 128~134
- 9 Yeh Pei Dai. *Optical Fiber Theory* (光纤理论). Shanghai: Knowledge Publisher, 1986. Chapter 1 (in Chinese)
- 10 Tricomi F G, Mc Harg E A. *Differential Equations*. Glasgow: Blackie and Sons, 1953. Chapter III

## Rigorous Solution of Eigenvalue Equations for Guided Modes in Inhomogeneous Optical Waveguides by Cole-Hopf Transformation

She Shouxian

(Department of Physics, Northern Jiaotong University, Beijing 100044)

(Received 29 July 2002)

**Abstract:** Using Cole-Hopf transformation, eigenvalue equations for guided modes in inhomogeneous optical waveguides are transformed to Riccati equation, and rigorous analytic solutions for propagation constants and modal field distributions are deduced in a simple and convenient way. Formulas for square-law index profile, symmetric Epstein profile, Epstein-layer model of planar guides and for parabolic profile circular optical fibers are deduced.

**Key words:** inhomogeneous waveguides; propagation constants; modal field; Cole-Hopf transformation; Riccati equation