

文章编号: 0253-2239(2003)07-0800-4

利用模式的对称性研究光子晶体光纤的色散*

宋俊峰^{1,2} 王海嵩² 张健² 于硕² 王立军¹ 许武¹ 杜国同²

(1 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130022
(2 吉林大学电子科学与工程学院集成光电子学国家重点联合实验室, 长春 130023)

摘要: 由光子晶体光纤的对称性可以得到模式分布的对称性, 根据模式的对称性选择适当的展开函数, 可以使计算量大大减少。计算了六角结构光子晶体光纤的色散特性, 得到了波长在 1.55 μm 处色散为零时, 光子晶体光纤的结构参量所满足的方程。

关键词: 光子晶体光纤; 光纤的色散; 模式对称性
中图分类号: O436.3 文献标识码: A

1 引 言

光子晶体光纤 (photonic crystal fiber, PCF) 是一种特殊的波导形式, 一般来说它的横截面是中心有缺陷的二维周期结构, 在缺陷处形成波导, 由于这种波导可以在较大范围内实现基模工作, 可以大范围地调节零色散点的位置, 有的结构可以实现大功率激光传输等, 因此成为近几年来研究的一个热点。六角型光子晶体光纤的结构简单, 易于制作, 是目前研究较多的光子晶体光纤结构^[1~4], 还有其它的一些结构^[5~7]。对六角型光子晶体来说, 它的基模光场在横截面上具有 60° 的旋转对称性^[1,2]。如果已知模式的这种对称性, 我们可以选择具有相同对称

性的展开函数做展开, 这相当于把不具有这种对称性的其它模式去掉, 从而大大减少计算量。对于光通信来说, 光纤色散是非常重要的物理量, 尤其是在 1.55 μm 附近, 如果能够实现对在该范围内色散进行调节, 在光通信领域将有更多的应用。本文的目的在于利用六角型光子晶体光纤基模的对称性简化计算, 并研究六角型光子晶体光纤在 1.55 μm 附近的色散情况。

2 利用模式的对称性求解本征方程

对于一个在 z 方向上均匀无限长的光波导, 由麦克斯韦方程组可得其矩阵算符形式^[2]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{x^2} + \frac{\partial^2}{y^2} + k_0^2 \epsilon(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial y} (\ln \epsilon) \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} (\ln \epsilon) \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} (\ln \epsilon) \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\omega x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial x} (\ln \epsilon) \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} M+N & 0 \\ 0 & M+N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_{x,x} & \theta_{x,y} \\ \theta_{y,x} & \theta_{y,y} \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 $\epsilon(\mathbf{r})$ 是介质的介电常量, 它是位置的函数, 同时由于物质材料本身的色散, 它也是波长的函数; k 为玻尔兹曼常量, β 为矩阵方程的本征值, θ 是由下面的 (11a)~(11d) 定义的运算符。

$$M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$N = k_0^2 \epsilon(\mathbf{r}), \quad (3)$$

θ 的各分量可以由 (1) 式 ~ (3) 式得到。

考虑到任何一个连续函数都可以按某正交完备函数展开, 我们选择二维平面波作为正交完备函数, 原则上平面波的波矢量应该是连续变化的, 但可以用一些等间距离散化的值来代替, 这相当于把光子晶体光纤中心周围的一定区域作为一个大原胞, 这

* 国家自然科学基金 (G2000036605, 60077021, 60107002) 资助课题。

E-mail: laserlab@mail.jlu.edu.cn

收稿日期: 2002-04-26; 收到修改稿日期: 2002-07-22

些大原胞作二维周期平移形成一个二维无穷大的完整的二维光子晶体,为了使大原胞之间不互相影响,大原胞的尺寸应该足够大,或者说波矢量的间距要足够小。然后我们可以有

$$\ln[\varepsilon(\mathbf{r})] = \sum_{m,n} \exp(i\mathbf{G}_{m,n} \cdot \mathbf{r}), \quad (4)$$

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \sum_{m,n} \varepsilon_{m,n} \exp(i\mathbf{G}_{m,n} \cdot \mathbf{r}), \quad (5)$$

其中 $\mathbf{G}_{m,n} = m\mathbf{G}_1 + n\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ 为倒空间的两个平移基矢量, $\gamma_{m,n}, \varepsilon_{m,n}$ 分别是各自函数的展开系数。我们选择的展开函数是

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{m,n} &= \frac{1}{\sqrt{6S}} \sum_{p=0}^5 \exp[i(F^p \mathbf{G}_{m,n}) \cdot \mathbf{r}], \\ &\quad (\mathbf{G}_{m,n} \neq 0) \\ \varphi_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{S}} \quad (\mathbf{G}_{m,n} = 0) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(4) 式、(5) 式中的 $\mathbf{G}_{m,n}$ 分布在倒空间, (6) 式中的 $\mathbf{G}_{m,n}$ 分布在倒空间的一个 60° 的夹角内, S 是大原胞的面积, 操作符 F^p 表示对后面的矢量逆时针旋转 60° , 有下面的关系式成立

$$\left. \begin{aligned} F^0 \mathbf{G}_{m,n} &= \mathbf{G}_{m,n}, & F^1 \mathbf{G}_{m,n} &= \mathbf{G}_{m-n,m}, \\ F^2 \mathbf{G}_{m,n} &= \mathbf{G}_{-n,m-n}, & F^3 \mathbf{G}_{m,n} &= \mathbf{G}_{-m,-n}, \\ F^4 \mathbf{G}_{m,n} &= \mathbf{G}_{-m,-m}, & F^5 \mathbf{G}_{m,n} &= \mathbf{G}_{n,-m} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这样设计的展开函数本身就具有 60° 的旋转对称性, $\mathbf{G}_{m,n}, \mathbf{G}_{k,l}$ 不同时为 0,

$$M_{k,l}^{m,n} = -\delta_m^k \delta_l^n [(G_x^{k,l})^2 + (G_y^{k,l})^2], \quad (8)$$

$$N_{k,l}^{m,n} = \frac{1}{3} (A_{k,l}^{m,n} + A_{k-l,k}^{m,n} + A_{-l,k-l}^{m,n}), \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{k,l}^{m,n} &= \varepsilon_{m-k,n-l} + \varepsilon_{m-n,k,m-l} + \varepsilon_{-n-k,m-n-l} + \\ &\quad \varepsilon_{-m-k,-n-l} + \varepsilon_{n-m-k,-m-l} + \varepsilon_{n-k,n-m-l}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$(\theta_{x,x})_{k,l}^{m,n} = \frac{1}{3} [(\mathbf{G}_{k,l})|_y \cdot \mathbf{H}_{k,l}^{m,n}|_y + (\mathbf{G}_{k-l,k})|_y \cdot \mathbf{H}_{k-l,k}^{m,n}|_y + (\mathbf{G}_{-l,k-l})|_y \cdot \mathbf{H}_{-l,k-l}^{m,n}|_y], \quad (11a)$$

$$(\theta_{x,y})_{k,l}^{m,n} = -\frac{1}{3} [(\mathbf{G}_{k,l})|_x \cdot \mathbf{H}_{k,l}^{m,n}|_y + (\mathbf{G}_{k-l,k})|_x \cdot \mathbf{H}_{k-l,k}^{m,n}|_y + (\mathbf{G}_{-l,k-l})|_x \cdot \mathbf{H}_{-l,k-l}^{m,n}|_y], \quad (11b)$$

$$(\theta_{y,x})_{k,l}^{m,n} = -\frac{1}{3} [(\mathbf{G}_{k,l})|_y \cdot \mathbf{H}_{k,l}^{m,n}|_x + (\mathbf{G}_{k-l,k})|_y \cdot \mathbf{H}_{k-l,k}^{m,n}|_x + (\mathbf{G}_{-l,k-l})|_y \cdot \mathbf{H}_{-l,k-l}^{m,n}|_x], \quad (11c)$$

$$(\theta_{y,y})_{k,l}^{m,n} = \frac{1}{3} [(\mathbf{G}_{k,l})|_x \cdot \mathbf{H}_{k,l}^{m,n}|_x + (\mathbf{G}_{k-l,k})|_x \cdot \mathbf{H}_{k-l,k}^{m,n}|_x + (\mathbf{G}_{-l,k-l})|_x \cdot \mathbf{H}_{-l,k-l}^{m,n}|_x], \quad (11d)$$

$\mathbf{G}_{m,n}, \mathbf{G}_{k,l}$ 只有一个为 0 时,

$$M_{k,l}^{0,0} = M_{0,0}^{m,n} = 0, \quad (12)$$

$$N_{k,l}^{0,0} = N_{0,0}^{k,l} = \frac{2}{\sqrt{6}} (\varepsilon_{k,l} + \varepsilon_{k-l,k} + \varepsilon_{-l,k-l}), \quad (13)$$

$$(\theta_{x,x})_{k,l}^{0,0} = -\frac{2}{\sqrt{6}} [\gamma_{k,l} (\mathbf{G}_{k,l})_y^2 + \gamma_{k-l,k} (\mathbf{G}_{k-l,k})_y^2 + \gamma_{-l,k-l} (\mathbf{G}_{-l,k-l})_y^2], \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} (\theta_{x,y})_{k,l}^{0,0} &= \frac{2}{\sqrt{6}} [\gamma_{k,l} (\mathbf{G}_{k,l})|_y (\mathbf{G}_{k,l})|_x + \gamma_{k-l,k} (\mathbf{G}_{k-l,k})|_y (\mathbf{G}_{k-l,k})|_x + \\ &\quad \gamma_{-l,k-l} (\mathbf{G}_{-l,k-l})|_y (\mathbf{G}_{-l,k-l})|_x], \end{aligned} \quad (14b)$$

$$(\theta_{y,x})_{k,l}^{0,0} = (\theta_{x,y})_{k,l}^{0,0}, \quad (14c)$$

$$(\theta_{y,y})_{k,l}^{0,0} = -\frac{2}{\sqrt{6}} [\gamma_{k,l} (\mathbf{G}_{k,l})_x^2 + \gamma_{k-l,k} (\mathbf{G}_{k-l,k})_x^2 + \gamma_{-l,k-l} (\mathbf{G}_{-l,k-l})_x^2], \quad (14d)$$

$$(\theta_{x,x})_{0,0}^{m,n} = (\theta_{x,y})_{0,0}^{m,n} = (\theta_{y,x})_{0,0}^{m,n} = (\theta_{y,y})_{0,0}^{m,n} = 0, \quad (15)$$

$$M_{0,0}^{0,0} = 0, \quad (16)$$

$$N_{0,0}^{0,0} = k_0 \varepsilon_{0,0}, \quad (17)$$

其中

$$\mathbf{W}_{\alpha,\beta} = \gamma_{\alpha,\beta} \mathbf{G}_{\alpha,\beta}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{k,l}^{m,n} &= \mathbf{W}_{m-l,n-l} + \mathbf{W}_{m-n,k,m-l} + \mathbf{W}_{-n-k,m-n-l} + \mathbf{W}_{-m-k,-n-l} + \\ &\quad \mathbf{W}_{n-m-k,-m-l} + \mathbf{W}_{n-k,n-m-l}, \end{aligned} \quad (19)$$

计算中发现, 计算公式(1)中的 $[M + N + \theta_{x,x}]$ 部分就可以得到一个解, 结果与用上面完整的矩阵求解,

有效传播常量只在小数点第六位不同, 并且可以使矩阵的维数进一步减小 $1/2$ 。

3 计算结果分析

六角光子晶体的截面结构如图 1 所示,其中 Λ 为晶格常量, R 为空气孔的半径,周围是 SiO_2 ,它的色散关系如下:

$$\epsilon = 1.0 + \sum_i \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0i}^2}, \quad (20)$$

式中 A_i, λ_{0i} 由表 1 给出。

Table 1 The parameters in function (2)

i	A_i	$\lambda_{0i}/\mu\text{m}$
1	0.6961663	0.0684043
2	0.4079426	0.1162414
3	0.8974794	9.8961610

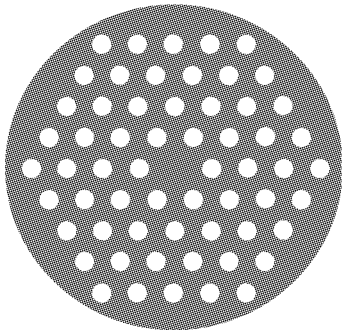


Fig. 1 The schematic of hexagonal photonic crystal lattice section

图 2 是在六角光子晶体光纤在波长为 $1.55 \mu\text{m}$ 时的色散情况,它的色散值范围为 $-523 \sim 176 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm})$,其中的黑线是零色散点,黑线上方为正色散区,下方是负色散区,根据这个图我们可以在一定范围内设计光子晶体光纤的色散,对黑线做多项式拟合,方程的表达式为

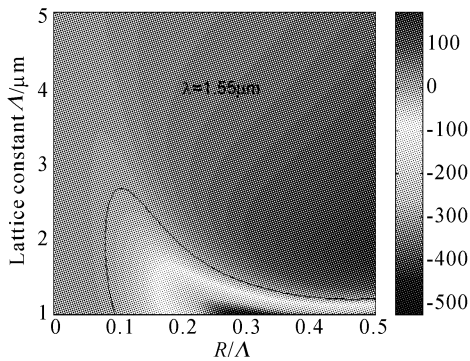


Fig. 2 The group velocity dispersion ($\text{ps}/\text{km} \cdot \text{nm}$), when the wavelength $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, the black line denotes the zero dispersion

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{\Lambda} &= \sum_{i=0}^5 P_i \Lambda^{5-i}, & \frac{R}{\Lambda} &\geq 0.105 \\ \Lambda &= \sum_{i=0}^7 Q_i \left(\frac{R}{\Lambda}\right)^{7-i}, & \frac{R}{\Lambda} &\geq 0.105 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中的系数 P_i, Q_i 列于表 2,图 3 是取晶格常量为 $2.0 \mu\text{m}$ 时的色散关系,此时的零色散曲线有两条,一条半径位于 $0.3 \sim 0.4 \mu\text{m}$ 之间,另一条位于 $0.1 \sim 0.2 \mu\text{m}$ 之间,他们很接近直线。 $1.55 \mu\text{m}$ 波长的零色散点所对应的半径分别为 $0.38 \mu\text{m}$ 和 $0.16 \mu\text{m}$ 。图 4 是将半径与晶格常量的比值固定为 $0.085 \mu\text{m}$ 的色散关系,波长较短时色散为负,较长时为正,当半径与晶格常量的比值增加到一定程度,则色散关系将倒过来,波长较短时色散为正,较长时为负。

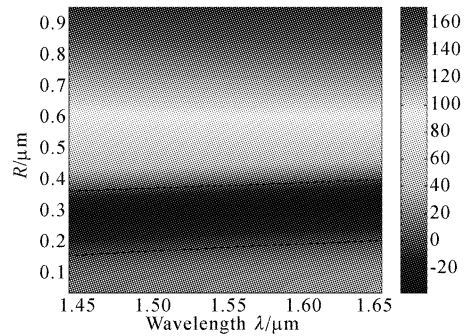


Fig. 3 The group velocity dispersion relation ($\text{ps}/\text{km} \cdot \text{nm}$), when the lattice constant $\Lambda = 2.0 \mu\text{m}$, two black lines denote the zero dispersion

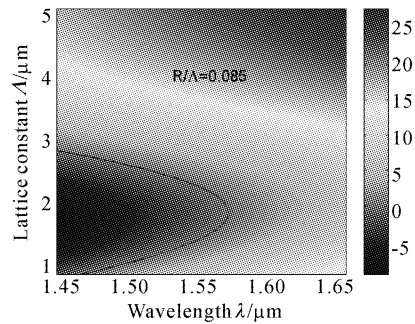


Fig. 4 The group velocity dispersion relation ($\text{ps}/\text{km} \cdot \text{nm}$), when the ratio of radius to lattice is 0.085

Table 2 The parameter in the function (21)

i	P_i	Q_i
0	0.08459628703899	38149.9998068354
1	-1.03494374746474	-89436.9438267407
2	5.34233193762314	87851.2912886687
3	-15.06591398641494	-46693.8288663361
4	25.03995265251056	14410.0650571907
5	-24.48334378123108	-2542.0035912515
6	12.98902774611347	225.7960173183
7	-2.77304117361276	-5.0200485836

结论 如果已知光子晶体光纤的模式对称性,就可根据模式的对称性选择适当的展开函数,可以使计算量大大减少,对六角结构光子晶体光纤来说,矩阵的维数可以减小到近 1/6,如果只计算 $[M+N+\theta_{x,x}]$ 项,结果几乎相同,矩阵的维数可以减小到 1/12。我们研究了六角结构的光子晶体光纤的色散特性,得到了波长在 1.55 μm 处色散为零时,光子晶体光纤的结构参量所满足的方程。零色散曲线以下是负色散区,以上是正色散区。我们可以依此,在一定程度上设计光子晶体光纤的结构。

参 考 文 献

- 1 Ferrando A, Silvestre E, Miret J J *et al.*. Full-vector analysis of a realistic photonic crystal fiber. *Opt. Lett.*, 1999, **24**(5):276~278
- 2 Mogilevtsev D, Birks T A, Russell P S J. Group-velocity dispersion in photonic crystal fibers. *Opt. Lett.*, 1998, **23**(21):1662~1664
- 3 Knight J C, Birks T A, Russell P S J *et al.*. Properties of photonic crystal fiber and the effective index model. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1998, **15**(3):748~752
- 4 Ouzounov D, Homoelle D, Zipfel W *et al.*. Dispersion measurements of microstructured fibers using femtosecond laser pulses. *Opt. Commun.*, 2001, **192**(1):219~223
- 5 Cregan R F, Mangan B J, Knight J C *et al.*. Single mode photonic band gap guidance of light in air. *Science*, 1999, **285**(5433):1537~1539
- 6 Steel M J, Osgood R M. Polarization and dispersive properties of elliptical-hole photonic crystal fibers. *J. Lightwave Technol.*, 2001, **19**(4):495~503
- 7 Eggleton B J, Westbrook P S, White C A *et al.*. Cladding-mode-resonances in air-silica microstructure optical fiber. *J. Lightwave Technol.*, 2000, **18**(8):1085~1099

Study of Dispersion in Photonic Crystal Fiber Using Mode Symmetry

Song Junfeng^{1,2} Wang Haisong² Zhang Jian² Yu Shuo²
Wang Lijun¹ Xu Wu¹ Du Guotong²

1 Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,
The Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022
2 The State Key Laboratory of Integrated Optoelectronics, Department
of Electronic Engineering, Jilin University, Changchun 130023

(Received 26 April 2002; revised 22 July 2002)

Abstract: The mode symmetry can be obtained according to the symmetry of photonic crystal fiber. Optical field can be developed by using fundamental function with the same symmetry, the calculation will be simplified by using suitable spread function with same symmetry. The dispersion of hexagonal photonic crystal fiber is studied, and the fit polynomial functions are derived by which the parameter of structure can meet and the dispersion can be zero at 1.55 μm wavelength.

Key words: guiding wave optics; photonic crystal fiber; dispersion of fiber; mode symmetry