

文章编号: 0253-2239(2003)06-0756-5

自适应光学系统的最优斜率复原算法*

李新阳 姜文汉

(中国科学院光电技术研究所自适应光学研究室, 成都 610209)

摘要: 分析了自适应光学系统的波前斜率校正效果,综合大气湍流扰动和测量噪声的统计特性,在最小二乘复原算法的基础上推导得出一种形式简洁、易于实际操作的最优斜率复原算法。在大气湍流波前扰动条件下,对这种最优斜率复原算法的补偿效果和工作稳定性进行了计算研究。

关键词: 自适应光学系统; 最优斜率复原算法; 最小二乘复原算法; 大气湍流; 测量噪声

中图分类号: TP202⁺.7 文献标识码: A

1 引 言

在自适应光学(AO)系统中,根据波前探测器的子孔径斜率信号计算变形镜等波前校正器驱动电压信号的过程称为波前复原^[1]。波前复原算法的优劣对自适应光学系统校正效果的影响很大。实际系统中通常采用的复原算法是区域法。如最小二乘法和直接斜率法^[2~5]就是一种较简单的区域复原算法,在多数工作条件下可以得到较好效果。在某些比较复杂的工作环境下,如测量噪声严重、工作稳定性要求较高的情况下,需要采用较高级的复原算法。有学者提出采用模式法,即通过对模式基底函数的灵活选择,使自适应光学系统在各种复杂环境下都能较好地工作^[6~11]。但模式复原算法结构复杂、运算量大、调整因素多,对实际系统的依赖性强,具体实现起来不如区域法便捷,所以模式法在实际应用中较少采用^[9~11]。国内外学者发现,在传统区域法的基础上进行优化,考虑校正对象和测量噪声等工作环境的变化,可以提高区域法的校正效果和对环境的适应能力。Wallner^[2], Wild^[3]等根据大气湍流波前扰动的时间和空间结构特性,再考虑自适应光学系统的波前校正方式,各自提出了理论上的最优复原算法,在一定条件下可以使系统达到最优波前校正效果。但这些方法都具有算法结构复杂、考虑因素过多等缺点,在实际系统上实现困难、不易操作。

由于自适应光学系统的空间优化问题和时间优化问题可以通过对复原算法和控制算法的优化分别

解决。所以本文不考虑自适应光学系统的时间补偿特性,仅仅考虑影响系统空间校正特性的复原算法,并根据自适应光学系统的波前斜率校正模型,综合大气湍流扰动和测量噪声的特性,经过推导得到了一种形式简洁、易于实际操作的最优斜率复原算法,并对这种最优斜率复原算法的有效性进行计算研究。

2 最优斜率复原算法

2.1 最优斜率复原算法的推导

现代自适应光学系统中,通常采用的哈特曼型或剪切干涉仪型波前传感器,都是通过子孔径斜率的变化反映波前畸变。在系统设计时,通常将变形镜等波前校正器的校正能力与波前探测器的探测能力相匹配。在自适应光学系统能够探测和能够校正的范围内,可以认为传感器的波前斜率信号与波前畸变信号是一一对应的。同时又因为两者间存在线性关系,所以自适应光学波前校正系统可以简化为波前斜率校正模型。本文只研究影响自适应光学系统空间补偿能力的复原算法问题,不考虑自适应光学系统的控制算法和时间校正问题。在这种情况下,自适应光学系统的数学模型如图 1 所示。

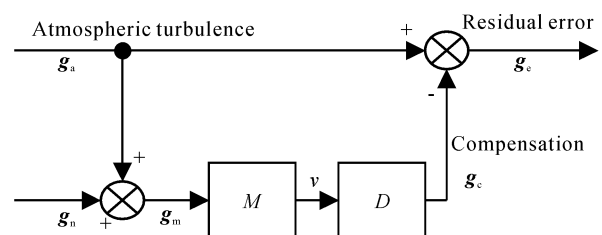


Fig. 1 The block diagram of the adaptive optical wavefront gradient compensation model

* 国家高技术研究发展计划专项经费资助课题。

E-mail: xyli@ioe.ac.cn

收稿日期: 2002-03-20; 收到修改稿日期: 2002-05-27

其中 \mathbf{g}_a 是与大气湍流波前扰动对应的子孔径斜率向量, \mathbf{g}_c 是与自适应光学系统产生的补偿波前对应的子孔径斜率向量, \mathbf{g}_e 是与补偿后残余波前对应的子孔径斜率向量, 三者间满足一个基本的补偿关系

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g}_a - \mathbf{g}_c, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_{2m}]^T$ 是子孔径斜率向量, m 是波前传感器的子孔径个数, 上标 T 表示矩阵或向量的转置。在波前探测过程中还不可避免地会引入探测噪声

$$\mathbf{g}_m = \mathbf{g}_a + \mathbf{g}_n, \quad (2)$$

其中 \mathbf{g}_n 为波前斜率测量噪声向量。自适应光学系统中的波前复原过程为

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}\mathbf{g}_m, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ 为波前校正器(如变形镜)的驱动器控制电压向量, n 是驱动器个数。通常 $m \approx n$ 且 $2m > n$ 。上式中 $n \times 2m$ 维的长方形 \mathbf{M} 矩阵代表了复原算法, 又称为复原矩阵, 这是本文讨论的问题核心。

自适应光学系统中波前传感器各个子孔径的波前斜率与波前校正器各个驱动器的控制电压间存在一个线性响应关系:

$$\mathbf{g}_c = \mathbf{D}\mathbf{v}, \quad (4)$$

其中 $2m \times n$ 维的常量矩阵 \mathbf{D} 又称为影响函数矩阵, 是联系波前校正器和波前探测器的桥梁。当自适应光学系统的布局形式和各个器件的响应关系一旦确定, 矩阵 \mathbf{D} 的值也就确定了, 并且可以用多种实验方法精确测量得到。根据图 1, 残余斜率向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_e &= \mathbf{g}_a - \mathbf{D}\mathbf{M}(\mathbf{g}_a + \mathbf{g}_n) = \\ &(\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{M})\mathbf{g}_a - \mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{g}_n, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 \mathbf{I} 是 $2m \times 2m$ 维的单位矩阵。通常斜率测量噪声和湍流畸变斜率信号间互不相关, 则残余斜率间的相关矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{g_e} = \langle \mathbf{g}_e \mathbf{g}_e^T \rangle &= (\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{M})\mathbf{C}_{g_a}(\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{M})^T + \\ &\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{C}_{g_n}(\mathbf{D}\mathbf{M})^T, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示信号的系综平均, $\mathbf{C}_{g_a} = \langle \mathbf{g}_a \mathbf{g}_a^T \rangle$ 是大气湍流畸变波前斜率间相关矩阵, $\mathbf{C}_{g_n} = \langle \mathbf{g}_n \mathbf{g}_n^T \rangle$ 是斜率测量噪声间的相关矩阵。两个相关矩阵对角线上元素值就是相应的大气湍流畸变波前斜率方差和测量噪声方差。

矩阵 \mathbf{C}_{g_e} 的值反映了经自适应光学系统校正后各个波前斜率的方差和协方差。矩阵 \mathbf{C}_{g_e} 各个元素的值越小, 校正效果就越好。(6) 式中相关矩阵 \mathbf{C}_{g_e} 是复原矩阵 \mathbf{M} 的函数。与最小二乘算法的推导过程

类似^[14], 为了得到矩阵 \mathbf{C}_{g_e} 的极值, 把(6)式对复原矩阵 \mathbf{M} 求导一次并令导数为零, 解方程得到使矩阵 \mathbf{C}_{g_e} 为极值时的最优复原矩阵 \mathbf{M}_{opt} :

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{g_e}}{\partial \mathbf{M}} = 2\mathbf{D}^T \mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{C}_{g_n} - 2\mathbf{D}^T(\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{M})\mathbf{C}_{g_a} = 0, \quad (7)$$

解得

$$\mathbf{M}_{opt} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{C}_{g_a} (\mathbf{C}_{g_a} + \mathbf{C}_{g_n})^{-1}, \quad (8)$$

矩阵 \mathbf{C}_{g_e} 对复原矩阵 \mathbf{M} 的两次求导结果为 $2\mathbf{D}^T \mathbf{D}(\mathbf{C}_{g_a} + \mathbf{C}_{g_n})$, 其对角线上的元素均不小于零。所以(8)式得到复原矩阵 \mathbf{M}_{opt} 使校正残余波前斜率方差为最小, 即斜率校正效果最好, 在本文中称为最优斜率复原算法。在最优斜率复原算法条件下, 残余斜率相关矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{g_e} |_{\mathbf{M}_{opt}} &= (\mathbf{C}_{g_a} \mathbf{C}_{g_n} \mathbf{C}_{g_a}^T + \mathbf{C}_{g_n} \mathbf{C}_{g_a} \mathbf{C}_{g_n}^T) \times \\ &[(\mathbf{C}_{g_a} + \mathbf{C}_{g_n})(\mathbf{C}_{g_a} + \mathbf{C}_{g_n})^T]^{-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 分析和讨论

如果没有测量噪声, 即 $\mathbf{C}_{g_n} = 0$, (8)式将变为

$$\mathbf{M}_{opt} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T, \quad (10)$$

这就是最小二乘复原算法。在矩阵理论中, 长方 \mathbf{D} 矩阵的伪逆矩阵记为 \mathbf{D}^+ 。 $(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T$ 是求取伪逆矩阵 \mathbf{D}^+ 的一种算法。另外还有数值稳定性较好的奇异值分解(SVD)等方法。所以(8)式和(10)式也可分别记作

$$\mathbf{M}_{opt} = \mathbf{D}^+ \mathbf{C}_{g_a} (\mathbf{C}_{g_a} + \mathbf{C}_{g_n})^{-1}, \quad (11)$$

或

$$\mathbf{M}_{opt} = \mathbf{D}^+ \quad \text{当 } \mathbf{C}_{g_n} = 0, \quad (12)$$

这时(12)式也称作直接斜率复原算法。可见最小二乘复原算法或直接斜率复原算法是理想情况下最优斜率复原算法的特例。

通常测量噪声是互不相关的白噪声序列, 并且各个斜率噪声的方差相同, 即

$$\mathbf{C}_{g_n} = \mathbf{I}\sigma_{g_n}^2, \quad (13)$$

其中 $\sigma_{g_n}^2$ 为斜率测量噪声方差, \mathbf{I} 为单位对角矩阵。在实际工作中, 噪声水平的大小通常用信噪比(SNR)指标评价。在本文中, 斜率测量信号的信噪比定义为

$$R_{SN} = \sigma_{g_a}^2 / \sigma_{g_n}^2, \quad (14)$$

其中 $\sigma_{g_n}^2 = \text{tr}(\mathbf{C}_{g_n}) / (2m)$ 为湍流造成的各个波前斜率方差的均值, 符号 $\text{tr}(\cdot)$ 表示求矩阵的迹。定义波前斜率校正效果指数为

$$\gamma = \sigma_{g_e}^2 / \sigma_{g_a}^2 = \text{tr}(\mathbf{C}_{g_e}) / \text{tr}(\mathbf{C}_{g_a}), \quad (15)$$

那么指数 γ 越小, 校正效果越好。通常波前传感器各个子孔径的形状、大小、焦距等参量是一样的。根据各态历经原理, 各个子孔径斜率方差的值相同。为了

简化讨论,假设 $C_{ga} = I\sigma_{ga}^2$,即不考虑波前斜率间的协方差。这时将(13)式、(14)式代入(8)式,得到

$$\mathbf{M}_{\text{opt}} = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T (1 + R_{\text{SN}})^{-1}.$$

可见最优斜率复原算法不随湍流强弱变化,如不随大气相干长度 r_0 变化,但随系统的信噪比大小变化。在这种最优复原条件下根据(9)式、(15)式得到

$$\sigma_{ge}^2 |_{\mathbf{M}_{\text{opt}}} = \sigma_{gn}^2 R_{\text{SN}} / (R_{\text{SN}} + 1),$$

或

$$\gamma = (R_{\text{SN}} + 1)^{-1}, \quad (16)$$

可见自适应光学系统的最优校正效果大致与系统的波前斜率测量信噪比水平成反比。

3 最优斜率复原算法的性能计算

3.1 大气湍流畸变波前斜率的相关矩阵

大气湍流的主要成分是 x 和 y 两个方向上的波前整体倾斜。在自适应光学系统中,通常用一个高速倾斜反射镜专门校正波前整体倾斜像差,只用变形镜校正其余高阶像差。这样做的好处是可以减小变形镜的校正需求量。自适应光学系统中的波前复原问题也转变为对去除了波前整体倾斜的湍流畸变波前斜率信号进行复原。对于科尔莫哥洛夫(Kolmogorov)湍流,去除了整体倾斜后的波前畸变相位结构函数为

$$D_\phi(x, y) = 6.88(r/r_0)^{5/3} [1 - (r/D)^{1/3}], \quad (17)$$

其中 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ 为空间两点间距离, r_0 为大气相干长度, D 为望远镜口径。沿用 Silbaugh 等^[12] 对湍流大气中方形子孔径斜率结构函数和相关函数的分析,并考虑了子孔径平滑效应,得到去除波前整体倾斜像差后,科尔莫哥洛夫湍流下两个相距 $(\Delta x, \Delta y)$ 的方形子孔径间 x 方向斜率间的相关性为

$$\begin{aligned} C_{gx}(\Delta x, \Delta y) &= 6.88d^{-2}(d/r_0)^{5/3}(\lambda/2\pi)^2 \times \\ &\int du \operatorname{tr} i(u) (-2|\Delta x, u + \Delta y|^{5/3} + \\ &|\Delta x - 1, u + \Delta y|^{5/3} + |\Delta x + 1, u + \Delta y|^{5/3}) - \\ &6.88d^{-2}(d/r_0)^2(r_0/D)^{1/3}(\lambda/2\pi)^2 \times \\ &\int du \operatorname{tr} i(u) (-2|\Delta x, u + \Delta y|^2 + \\ &|\Delta x - 1, u + \Delta y|^2 + |\Delta x + 1, u + \Delta y|^2), \quad (18) \end{aligned}$$

其中 $\operatorname{tr} i(u) = \begin{cases} 1 - |u| & |u| \leq 1 \\ 0 & |u| > 1 \end{cases}$ 为三角函数。同理可以得到不同子孔径 y 方向斜率间的相关性 $C_{gy}(\Delta x, \Delta y)$ 。由于 x 和 y 方向互相正交,只有相同方向上的子孔径斜率间相关性才不为零。从而可以

得到一定子孔径分布情况下湍流畸变波前的斜率相关矩阵 C_{ga} 。

3.2 对比计算结果

下面把不同工作环境下最优斜率复原算法的校正效果与最小二乘复原法的校正效果进行对比。斜率测量噪声是互不相关的白噪声,相关矩阵为 $C_{gn} = I\sigma_{gn}^2$ 。噪声方差的值由信噪比大小确定。这样根据(8)式就可以得到各种湍流和噪声条件下的最优复原矩阵。

除了校正效果之外,影响自适应光学系统校正效果的一个主要因素是工作稳定性。在同样的工作环境下,变形镜的驱动器电压方差越小,系统工作越稳定。根据(3)式,变形镜驱动器电压间的相关矩阵为

$$\mathbf{C}_v = \mathbf{M}(\mathbf{C}_{ga} + \mathbf{C}_{gn})\mathbf{M}^T, \quad (19)$$

则驱动器控制电压的均方差为 $\sigma_v^2 = \operatorname{tr}(\mathbf{C}_v)/n$ 。

本文的计算是针对实际 61 单元自适应光学系统^[4,9]进行的,系统的布局关系见图 2。由于望远镜次镜造成 28% 的中心遮拦,变形镜中心的驱动器不起作用,实际有效驱动器 60 个,有效子孔径 48 个。变形镜驱动器的响应函数为高斯型,驱动器间的交连系数为 10%。

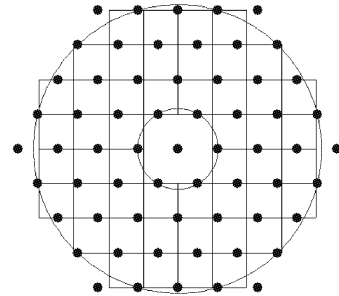


Fig. 2 Configuration of DM actuators (spots) and HS subapertures (squares) in 61-element AO system. Center obstacle of the telescope is 28%

首先根据变形镜驱动器和子孔径间的位置关系,计算得到了系统响应矩阵 \mathbf{D} 。然后在不同信噪比工作条件下,对比最优斜率复原算法与最小二乘复原算法的校正效果和稳定性,即校正效果指数和控制电压方差,分别如图 3(a)、图 3(b)所示。可见在信噪比较小的条件下,最优斜率复原算法的校正效果和控制稳定性都明显优于最小二乘复原算法。随着信噪比提高,即工作环境改善,两种复原算法间的差异逐渐减小。在信噪比大于 100 的良好工作环境下,两种复原算法趋向一致,没有明显差异。

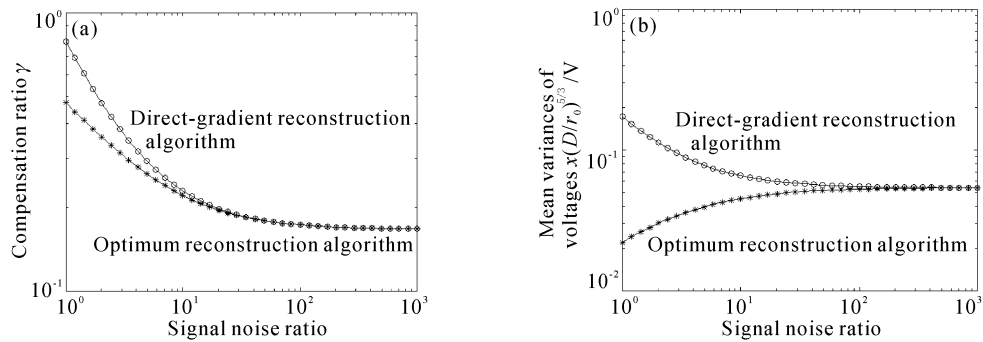


Fig. 3 Comparison of the optimal-gradient reconstruction algorithm with the least-square reconstruction algorithm.

(a) is for the compensation ratio; (b) is for the mean variances of control voltages

结论 根据自适应光学系统的波前斜率校正模型,综合大气湍流扰动和测量噪声的统计特性,推导出一种最优斜率复原算法,并在大气湍流扰动条件下,将这种最优斜率复原算法与常用的最小二乘复原算法进行了对比计算。结果表明,在噪声水平较高的工作环境下,最优斜率复原算法的校正效果和稳定性都明显优于最小二乘复原算法。

这种最优斜率复原算法保留了区域复原算法结构简单、计算方便等优点,同时增加了区域法对工作环境的适应能力,提高了区域法的校正效果。另外需要说明的是,这种最优斜率复原算法具有通用性和可操作性:不局限于大气湍流补偿,还可以用于其他应用场景。在实际应用场景下,首先测量噪声工作环境下波前扰动的斜率相关矩阵 C_{gn} ,这时的测量结果叠加有测量噪声。如果是白噪声,那么可用文献[13]中提出的功率谱方法等得到实际测量噪声方差 σ_{gn}^2 及测量噪声相关矩阵 $C_{gn} = I\sigma_{gn}^2$;否则需要用适当方法得到测量噪声相关矩阵 C_{gn} 。然后就可以得到真实波前扰动信号的斜率相关矩阵为 $C_{ga} = C_{gn} - C_{gn}$ 。然后用(8)式就可以得到这种工作环境下的最优斜率复原矩阵。

由于自适应光学系统的空间优化问题和时间优化问题可以通过对复原算法和控制算法的优化分别解决。所以本文提出的最优斜率复原算法配合优化的控制算法可以充分发挥出自适应光学系统的性能。下一步的工作将是在合适的条件下,对这种最优斜率复原算法的性能进行实验研究。

参 考 文 献

- 1 Hardy J W. *Adaptive Optics for Astronomical Telescopes*. New York: Oxford University Press, Inc., 1998. 266~307
- 2 Wallner E P. Optimal wavefront correction using slope

- measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 1983, **73**(10):1771~1776
- 3 Wild W J. Innovative wavefront estimators for zonal adaptive optics systems. Chapter 6 of the "Adaptive optics engineering handbook". Tyson R K edited. New York: Marcel Dekker, Inc., 2000. 199~229
- 4 Li Xinyang, Wang Chunhong, Xian Hao *et al.*. Control effect analysis for a direct-gradient wavefront reconstruction algorithm. *Opto-Electronic Engineering* (光电工程), 1998, **25**(12): 9~14 (in Chinese)
- 5 Yan Haixing, Zhang Deliang, Li Shushan. Numerical simulation of an adaptive optics system: Direct wavefront gradient control method. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1997, **17**(6):758~764 (in Chinese)
- 6 Gendron E. Modal control optimization in an adaptive optics system. ICO-16 satellite conference on active and adaptive optics. 1993, 186~191
- 7 Gaffard J P, Gosselin P, Ledanois G. Adaptive optics: choices and optimizations. *Proc. SPIE*, 1993, **1920**:29~41
- 8 Yan Haixing, Chen She, Zhang Deliang *et al.*. Numerical simulation of an adaptive optics system by means of modal wavefront reconstruction. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1998, **18**(1):103~108 (in Chinese)
- 9 Li Xinyang. *Optimization of modal reconstruction algorithm and control algorithm in adaptive optics system* (自适应光学系统模式复原算法和控制算法的优化研究). [Dr Thesis]. Chengdu: Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, 2000 (In Chinese)
- 10 Navetta W J, Looze D, Hippler S *et al.*. Real-time modal control implementation for adaptive optics. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(21):4586~4597
- 11 Gendron E, Lena P. Astronomical adaptive optics II. Experimental results of an optimized modal control. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 1995, **111**:153~167
- 12 Silbaugh E E, Welsh B M, Roggemann M C. Characterization of atmospheric turbulence phase statistics using wavefront slope measurements. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(12):2453~2460
- 13 Li Xinyang, Jiang Wenhan. Analysis of the residual servo

variance for an adaptive optics system. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2000, **20** (10): 1328 ~ 1334 (in Chinese)

14 Dai Guanzhong, Tong Ming'an. *Introduction to Modern Control Theory* (现代控制理论导论). Beijing: National Deference Industry Press, 1998. 212~288 (in Chinese)

Analysis of the Optimal-Gradient Reconstruction Algorithm Used in Adaptive Optical Systems

Li Xinyang Jiang Wenhan

(*Lab on Adaptive Optics, Institute of Optics & Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209*)

(Received 20 March 2002; revised 27 May 2002)

Abstract: In this paper, the compensation effects of Hartmann sub-aperture gradients in an adaptive optics (AO) system were analyzed. A kind of optimal-gradient reconstruction algorithm was deduced from normal least-square (LS) reconstruction algorithm by considering the statistical characteristics of disturbed wavefront and measurement noise. The optimal-gradient reconstruction algorithm is concise and effective in practice. The compensation effect and the stability were calculated in the condition of atmospheric turbulence.

Key words: adaptive optics system; optimal-gradients reconstruction algorithm; least-square reconstruction algorithm; atmospheric turbulence; measurement noise

全国第 11 次光纤通信暨第 12 届集成光学学术会议 征文通知 (第二轮)

本次会议由中国通信学会光通信委员会、中国电子学会通信学分会、中国光学学会纤维光学与集成光学专业委员会联合主办,南京邮电学院、南京富士通通信设备有限公司等单位承办。

本次会议将于 2003 年 10 月 8 日~10 日在南京举行。会议将邀请多位中国科学院院士、中国工程院院士以及国内著名的光通信专家和企业家到会作报告;欢迎全国各高等院校、科研部门的科技人员投稿,展示最新研究成果;欢迎规划、设计、建设、运行维护部门的工程技术人员投稿,交流实际工作中的宝贵经验;欢迎相关企业、运营商到会介绍新产品、新业务。

一 会议征文范围

1 网络与系统技术

4 光无源器件与集成光路

2 光纤与光缆

5 光纤传感

3 光有源器件与光电集成

6 光纤通信仪表、测量技术与其它

二 会议征文只接受电子文档,征文具体范围、要求,请看南京邮电学院校园网征文通知。

<http://www.njupt.edu.cn/pnjupt/org/Department6/lxzy/>

三 征文截稿日期:2003 年 6 月 30 日。

四 通信地址:江苏南京新模范马路 66 号

邮政编码:210003

联系人:南京邮电学院光信息技术系 张小英

电话/传真:(025)3492308

E-mail 地址:zhangxy@njupt.edu.cn

南京邮电学院科技处 黄金仙

电话:(025)3492248

全国第 11 次光纤通信
暨第 12 届集成光学学术会议筹备组
2003 年 3 月 5 日