

文章编号: 0253-2239(2003)05-0587-06

高斯光束计算平板波导自由传输区远场分布及其修正

周勤存 戴道铤 盛钟延 何建军 何赛灵

(浙江大学现代光学仪器国家重点实验室 光及电磁波研究中心, 杭州 310027)

摘要: 对近轴近似条件下求解亥姆霍兹方程得到的高斯光束显式传播公式做了分析,同时,基于基尔霍夫衍射理论,在非涅耳近似的条件下给出了相应的高斯光束在远场的传播公式,在此基础上,对近轴近似条件做出了定量分析,给出了这个近似条件引入的误差,提出了一种计算高斯光束远场分布的修正方法,并采用有限差分-光束传播方法(FD-BPM)来检验各种方法的准确性。把这种修正方法应用到平面光集成波导器件,如阵列波导光栅(AWG)、蚀刻衍射光栅(EDG)等器件的设计和模拟中,可以大大降低工作的复杂性,同时可以得到精确的结果。

关键词: 导波光学; 高斯光束; 基尔霍夫衍射理论; 有限差分-光束传播方法; 阵列波导光栅; 集成光学器件
中图分类号: TN814 文献标识码: A

1 引 言

波分复用技术(WDM)是现代光纤通信中的一项关键技术,是提高通信容量的一种行之有效的方法。波分复用器件是实现波分复用技术的基础,作为平面光集成波导波分复用器,阵列波导光栅(AWG)^[1~4]、蚀刻衍射光栅(EDG)^[5,6]是波分复用器件中最有前途的成员。

图 1(a)是典型的阵列波导光栅结构设计,主要由波导阵列、两个自由传输区(free propagation region, FPR) FPR₁、FPR₂,以及输入/输出波导等几部分组成。输入/输出波导连接自由传输区的一端,均匀地排列在一个半径为 R 的罗兰圆(Rowland Circle)上,如图 1(b)所示。每条阵列波导正对中心输入/输出波导出射端位置 O ,均匀地排列在以 O 为圆心、半径 $R_g = 2R$ 的光栅圆周(Grating circle)上,这种设计采用的即是罗兰圆结构设计。

在阵列波导光栅器件设计中,罗兰圆结构的确定是以点源入射作为设计基础的,输入光在自由传输区中的等相面是以输入波导出射端位置为球心的球面,其任意点引入的相位只与该点和输入波导出射端位置的光程差成正比。然而实际的入射光源是从输入波导引入的,其模式分布可以由高斯光束分布来近似表示,高斯光束在自由传输区中传输可以

由简单的显式公式表示。正是由于高斯光束传播公式的简单性,在阵列波导光栅等平面光集成波导器件的模拟中,人们广泛的采用基于近似高斯光束的模拟方法^[7~9]。这种方法可以快速的得到入射光在阵列波导光栅入口端面上的远场分布,从而大大地简化了模拟的复杂性,提高模拟计算的速度。然而,在模拟中,如果根据这一显式公式来计算远场的相

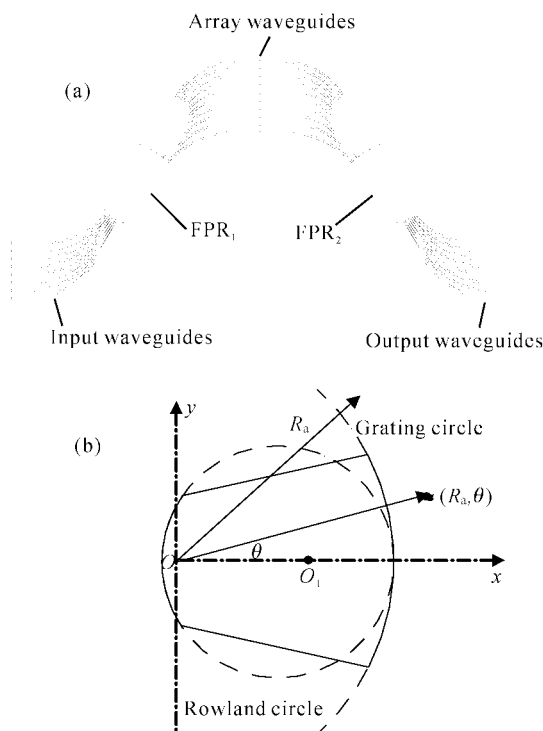


Fig. 1 (a) Configuration for an AWG DEMUX; (b) Rowland circle construction of an AWG in FPR

* 高等学校重点实验室访问学者基金、浙江省科技计划(001101027)资助课题。

E-mail: zhouqc@coer.zju.edu.cn

收稿日期:2002-04-28; 收到修改稿日期:2002-07-15

位时,得到的相位并不是简单的只和光程差成正比。这就造成了采用近似高斯光束来模拟器件时,其相位的计算和器件设计原则的不一致。阵列波导光栅的基本原理是基于相位的相干加强,相位误差是影响器件性能的一个最主要因素。

本文主要研究了这一问题,首先在近轴条件下推导了高斯光束在二维自由空间的显式传播公式;然后在基尔霍夫衍射理论的基础上,在非涅耳近似的条件下给出了相应的高斯光束在远场的传播公式;在此基础上,对近轴近似条件做出了定量分析,给出了这个近似条件引入的误差,指出了用高斯光束显式传播公式计算远场相位时存在的问题。同时,提出了一种计算高斯光束远场分布的修正方法,并采用有限差分-光束传播方法验证了其正确性,根据这一方法把器件的设计和模拟统一起来,指出了设计原则的合理性。

2 高斯光束远场显式公式

2.1 近轴条件下求解亥姆霍兹方程

在二维自由空间中,对于电场 $\mathbf{E} = \mathbf{l}E(x, z)$ (其中 \mathbf{l} 为电场偏振方向的单位矢量),可以通过求解如下标量亥姆霍兹方程得到^[10,11]:

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (1)$$

其中 $k = n(2\pi/\lambda_0)$, λ_0 为真空中的波长, n 为自由空间的折射率。

假设 $E(x, z)$ 随着传播方向 z 轴的变化主要包含在指数形式的相位变化中,把 $E(x, z)$ 改写为 $E(x, z) = u(x, z)\exp(-jkz)$, 所以 $u(x, z)$ 沿着传播方向是缓变的,同时在近轴近似条件下,有如下关系:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|, \quad (2)$$

在忽略二次项 $\partial^2 u / (\partial z^2)$ 的情况下,可以得到如下微分方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2jk \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

求解(3)式,可以得到高斯光束的特解,其基模解可表示为

$$E(x, z) = A_0 \frac{w_0}{w} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \times \exp[-j(kz - \eta)] \exp\left(-j\frac{kx^2}{2R}\right), \quad (4)$$

其中

$$w^2 = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right], \quad R = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right],$$

$$\eta = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_0}$$

A_0 为常量。对其能量归一化,得到如下表达式

$$E(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \times \exp[-j(kz - \eta)] \exp\left(-j\frac{kx^2}{2R}\right), \quad (5)$$

2.2 由基尔霍夫衍射公式求解

从另一个角度,在基尔霍夫衍射理论基础上,在非涅耳近似的条件下可以得到高斯光束的远场显式传播公式^[12,13]。如图2所示,用高斯光束来近似波导的模式分布,即

$$E_M(x_1, 0) \approx E_G(x_1, 0) = \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x_1^2}{w_0^2}\right), \quad (6)$$

则从入射光在自由区域的远场分布可以通过如下二维基尔霍夫衍射公式计算得到:

$$E(x, z) = \frac{j}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} E_M(x_1, 0) \frac{\exp(-jkr)}{r} dx_1, \quad (7)$$

其中

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x_1)^2} = z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x - x_1)^2}{z^2} - \frac{1}{8} \frac{(x - x_1)^4}{z^4} + \dots \right].$$

在非涅耳近似条件下,取

$$r = z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x - x_1)^2}{z^2} \right],$$

代入(7)式得如下菲涅耳近似公式:

$$E(x, z) = \frac{j}{\lambda z} \exp(-jkz) \times \int_{-\infty}^{+\infty} E_M(x_1, 0) \exp\left[\frac{-jk}{2z}(x - x_1)^2\right] dx_1, \quad (8)$$

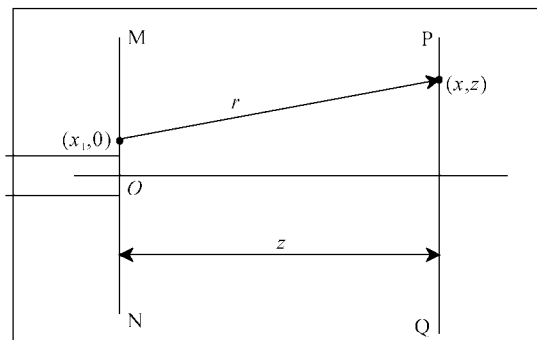


Fig. 2 Schematic diagram for calculating the far field from a planar waveguide

把(6)式代入(8)式,经过推导可以得到如下式子(见附录 A):

$$E(x, z) = \left(\frac{1}{w^2 \lambda^2 z^2} \frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \exp\left(j \frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \times \exp\left(-jkz - jk \frac{x^2}{2R} + j \frac{\eta}{2}\right), \quad (9)$$

在远场情况下, $z \gg z_0$, 所以 $\eta = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \approx \frac{\pi}{2}$, 把此关系式代入(9)式可得

$$E(x, z) = \left(\frac{1}{\lambda^2 z^2} \frac{2}{w^2 \pi} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \times \exp\left(-jkz - jk \frac{x^2}{2R} + j\eta\right), \quad (10)$$

考虑到在传输过程中能量守恒,对上式进行能量归一化即可得到高斯光束传播公式(5)。

2.3 对近似条件的讨论及显式公式的修正

我们可以看到,通过两种方法可以得到一致的显式公式,但是都是在一定的近似条件下得到的,且两者的近似条件应该是等价的。在亥姆霍兹方程的求解方法中要求满足近轴条件,即满足关系式(2),对于这个近似条件并没有定量的给出此近似引入的误差;但是在通过菲涅耳近似公式求解的方法中,我们可以对其近似条件引入的误差给出定量的分析,在此基础上,对引入的误差做适当的补偿,给出修正的公式。

在菲涅耳近似公式求解的方法中引入了两个误差:相位误差和振幅误差,相位误差主要体现在相位因子 $\exp(-jkr)$ 中 r 的近似,而振幅误差主要是在振幅因子中取 $r \approx z$ 引入的。在这里,主要考虑相位误差,它是影响阵列波导光栅器件性能的最主要因素。

在相位因子 $\exp(-jkr)$ 中 r 的近似忽略了其高阶项,在菲涅耳近似条件下,要求满足如下条件:

$$\frac{1}{8} k \frac{(x - x_1)^4}{z^3} \ll \pi, \quad (11)$$

考虑到在波导输出面上的初始场分布 $E_M(x_1, 0)$ 主要集中在一个很小的范围里,即 x_1 的取值比较小,所以我们可以得到:当 x 也很小时,此时条件(11)显然满足;但是当 x 比较大时,即偏离近轴的情况,其引入的相位误差 F 可近似为如下表达式:

$$F \approx \frac{1}{8} k \frac{x^4}{z^3}, \quad (12)$$

记 $\tan \theta = x/z$, 把上式改写为

$$F = F(z, \theta) = \frac{1}{8} kz \tan^4 \theta.$$

图 3(a)是在 z 取不同的固定值时的相位误差 F 随 θ

的关系,图 3(b)是在 θ 取不同的固定值时的相位误差 F 随 z 的关系。可以看出随着 θ 的增加,其引入的误差会显著增加,显然这是由于条件(11)不满足造成的;当 θ 比较大时,随着传输距离 z 的增加其引入的误差也会显著增大。总之,只有在 θ 比较小时,高斯光束远场的显式公式才会比较精确。

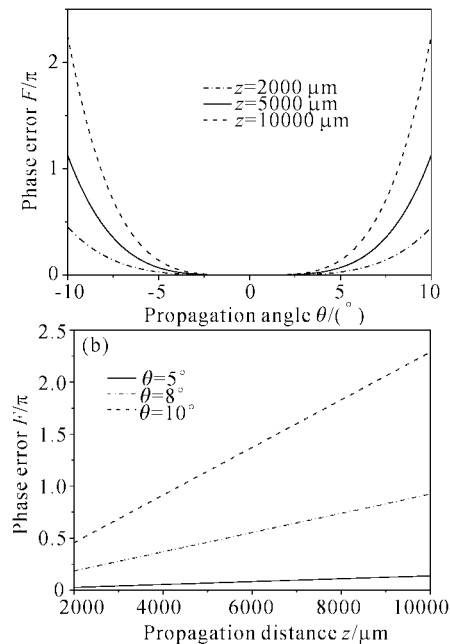


Fig. 3 (a) Phase error as θ varies for different position z ; (b) Phase error as z varies for different θ

基于上面的讨论,对高斯光束的显式公式作如下修正:

$$\bar{E}(x, z) = E(x, z) \exp\left(j \frac{1}{8} k \frac{x^4}{z^3}\right), \quad (13)$$

其中 $E(x, z)$ 的表达式见公式(5)。

3 结果验证及讨论

有限差分-光束传播方法(FD-BPM)^[14~17]是一种求解亥姆霍兹方程的数值方法,被广泛应用于光波导器件的模拟设计中,它可以分为旁轴光束传播方法和广角光束传播方法。旁轴光束传播方法和简单的高斯显式公式是在相同的旁轴近似条件下得到的,都要求满足关系式(2),所以由这两种方法计算得到的远场相位应该是一致的,下面给出的结果可以验证这一点;广角光束传播方法是旁轴光束传播方法的推广,它消除了近轴条件的限制,能准确的计算光束在大角度范围内的传播,所以可以采用广角光束传播方法来精确的计算远场的相位分布。在这里采用3阶帕德(Pade)近似的广角光束传播方法,

它可以在传播角度小于 $\pm 50^\circ$ 的范围内给出准确的计算结果,能很好满足文章中所研究的孔径范围 $\pm 10^\circ$,而这研究范围已经超出了近轴近似条件。

考虑入射光在阵列波导光栅的自由传播区的传播,如图 1(b)所示,入射光从中心波导 O 输入,计算光栅曲线(以 O 为圆心、半径 $R_a=5000 \mu\text{m}$ 的圆周)上的相位分布,输入光波长 λ 为 $1.55 \mu\text{m}$,自由空间折射率 N_s 取 1.46685。按照点源的设计原则,在这个圆周上的相位分布应该是等相位的。下面分别采用点源设计原则、简单的高斯光束远场显式公式、修正高斯光束远场显式公式及光束传播方法来计算这一相位分布,从而来验证简单公式的局限性及修正后公式的准确性。

在孔径为 $\pm 10^\circ$ 的范围内,各种方法计算得到的相对相位 $\Delta\phi(\theta)$ 和孔径角 θ 的关系如图 4 所示,其中相对相位 $\Delta\phi(\theta)$ 定义如下:

$$\Delta\phi(\theta) \equiv \phi(R_a, \theta) - \phi(R_a, 0), \quad (14)$$

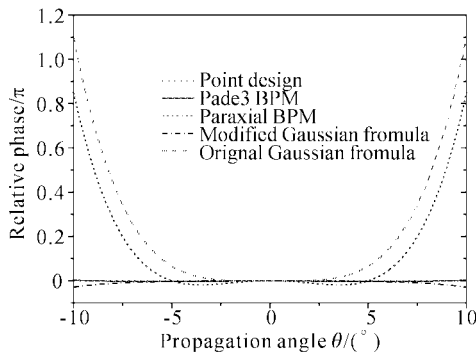


Fig. 4 Relative phase $\Delta\phi(\theta)$ calculated with different methods as θ varies

我们可以看出,由于旁轴光束传播方法和简单高斯光束的传播公式是在相同的旁轴近似条件得到的,所以两者计算得到的结果是基本一致的,随着孔径的增大,相对相位快速增大,在孔径为 10° 时,相对相位达到了 π 左右,它和按点源设计原则得到的等相位分布结果存在着很大偏差;3 阶柏德近似的光束传播方法消除了旁轴近似条件的限制,其计算得到的结果如图所示,可以看出在整个研究的孔径范围内,其相对相位均很小,可认为是 0,即该圆周上的相位是等相位分布的,这和按点源设计原则得到的结果是一致的,也就是说,点源设计的原则是合理的。修正的高斯光束传播公式得到的结果和 3 阶柏德近似的光束传播方法得到的结果是相符的,两者的偏差非常小,采用这种修正方法是有效的,同时这种修正方法又很简单,它只是增加了很小的计算量。

Table 1. Parameters for the designed AWG

Parameters	Symbols	Values
Number of channels	N_{ch}	80
Frequency channel spacing	Δf	100 GHz
Center wavelength	λ_0	$1.55575 \mu\text{m}$
Width of the waveguide	W	$5 \mu\text{m}$
Effective index of FPR	$n_{\text{FPR-eff}}$	1.466852
Effective index of waveguide	n_k	1.464184
Spot size of the mode	w_0	$3.9 \mu\text{m}$
Pitch of arrayed-waveguide	d_a	$8 \mu\text{m}$
Diffraction order	m	23
Number of the arrayed-waveguide	N_{AWG}	433
Length of the FPR	R_a	$10000 \mu\text{m}$

下面把这个修正的公式应用到阵列波导光栅器件的模拟中。按照点源设计的原则(即输入光在自由传输区中的等相面是以输入波导出射端位置为球心的球面,在任意点引入的相位只与该点和输入波导出射端位置的光程差成正比),设计了一阵列波导光栅器件,其具体参量如表 1 所示。分别采用简单的高斯光束公式及修正的公式对器件进行模拟,同时把得到的结果和按点源设计原则的模拟结果作比较,其结果如图 5(a)、图 5(b)所示。我们可以看出,采用简单高斯光束公式得到模拟结果和实际设计的结果有很大的偏差,而修正后的高斯光束公式的得

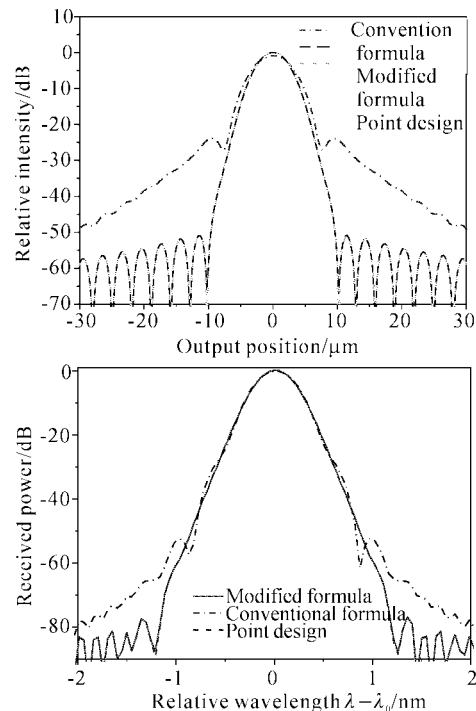


Fig. 5 (a) Relative intensity distribution in the image plane for the central channel calculated with different methods; (b) Spectrum response calculated with different methods

到的结果和实际设计的结果符合的很好,在图中两者的曲线基本上完全吻合。

总结 根据上面的讨论,可以得出如下结论,采用点源设计原则来设计阵列波导光栅器件是合理的,相反的,如果根据简单的高斯光束传播公式来设计器件,由于其旁轴近似条件的限制,反而会引入明显的误差,所以根据此公式来计算相位显然是不恰当的。但是通过对高斯光束传播公式作简单的修正后,可以得到和设计要求一致的结果,把这个修正后的高斯光束传播公式应用到阵列波导光栅等平面光集成波动器件的模拟中,可以保证模拟结果准确性的条件下,大大地降低模拟工作的复杂性。

参 考 文 献

- 1 Smit M K, Cor van Dam. Phasar based WDM devices: Principles, design and applications. *IEEE Quant. Electron.*, 1996, **32**(2):236~250
- 2 Takahashi H, Kazohiro Oda, Hiroma Toba. Transmission characteristics of arrayed waveguide $N \times N$ wavelength multiplexer. *J. Lightwave Technol.*, 1995, **13**(3):447~455
- 3 Kancko, Goh T, Yamada H *et al.*. Design and applications of silica-based planar lightwave circuits. *IEEE J. Selected Topics in Quant. Electron.*, 1999, **5**(5):1227~1236
- 4 He J J, Lamontagne B, Kotcles E S. Polarization dispersion compensated AWG demultiplexer fabricated in a single shallow etching step. *Electron. Lett.*, 1999, **35**(9):737~738
- 5 Zhao Chunhua, Zhu Zuhua, Chen Kangsheng *et al.*. Scalar wave analysis of a wavelength demultiplexer based on concave gratings. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1998, **18**(3):308~313 (in Chinese)
- 6 Zhao Chunhua, Zhu Zuhua, Chen Kangsheng *et al.*. Design and imaging analysis of integrated flat-field grating with stigmatic points. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1998, **18**(8):1145~1148 (in Chinese)
- 7 Jean-Pierre Weber. Device design using Gaussian beams and ray matrices in planar optics. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1994, **30**(10):2407~2416
- 8 He J J, Lamontagne B, Delage A *et al.*. Sources of crosstalk in grating based monolithic integrated wavelength demultiplexers. Canada, Ottawa, *International Conference on Application of Photonic Technology*, 1998, 27~30
- 9 Dai Daoxin, Zhou Qincun, He Sailing *et al.*. A simple simulation method for AWG and analysis for fabrication tolerances. *Acta Photonica Sinica* (光子学报), 2002, **31**(8):980~984 (in Chinese)
- 10 Tuovinen J. Accuracy of a Gaussian beam. *IEEE, Transactions on Antenna and Propagation*, 1992, **40**(4):391~398
- 11 Kogelnik H, Li T. Laser beams and resonators. *Appl. Opt.*, 1966, **5**(10):1550~1567
- 12 Liang Quanting. *Physical Optics* (物理光学). Beijing: China Machine Press, 1987. 161~168 (in Chinese)
- 13 Katsunari Okamoto. *Fundamentals of Optical Waveguides*. San Diego: Academic Press, 2000. 39~47
- 14 Scarmozzino R, Osgood R M Jr. Comparison of finite-difference and Fourier-transform solutions of the parabolic wave equation with emphasis on integrated-optics applications. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1991, **8**(5):724~731
- 15 Hadley G T. Wide-angle beam propagation using Páde approximant operators. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(20):1426~1428
- 16 Hadley G R. Multistep method for wide-angle beam propagation. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(24):1743~1745
- 17 Hadley G R. Transparent boundary condition for the beam propagation method. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1992, **28**(1):363~370

附录 A

把(6)式代入(8)式,得如下公式:

$$E(x, z) = \frac{j}{\lambda z} \exp(-jkz) \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{x_1^2}{w_0^2} - \frac{jk}{2z} (x - x_1)^2 \right] dx_1$$

定义

$$p = \frac{1}{w_0^2} + j \frac{\pi}{\lambda z}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{x_1^2}{w_0^2} - \frac{jk}{2z} (x - x_1)^2 \right] dx_1 = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp \left[-j \frac{\pi x^2}{\lambda} \frac{z - j(\pi w_0^2/\lambda)}{z^2 + \pi^2 w_0^4/\lambda^2} \right]$$

定义

$$w^2 = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right], \quad R = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right], \quad \eta = \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right), \quad z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{\pi n w_0^2}{\lambda_0}$$

p 可以改写成: $p = j \frac{\pi w}{\lambda z w_0} \exp(-j\eta)$, 最终可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{x_1^2}{w_0^2} - \frac{jk}{2z} (x - x_1)^2 \right] dx_1 = \sqrt{\frac{\lambda w_0 z}{j w}} \exp \left(-\frac{x^2}{w^2} \right) \exp \left(-jk \frac{x^2}{2R} + j \frac{\eta}{2} \right)$$

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{\lambda w_0 z}{j w} - \frac{1}{j \lambda z} \left(\frac{2}{\pi w_0^2} \right)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \exp\left(-jkz - jk \frac{x^2}{2R} + j \frac{\eta}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{w^2 \lambda^2 z^2} \frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \exp\left(j \frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \exp\left(-jkz - jk \frac{x^2}{2R} + j \frac{\eta}{2}\right)$$

Calculation of the Far Field Pattern from a Planar Waveguide Using a Modified Gaussian Beam Approximation

Zhou Qincun Dai Daoxin Sheng Zhongyan He Jianjun He Sailing

(Center for Optical Electromagnetic Research, State Key Lab of Modern Optical Instrument, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(Received 28 April 2002; revised 15 July 2002)

Abstract: Conventional formula for a Gaussian beam propagating in a homogeneous slab waveguide can be derived by solving the Helmholtz equation with the paraxial approximation. Based on the Kirchhoff diffraction theory, a more accurate formula is derived. The quantitative error of the conventional formula is analyzed and a modification is given to improve the accuracy. The accuracy of the modified formula is verified by a numerical simulation with finite difference-beam propagation method (FD-BPM). The modified formula can be used to simplify the design and simulation for integrated photonic devices such as arrayed waveguide grating (AWG) and etched diffraction grating (EDG).

Key words: guiding wave optics; Gaussian beam; Kirchhoff diffraction theory; FD-BPM; arrayed waveguide grating; integrated photonic device