

文章编号: 0253-2239(2003)05-0517-05

体积全息图中光子禁带结构性质的分析*

叶志成 郑君 王小东 刘大禾**
(北京师范大学物理系, 北京 100875)

摘要: 利用光子晶体的概念和方法, 从理论上分析了一维全息图在再现光以不同角度入射情况下禁带结构的性质。分析表明, 当再现光非正入射时, 体积全息图的禁带结构是倾斜的, 正入射时的非倾斜结构是倾斜结构的一个特例。

关键词: 信息光学; 光子晶体; 光子禁带; 体积全息图

中图分类号: O438.1 文献标识码: A

1 引 言

近年来, 有关光子晶体的研究^[1~14] 成为一个热点。人们从理论和实验两方面进行了大量的工作, 得到了很多有用的结果。但用典型的晶体生长的方法制作光子晶体, 成本很高。最近, 人们开始把光学全息与光子晶体联系起来, 用全息方法^[15] 或多光束干涉法^[16] 制作可见光谱区的光子晶体。由于体积全息图具有典型的周期性介电结构, 因此, 体全息介质可看成是一种光子晶体。由此, 可以相信, 体全息介质中应该存在着某种光子的带结构, 并且, 这种带结构对体全息的性质有着重要影响。用光子晶体理论讨论了体积全息图的性质^[17]。为光子晶体和光学全息的研究提出了新的方法。

为了更深入地探讨体积全息图作为光子晶体的性质, 以及为用全息方法制作出可实际使用的光子晶体, 必须全面分析体积全息图中所给出的光子禁带的特点, 及其随一些参量变化的规律。在本文中, 对此进行了更为详细的讨论。

2 体全息的光子晶体模型

以基元反射全息图为例, 其典型结构如图 1 所示。为简单起见, 只考虑一维情况(即非倾斜反射全息)。两束沿 z 相反方向传播的光束相干涉, 干涉条纹的周期为纪录光波长的一半。显影定影后, 此反射全息介质就成为具有周期性介电常量结构, 成为一种光子晶体。周期性的介电常量可表示为

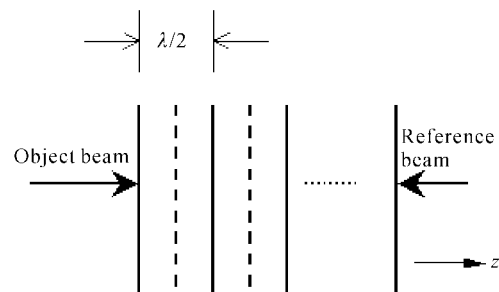


Fig. 1 Typical structures of reflection hologram. The solid lines show the constructive planes and the dashlines show the destructive planes

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r} + l\Lambda\mathbf{z}), \quad (1)$$

其中, l 是整数, $\Lambda = \lambda/2$ 是沿 z 轴方向的周期长度, λ 是波长(入射波在介质中的相应波长)。可以把 $\epsilon(\mathbf{r})$ 按倒格矢 \mathbf{G} 进行傅里叶展开 ($\mathbf{G} = l\mathbf{g} = l\frac{2\pi}{\Lambda}\mathbf{z}$):

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \epsilon_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \epsilon_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G}z), \quad (2)$$

设再现光在 yz 平面内传播, 且与 z 轴有一夹角 θ , 如图 2 所示。在周期性介质中传播的光遵从布洛赫定理, 可以用一系列平面波展开:

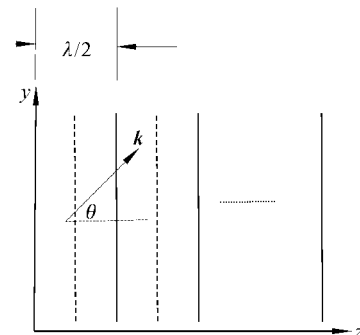


Fig. 2 The geometry of reconstruction of reflection hologram. θ is the angle between reconstruction beam in the medium and z -axis

* 国家自然科学基金(19874009)资助课题。

** 通信联系人。E-mail: dhliu@bnu.edu.cn

收稿日期: 2002-03-11; 收到修改稿日期: 2002-05-29

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{C}_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} \exp[-i(\mathbf{k}-\mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}], \quad (3)$$

再由麦克斯韦方程可得到波动方程:

$$[-\nabla^2 - \omega^2 \mu \epsilon(\mathbf{r})] \mathbf{E} = 0, \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式并利用(2)式可以得到

$$(\mathbf{k}-\mathbf{G}')^2 C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}'} - \sum_{\mathbf{G}} \omega^2 \mu \epsilon_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} = 0, \quad (5)$$

即
$$(\mathbf{k}-l'\mathbf{g})^2 C_{\mathbf{k}-l'\mathbf{g}} - \omega^2 \mu \epsilon_0 C_{\mathbf{k}-l'\mathbf{g}} - \sum_{l \neq l'} \omega^2 \mu \epsilon_{(l'-l)\mathbf{g}} C_{\mathbf{k}-l\mathbf{g}} = 0, \quad (6)$$

所以

$$C_{\mathbf{k}-l'\mathbf{g}} = \frac{1}{(\mathbf{k}-l'\mathbf{g})^2 - \omega^2 \mu \epsilon_0} \sum_{l \neq l'} \omega^2 \mu \epsilon_{(l'-l)\mathbf{g}} C_{\mathbf{k}-l\mathbf{g}}, \quad (7)$$

可见这是一系列等式

$$C_{\mathbf{k}+\mathbf{g}} = \frac{1}{(\mathbf{k}+\mathbf{g})^2 - \omega^2 \mu \epsilon_0} (\dots + \omega^2 \mu \epsilon_{-\mathbf{g}} C_{\mathbf{k}} + \omega^2 \mu \epsilon_{-2\mathbf{g}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{g}} + \dots), \quad (l' = -1) \quad (8)$$

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{1}{k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_0} (\dots + \omega^2 \mu \epsilon_{\mathbf{g}} C_{\mathbf{k}+\mathbf{g}} + \omega^2 \mu \epsilon_{-\mathbf{g}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{g}} + \dots), \quad (l' = 0) \quad (9)$$

$$C_{\mathbf{k}-\mathbf{g}} = \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{g})^2 - \omega^2 \mu \epsilon_0} (\dots + \omega^2 \mu \epsilon_{2\mathbf{g}} C_{\mathbf{k}+\mathbf{g}} + \omega^2 \mu \epsilon_{\mathbf{g}} C_{\mathbf{k}} + \dots), \quad (l' = 1) \quad (10)$$

$$C_{\mathbf{k}-n\mathbf{g}} = \frac{1}{(\mathbf{k}-n\mathbf{g})^2 - \omega^2 \mu \epsilon_0} (\dots + \omega^2 \mu \epsilon_{n\mathbf{g}} C_{\mathbf{k}} + \dots), \quad (l' = n) \quad (11)$$

下面分别讨论再现光正入射和斜入射情况下禁带结构的性质。

3 带结构对反射全息图性质的影响

3.1 再现光正入射

即 $k=kz$, k 的方向与倒格子基矢 g 的方向相同。由(8)式~(11)式可见,如果此时再现光的频率和波矢满足 $|\mathbf{k}-\mathbf{g}| \approx |\mathbf{k}|$, 且 $k^2 \approx \omega^2 \mu \epsilon_0$, 则 C_k 和 C_{k-g} 是主要的项,其它项可忽略。这意味着平面波分量 C_k 和 C_{k-g} 是相互耦合的。因此(8)式~(11)式等一系列等式可简化为两个等式:

$$\left. \begin{aligned} (k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_0) C_k - \omega^2 \mu \epsilon_g C_{k-g} &= 0, \\ -\omega^2 \mu \epsilon_g C_k + [(\mathbf{k}-\mathbf{g})^2 - \omega^2 \mu \epsilon_0] C_{k-g} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

要使此方程组有非零解,必须满足下式

$$\begin{vmatrix} k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_0 & -\omega^2 \mu \epsilon_g \\ -\omega^2 \mu \epsilon_g & (\mathbf{k}-\mathbf{g})^2 - \omega^2 \mu \epsilon_0 \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

可求得

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k^2}{\mu(\epsilon_0 \pm |\epsilon_g|)}, \quad (14)$$

ω_{\pm}^2 即为第一禁带的上下两个边缘。

对于另一种频率的再现光,如果满足 $|\mathbf{k}-l\mathbf{g}| \approx |\mathbf{k}|$, 且 $k^2 \approx \omega^2 \mu \epsilon_0$ (l 为某一整数), 则

C_k 和 C_{k-lg} 是主要的项,可求出

$$\omega_{l\pm}^2 = \frac{k^2}{\mu(\epsilon_0 \pm |\epsilon_{lg}|)}, \quad (15)$$

$\omega_{l\pm}^2$ 即为第 l 个禁带的上下两个边缘。第 l 个禁带对应的 k 值为 $k = lg/2$, 宽度为 $\Delta\omega_l = \omega |\epsilon_{lg}| / \epsilon_0$ 。正入射时的 $k-\omega$ 关系如图 3。

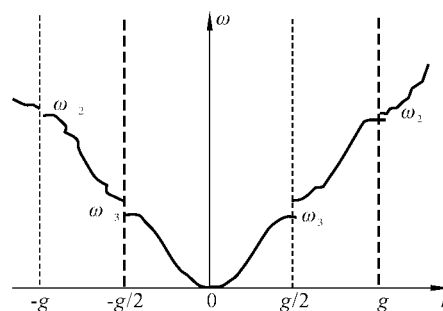


Fig. 3 The relationship of $k-\omega$ in the case of normal incidence

在(5)式中,把 k 换成 $k-mg$ (其中 m 为任意整数), 讨论过程同上。如果

$$|\mathbf{k}-m\mathbf{g}-l\mathbf{g}| \approx |\mathbf{k}-m\mathbf{g}|$$

即 $k = (m+l/2)g$, 且 $(\mathbf{k}-m\mathbf{g})^2 \approx \omega^2 \mu \epsilon_0$, 则可得出

$$\omega_{ml\pm}^2 = \frac{(\mathbf{k}-m\mathbf{g})^2}{\mu(\epsilon_0 \pm |\epsilon_{lg}|)}.$$

由 $\mathbf{k}-m\mathbf{g} = l\mathbf{g}/2$, 可见对于不同的 m , 相同的 l , $\omega_{ml\pm}$

的值是一样的。就是说，再现光正入射时，能带结构具有平移对称性，存在全空间的禁带。如图 4(粗实线是 $m = 1$ 时的禁带结构)。

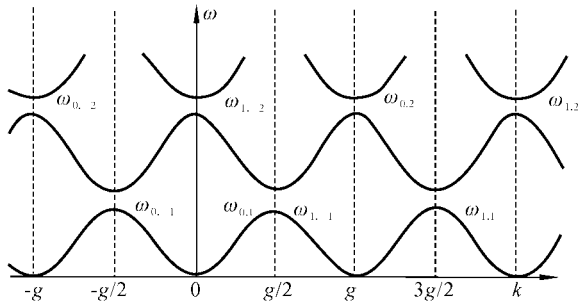


Fig. 4 The structure of optical band gap in the case of normal incidence. The line in bold is the relationship of $K-\omega$ for $m = 1$. $\omega_{m,\pm l}$ is the l th bandgap in the m th group

若再现光为白光，即入射光包括很多波矢 k 。因此，再现光在上述带结构中前两个甚至前三个禁带的行为均可被观察到。入射再现光中不同的波长分量，将被不同的禁带所阻挡，从而使全息图的反射光中出现两个或三个峰值波长，这些峰值波长应是倍数的关系。例如，如记录介质为重铬酸盐明胶，记录波长为 514.5 nm，考虑到介质处理后的膨胀效应，则再现光正入射时，衍射光的峰值波长应为 545.4 nm, 272.7 nm, 136.4 nm, ……。这与耦合波理论中须满足布拉格条件的结果是一致的。

3.2 再现光斜入射

设介质内部 k 方向与倒格矢方向有交角 θ 。各矢量的关系如图 5 所示。与再现光正入射时的讨论方法相似。如果再现光满足 $|k - lg| \approx |k|$ ，且 $k^2 \approx \omega^2 \mu \epsilon_0$ ，可推导出

$$|k| = \frac{lg}{2\cos\theta}, \quad \omega_{\pm l}^2 = \frac{k^2}{\mu(\epsilon_0 \pm |\epsilon_{lg}|)}$$

可见， θ 越大，禁带所对应的 k 和 ω 值越大。 $k-\omega$ 关系

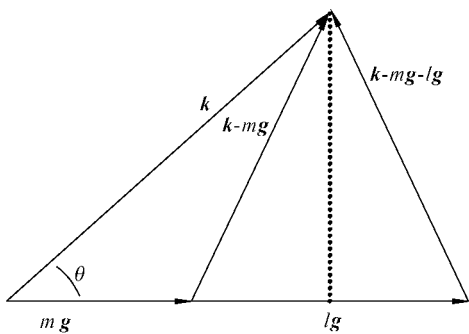


Fig. 5 The relationship of several vectors in the case of oblique incidence

如图 6。

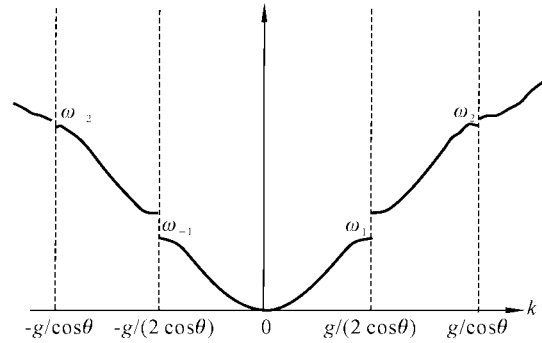


Fig. 6 The relationship of $k-\omega$ in the case of oblique incidence

把 k 换成 $k - mg$ (其中 m 为任意整数) 后，由 $|k - mg - lg| \approx |k - mg|$ [即 $k = (m + l/2)g / \cos\theta$] 及 $(k - mg)^2 \approx \omega^2 \mu \epsilon_0$ ，可推出

$$\omega_{m\pm l}^2 = \frac{(k - mg)^2}{\mu(\epsilon_0 \pm |\epsilon_{lg}|)}$$

此时

$$(k - mg)^2 = \left(\frac{lg}{2}\right)^2 + \left[\left(m + \frac{l}{2}\right)g \tan\theta\right]^2 = g^2 \left[\frac{l^2}{4} + \tan^2\theta \left(m + \frac{l}{2}\right)^2\right]$$

可见，对于同一个 $m (m \neq 0)$ ，不同 $\pm l$ 所对应的 $\omega_{m,\pm l}$ 值并不相等。对于相同的 l ，不同 m 对应的 $\omega_{m,\pm l}$ 值也不相等。所以，再现光斜入射时，不存在全空间的禁带。另外，还可看出，再现光入射角度 θ 不同时，禁带的位置、宽度都不同。 θ 越大，禁带中心频率越大，禁带越宽。

从图 5 可以看出，当 $\theta \neq 0, m \neq 0$ 时， ω_m^2 的最小值在 $k = mg \cos\theta$ 处，其最小值为 $m^2 g^2 \sin^2\theta / (\mu \epsilon_0)$ ，并不是 0。而且，此最小值与 m 及 $\sin\theta$ 的平方成正比。

图 7 给出了斜入射时的光子禁带结构(黑粗实线是 $m = 1$ 时的禁带结构)。如果入射光为白光，当全息图反射光的中心频率不在光子禁带的中心时，虽然光在两个，甚至三个禁带中的行为可被观察到，即反射光中可出现两个甚至三个峰，但不同频率的光折射角度 θ 不同，就对应不同的光子禁带结构图，所以反射光中不同的峰值波长并不严格满足倍数的关系。

可见，体积全息图的性质可借助光子晶体中的禁带结构来描述。

需要说明的是对于能带结构的解释适用于介电常量连续分布的情况。在此分布情况下 $\epsilon(r)$ 的展开式只有有限几项，所以近似完全成立。而对于介电常

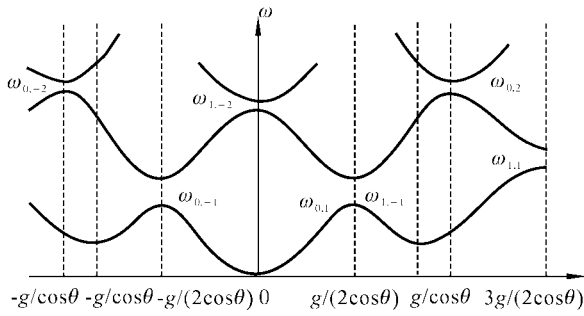


Fig. 7 The structure of optical band gap in the case of oblique incidence. The line in bold is the relationship of $k-\omega$ for $m = 1$. $\omega_{m,-l}$ is the l th bandgap in the m th group

量阶梯分布的晶体,由于 $\epsilon(\mathbf{r})$ 展开式有无限多项,近似的误差较大,无法由上述的推导得到解析解。而全息图介质介电常量的分布正是由有限个余弦函数叠加而成,因此上述近似方法对于全息图完全适用。

以下用基元反射全息为例,比较上述的近似方法与平面波法所得结果。其参量为:曝光波长 $\lambda_0 = 514.5 \text{ nm}$, 介质平均折射率 1.52, 折射率调制度 0.07, 介质膨胀系数 1.05, 处理后,介电常量分布为 $2.31 + 0.21 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0 \times 1.05/1.52} z\right)$ 。

再现光垂直入射时,用平面波法得到图 8。表 1 给出了上述近似方法与平面波法结果的比较。

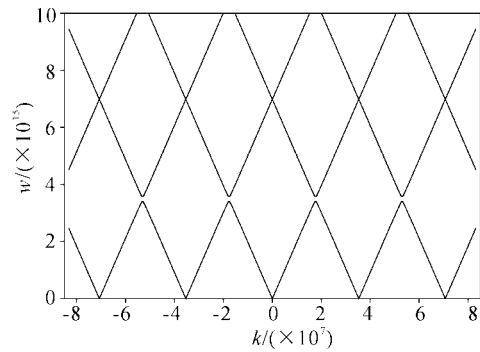


Fig. 8 The calculated result by plane wave expansion method in the case of normal incidence

再现光以与介质法线成 20° 角入射时,用平面波法得到图 9。表 2 给出了本文的近似方法与平面波法结果的比较。

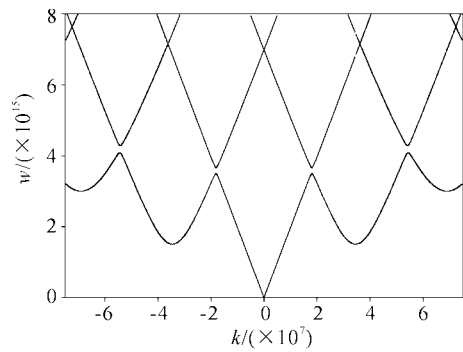


Fig. 9 The calculated result by plane wave expansion method in the case incidence angle of 20°

Table 1. Comparison between the results of approximate method in this paper and plane wave expansion method when the reconstruction beam is in normal incidence

	The first band gap		The second band gap	
	Central frequency ($\omega_{0,-1}$) of the band gap /Hz	The width of the band gap /Hz	Central frequency ($\omega_{0,+2}$) of the band gap /Hz	The width of the band gap /Hz
Approximate method in this paper	$\frac{g}{2} \times \frac{c}{1.52} = 3.4892 \times 10^{15}$	$3.4892 \times 10^{15} \times 0.07/1.52 = 1.607 \times 10^{14}$	$g \times \frac{c}{1.52} = 6.978 \times 10^{15}$	$6.978 \times 10^{15} \times \frac{0}{1.52} = 0$
Plane wave method	3.4916×10^{15}	$3.5720 \times 10^{15} - 3.4112 \times 10^{15} = 1.608 \times 10^{14}$	6.983×10^{15}	$6.9905 \times 10^{15} - 6.9760 \times 10^{15} = 0.135 \times 10^{14}$

Here, the value of reciprocal vector is $g = 4 \times \pi / (5145 \times 10^{-10} \times 1.05/1.52) \text{ m}^{-1}$, c is light speed.

Table 2. Comparison between the results of approximate method in this paper and plane wave method when the incident angle of reconstruction beam is 20°

a: Comparison of band gaps

	The first band gap ($m=0$)		The second band gap ($m=0$)	
	Central frequency ($\omega_{0,-1}$) of the band gap /Hz	The width of the band gap /Hz	Central frequency ($\omega_{0,+2}$) of the band gap /Hz	The width of the band gap /Hz
Approximate method in this paper	$\frac{g}{2 \cos \theta} \times \frac{c}{1.52} = 3.573 \times 10^{15}$	$3.57284 \times 10^{15} \times 0.07/1.52 = 1.645 \times 10^{14}$	$\frac{g}{\cos \theta} \times \frac{c}{1.52} = 7.14568 \times 10^{15}$	$6.978 \times 10^{15} \times \frac{0}{1.52} = 0$
Plane wave expansion method	3.575×10^{15}	$3.6575 \times 10^{15} - 3.4925 \times 10^{15} = 1.650 \times 10^{14}$	7.352×10^{15}	$7.1589 \times 10^{15} - 7.1430 \times 10^{15} = 0.16 \times 10^{14}$

b: Comparison of minimal value of ω_m

Minimal value	The first ω_0 /Hz	The second ω_1 /Hz	The third ω_2 /Hz
Approximate method in this paper	0	$G \times \sin \theta \times c / 1.52 = 1.5011 \times 10^{15}$	$2g \times \sin \theta \times c / 1.52 = 3.0022 \times 10^{15}$
Plane wave expansion method	0	1.5010×10^{15}	3.0005×10^{15}

The reciprocal vector $g = 4 \times \pi (5145 \times 10^{-10} \times 1.05 / 1.52) \text{ m}^{-1}$, c is light speed, θ is the angle between the reconstruction beam and the vector g

以上平面波法得到的结果已由实验验证^[17]。通过比较可以看出上述的近似方法对于全息图的禁带分析确实可行。

结论 体积全息图具有典型的周期性介电结构,因此,具有光子禁带结构。在此禁带频率范围内的光由于光子禁带的存在而不能透过全息图而只能被反射回来。当再现光正入射或斜入射到全息图时,禁带的性质发生变化,从而使全息图的再现特性不同。这儿提出的近似方法可以方便地给出全息光子晶体禁带的位置和宽度的解析解,从而确定影响禁带性质的因素。对于全面解释全息图的性质以及光子晶体的制作具有指导意义。

作者感谢裴寿镛教授的热情帮助。

参 考 文 献

- 1 Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and Electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(20): 2059~2062
- 2 Yablonovitch E, Gmitter T J. Photonic band structure: the face-centered-cubic case. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, **63**(18): 1950~1953
- 3 John Sageev. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(23):2486~2489
- 4 John Sajeev, Rangarajan R. Optimal structures for classical wave localization: An alternative to the ioffe-regel criterion. *Phys. Rev. (B)*, 1988, **38**(14):10101~10104
- 5 Satpathy S, Zc Zhang, Salehpour M R. Theory of photon bands in three-dimensional periodic dielectric structures. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(11):1239~1242
- 6 Mei Dongbin, Liu Hongguang, Cheng Bingying *et al.*. Visible and near-infrared silica colloidal crystals and photonic gaps. *Phys. Rev. (B)*, 1998, **58**(1):35~38
- 7 Villeneuve P R, Piché M. Photonic bandgaps in periodic dielectric structures. *Prog. Quant. Electron.*, 1994, **18**(2): 153~200
- 8 Ho K M, Chan C T, Soukoulis C M. Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(25):3152~3155
- 9 Leung K M, Liu Y F. Full vector wave calculation of photonic band structures in face-centered-cubic dielectric media. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(21):2646~2649
- 10 Zhang Zc, Satpathy S. Electromagnetic wave propagation in periodic structures: Bloch wave solution of Maxwell's equations. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(21):2650~2653
- 11 Plihal M, Maradudin A A. Photonic band structure of two-dimensional systems: The triangular lattice. *Phys. Rev. (B)*, 1991, **44**(16):8565~8571
- 12 Plihal M, Shambrook A, Maradudin A A. Two-dimensional photonic band structures. *Opt. Commun.*, 1991, **80**(3):199~204
- 13 Villeneuve P R, Piché M. Photonic band gaps in two-dimensional square and hexagonal lattices. *Phys. Rev. (B)*, 1992, **46**(8):4969~4972
- 14 Yariv A, Yeh P. *Optical Waves in Crystals*. New York: John Wiley & Sons, Chap. 6, 1984
- 15 Campbell M, Sharp D N, Harrison M T *et al.*. Fabrication of photonic crystals for the visible spectrum by holographic lithography. *Nature*, 2000, **404**(6773):53~56
- 16 Cheng Bingying, Zhang Yi, Mei Dongbin *et al.*. The creation of bravais lattice by multi laser beam. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1996, **16**(6):797~800
- 17 Zheng Jun, Ye Zhicheng, Tang Weiguo *et al.*. Photonic forbidden band in volume hologram. *Acta Physica Sinica* (物理学报), 2001, **50**(11):2144~2148

Analysis for Characteristics of the Photonic Band Gap Structures in Volume Hologram

Ye Zhicheng Zheng Jun Wang Xiaodong Liu Dahe

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

(Received 11 March 2002; revised 29 May 2002)

Abstract: Based on the concept and the treating techniques for photonic crystals, the characteristics of the forbidden band structures in one dimensional reflection hologram are analyzed. It is treated in the consideration of the reconstruction beam being incident to reflection hologram at different incident angles. The analysis shows that, for oblique incidence, the structures of forbidden band in hologram are slanted. For normal incidence, the structures of forbidden band in hologram are unslanted, and it is the special case of oblique incidence.

Key words: information optics; photonic crystals; photonic forbidden band; volume hologram