

文章编号: 0253-2239(2003)03-0261-07

加光子双模 SU(2) 相干光场的制备及其与 Λ 型三能级原子相互作用的性质*

周 鲁 李高翔

(华中师范大学物理系, 武汉 430079)

摘要: 提出了通过对分束器的条件输出测量制备加光子双模 SU(2) 相干光场的方案, 并研究了 Λ 型三能级原子与此双模光场相互作用系统中, 加光子对原子布居概率及光场非经典性质的影响。结果表明, 原子粒子布居概率发生改变, 光场一模的光子数统计趋向于亚泊松分布, 另一模趋向于超泊松分布, 光场两模间相关度增大, 非经典相关程度增强。

关键词: 量子光学; 加光子双模 SU(2) 相干态; Λ 型三能级原子; 分束器; 条件输出测量

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

1 引 言

根据 von Neumann 的投影原理^[1], 条件测量对量子态的操作和控制是一个富有成效的方法。其主要思想是对于一个两个子系统组成的系统, 使它们处于纠缠态, 例如双模相关光场或原子-场耦合系统, 如果对其中一个子系统进行测量, 另一个子系统就会塌缩到一个新的量子态。近年来, 这一方法已有广泛的应用^[2~8]。其中, Agarwal 等^[2]首先从理论上提出了加光子相干态的制备方案, 让处于激发态的原子通过光腔, 光腔中的光场处于相干态, 然后对通过光腔的原子进行测量, 如果此时原子退激化到基态, 光腔中的光场就会塌缩到加光子相干态。他们的研究同时表明加光子相干态光场表现出某些非经典性质, 例如光子数统计的亚泊松分布和光场压缩。

在这之后, 加光子态所表现出来的非经典性质引起了人们极大的兴趣, 并作了广泛的研究^[8~13], 其中 Dakna 等^[8]的研究表明, 对于分束器的条件输出测量可以用来制备一系列单模量子态的加光子态, 即让分束器输入端的一模处于某一单模量子态, 另一模处于粒子数态, 对分束器的一个输出端进行光子计数测量, 如果没有探测到任何光子, 另一输出端就会塌缩到加光子态。Zhang、Fan^[9,10] 和 Wang

等^[11]将单模加光子态的概念推广到双模光场, 讨论了加光子双模平移压缩态和加光子双模压缩真空态的非经典性质。

SU(2) 相干态光场^[14,15] 是一种典型的双模关联场, 在量子光学中有着广泛的应用。近年的研究已详细讨论了 SU(2) 相干态光场的制备及其与原子相互作用^[14~20]。

本文考虑通过对分束器的条件输出测量制备加光子双模 SU(2) 相干态, 并讨论了此双模光场与 Λ 型三能级原子相互作用系统中, 加光子对原子布居概率、光场的 Mandel Q 参量、二阶相干性以及柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwartz)不等式的影响。结果表明, 由于加光子的作用, 原子粒子布居概率发生改变, 光场的光子统计也会发生改变, 一模趋向于亚泊松分布, 另一模趋向于超泊松分布, 光场两模间的相关度增大, 非经典相关程度增强。

2 加光子双模 SU(2) 相干态的制备

建立如图 1 所示的模型。

假定分束器 1 和 2 均是非损耗的, 即

$$|T_i|^2 + |R_i|^2 = 1 \quad (i = 1, 2),$$

其中 T_i, R_i 分别为分束器的透射系数和反射系数。对其第 1 和第 3 输入端输入一双模光场 ρ_{in} , 对第 2 输入端输入一处于单模粒子数态 $|n_0\rangle$ 的光场, 分别用湮没算符 a_1, a_2 和 a_3 描述, 分束器 1 与分束器 2 之间的光场用湮没算符 a_4 描述, 输入态的密度算符可描述为

$$\rho_{in(n_0)} = \rho_{in} \otimes |n_0\rangle\langle n_0|, \quad (1)$$

* 国家自然科学基金(60078016)、教育部重点研究项目基金和武汉市科技晨光计划资助课题。

E-mail: zhoulu307@hotmail.com

收稿日期: 2002-02-01; 收到修改稿日期: 2002-05-03

两分束器输出端光场的密度算符 $\rho_{out(n_0)}$ 与输入端光场的密度算符 $\rho_{in(n_0)}$ 的关系为

$$\rho_{out(n_0)} = V_2^+ V_1^+ \rho_{in(n_0)} V_1 V_2, \quad (2)$$

式中算符 V_1 和 V_2 满足^[8]

$$V_1^+ = T_{11}^{-a_1} e^{-R_1^+ a_2^+ a_1} e^{R_1^+ a_1^+ a_2} T_{12}^{-a_2^+ a_2}, \quad (3)$$

$$V_2^+ = T_{23}^{-a_3} e^{R_2^+ a_4^+ a_3} e^{R_2^+ a_3^+ a_4} T_{24}^{-a_4^+ a_4}. \quad (4)$$

联立(1)式~(4)式可得两分束器输出端光场的密度算符 $\rho_{out(n_0)}$ 为

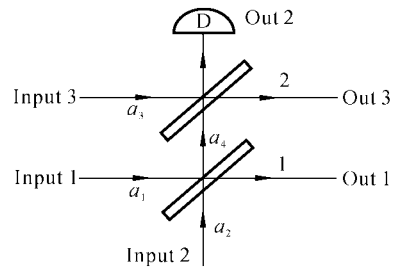


Fig. 1 Scheme of generating two-mode photon-added SU(2) coherent field

$$\begin{aligned} \rho_{out(n_0)} = & (|T_1| |T_2|)^{2n_0} \sum_{n_2, n_2', m_2, m_2'}^{\infty} \sum_{k, j}^{n_0} \sum_{k'}^{n_0-k+m_2} \sum_{j'}^{n_0-j+n_2} (R_1^*)^{m_2+j} R_1^{n_2+k} (R_2^*)^{m_2'+j'} R_2^{n_2'+k'} (T_2^*)^j n_2 T_2^k m_2 \times \\ & \frac{(-1)^{n_2+m_2+n_2'+m_2'}}{\sqrt{k!k'!j!j'm_2!m_2'!n_2!n_2'!}} \sqrt{\begin{bmatrix} n_0 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0 \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0-k+m_2 \\ m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0-j+n_2 \\ n_2 \end{bmatrix}} \times \\ & \sqrt{\begin{bmatrix} n_0-k+m_2 \\ k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0-j+n_2 \\ j' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0-k+m_2-k'+m_2' \\ m_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0-j+n_2-j'+n_2' \\ n_2' \end{bmatrix}} \times \\ & T_{23}^{a_3} T_{11}^{a_1} a_1^{m_2} (a_1^+)^k a_3^{m_2'} (a_3^+)^{k'} \rho_{in} a_3^{j'} (a_3^+)^{n_2} a_1^j (a_1^+)^{n_2} (T_1^*)^{a_1} a_1 (T_2^*)^{a_3} a_3 \otimes \\ & |n_0-k+m_2-k'+m_2'\rangle \langle n_0-j+n_2-j'+n_2'|. \end{aligned} \quad (5)$$

对分束器第二个输出端进行光子计数测量,若没有探测到光子,那么 1,3 输出端的光场将被投影为一个双模光场,其密度算符为

$$\rho_{out(n_0,0)} = \frac{\langle 0 | \rho_{out(n_0)} | 0 \rangle}{Tr_{1,3} \langle 0 | \rho_{out}(n_0) | 0 \rangle}. \quad (6)$$

现假设从分束器 1,3 输入端输入一纯态光场 $\rho_{in} = |\phi\rangle\langle\phi|$, 上式可简化为

$$\rho_{out(n_0,0)} = |\psi_{n_0}\rangle\langle\psi_{n_0}|, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} |\psi_{n_0}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n_0} \\ & [(R_1^*)^{m_2} R_1^k R_2^{m_2-k} T_2^k m_2 \frac{(-1)^{m_2}}{k!m_2!(n_0-k)!} \times \\ & T_{23}^{-a_3} T_{11}^{a_1} a_1^{m_2} (a_1^+)^k (a_3^+)^{n_0-k+m_2} |\phi\rangle], \end{aligned} \quad (8)$$

进一步假设分束器第二输入端输入光场为一真空态,即 $n_0 = 0, 1, 3$ 输出端的态函数可写为

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle = & \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{R_1^* R_2}{T_2} \right)^n \frac{(-1)^n}{n!} \times \right. \\ & \left. T_{23}^{-a_3} T_{11}^{a_1} a_1^n (a_3^+)^n |\phi\rangle \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$|\psi_{n_0}\rangle$ 已归一化, N_0 为归一化常量。

为简单起见,输入一非相关的双模粒子数态

$|\phi\rangle = |N, m\rangle$ (纯粒子数态的制备见参考文献[5]), 代入(9)式,得

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle = & \frac{1}{\sqrt{N_0}} T_2^m \sum_{n=0}^N [(-R_1^* R_2)^n T_1^{N-n} \times \\ & \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}^{1/2} |N-n, m+n\rangle]. \end{aligned} \quad (10)$$

对(10)式作参量变换,设 $R = x(-R_1^* R_2)$, $T = xT_1$, 选取适当的 x , 使 $|R|^2 + |T|^2 = 1$, 则

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle = & \frac{1}{\sqrt{N_0}} (a_3^+)^m \sum_{n=0}^N F_n |N-n, n\rangle = \\ & \frac{1}{\sqrt{N_0}} (a_3^+)^m |\psi_{SU(2)}\rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $|F_n|^2 = \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix} s^n (1-s)^{N-n}$,

$$N_0 = \sum_{n=0}^N |F_n|^2 \frac{(m+n)!}{n!} = \sum_{n=0}^N |F'_n|^2,$$

$$s = |R|^2,$$

$|\psi_{SU(2)}\rangle$ 为标准的 SU(2) 相干光场的态矢, SU(2) 相干态具有如下特征,如果其中一个模中观测到 n 个光子,那么另一个模中就会观测到 $N-n$ 个光子,其中 N 是两个模中最大可能光子数. s 是配分比,它反映了 SU(2) 相干光场两模平均光子数之比。

由(11)式可见,经过上述操作后,双模 SU(2)相干态的第 2 个模被加上了 m 个光子,加光子的数目由两分束器第 3 输入端的光场决定,我们将这个态定义为加光子双模 SU(2)相干态。

3 与 Λ 型三能级原子相互作用

考虑如图 2 所示的 Λ 型三能级原子模型,其中能级 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$ 及 $|1\rangle$ 与 $|2\rangle$ 之间的跃迁分别与加光子双模 SU(2)相干态的第 2 (a 模) 和第 1 模 (b 模) 相联系,为了简单起见,只考虑共振情况,在相互作用绘景中,原子-场耦合系统的相互作用哈密顿可写为

$$H_I = g_a (a^+ |0\rangle\langle 1| + a |1\rangle\langle 0|) + g_b (b^+ |2\rangle\langle 1| + b |1\rangle\langle 2|), (\hbar = 1) \quad (12)$$

其中 g_a, g_b 是原子-场耦合参量,为了简化计算,取 $g_a = g_b = g$ 。

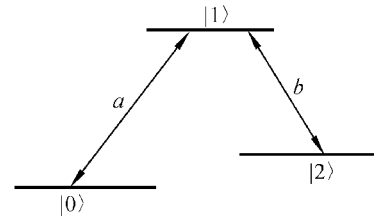


Fig. 2 Diagram of the atom-field coupling system

若初始时刻原子处于基态 $|0\rangle$,光场处于由(11)式所描述的加光子双模 SU(2)相干态,那么随着时间的演化, t 时刻原子-场耦合系统的态矢演化为

$$|\psi_{(t)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_n F'_n \left[C_{0(m,n,t)} |0; m+n, N-b\rangle + C_{1(m,n,t)} |1; m+n-1, N-n\rangle + C_{2(m,n,t)} |2; m+n-1, N-n+1\rangle \right], \quad (13)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C_{0(m,n,t)} &= \frac{N-n+1 + (m+n)\cos(\sqrt{N+m+1}t)}{N+m+1} \\ C_{1(m,n,t)} &= -i \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{N+m+1}} \sin(\sqrt{N+m+1}t) \\ C_{2(m,n,t)} &= -\frac{\sqrt{(m+n)(N-n+1)}}{N+m+1} [1 - \cos(\sqrt{N+m+1}t)] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

4 原子粒子布居概率

首先考虑与加光子双模 SU(2)相干光场作用的 Λ 型三能级原子粒子布居概率随时间的演化规律,在所考虑系统中,原子粒子布居概率为

$$P_{i(t)} = \frac{1}{N_0} \sum_n |F'_n|^2 |C_{i(m,n,t)}|^2, \quad i = 0, 1, 2 \quad (15)$$

图 3 给出了原子处于不同能级的概率随时间的变化,可见原子粒子布居概率随时间呈周期性的变化,并且随着加光子数的增大, $P_{1(t)}$ 有较明显的增大,这是由于与 $0 \leftrightarrow 1$ 跃迁对应的 a 模的光子数增大,从而原子从 $|0\rangle$ 态跃迁到 $|1\rangle$ 态的几率增大,导致原子处于 $|1\rangle$ 态的几率增大。为了更清楚的揭示出加光子对原子粒子布居概率的影响,将原子粒子布居概率对时间求平均

$$\begin{aligned} \bar{P}_i &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt P_{i(t)} = \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_n |F'_n|^2 |\bar{C}_{i(m,n)}|^2, \quad i = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} |\bar{C}_{0(m,n)}|^2 &= \frac{2(N-n+1)^2 + (m+n)^2}{2(N+m+1)^2}, \\ |\bar{C}_{1(m,n)}|^2 &= \frac{m+n}{2(N+m+1)}, \\ |\bar{C}_{2(m,n)}|^2 &= \frac{3(m+n)(N-n+1)}{2(N+m+1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由图 4 可见,当 s 较小时,随着加光子数 m 的增大, \bar{P}_0 减小, \bar{P}_2 增大;而对于较大的 s , \bar{P}_0 增大, \bar{P}_2 减小;对于 s 所有可能的取值, \bar{P}_1 均增大。并且随着 s 的增大,概率增大或减小的幅度会减小。

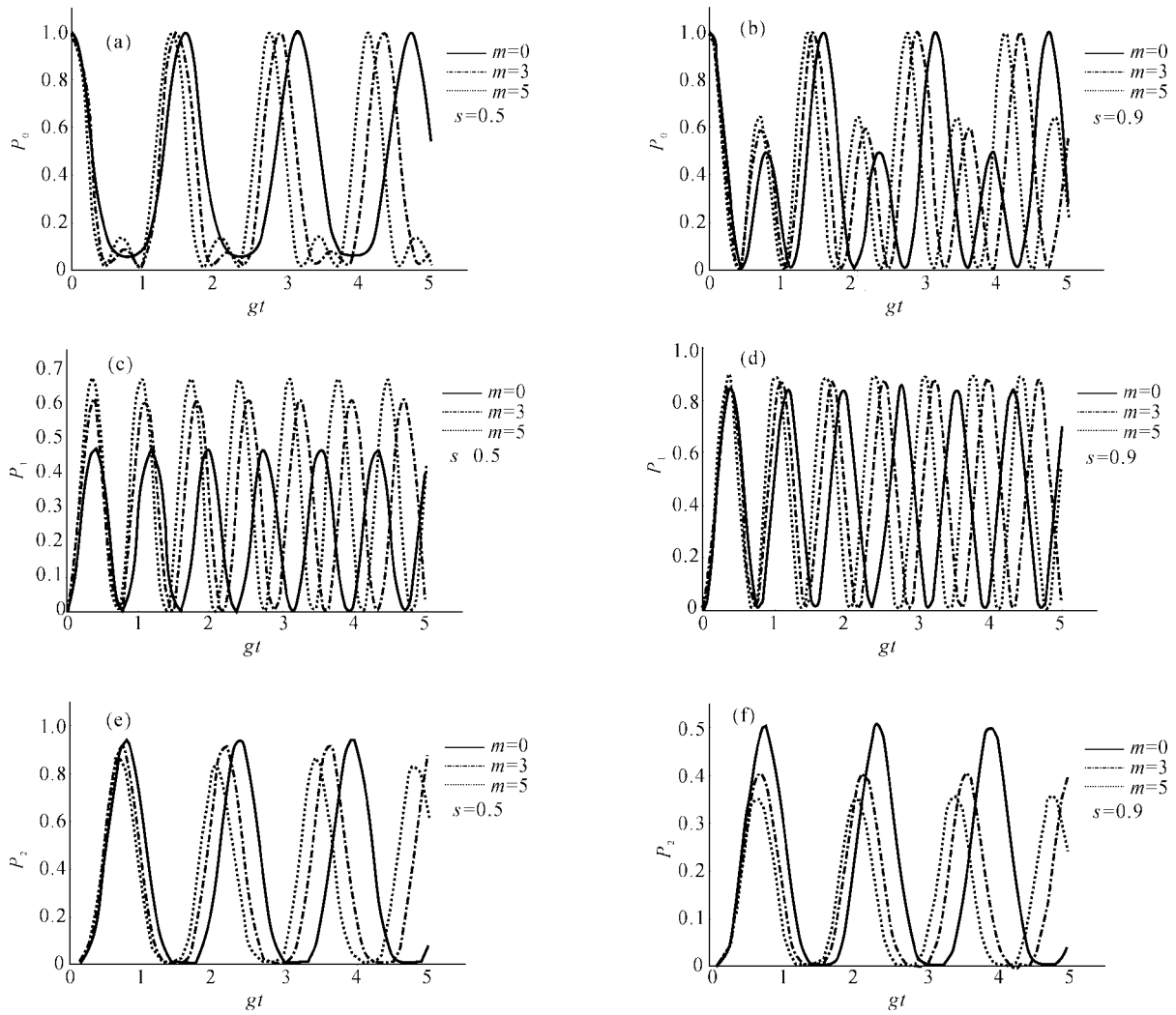


Fig. 3 The evolution of P_0, P_1 and P_2 with $gt(N=15)$.

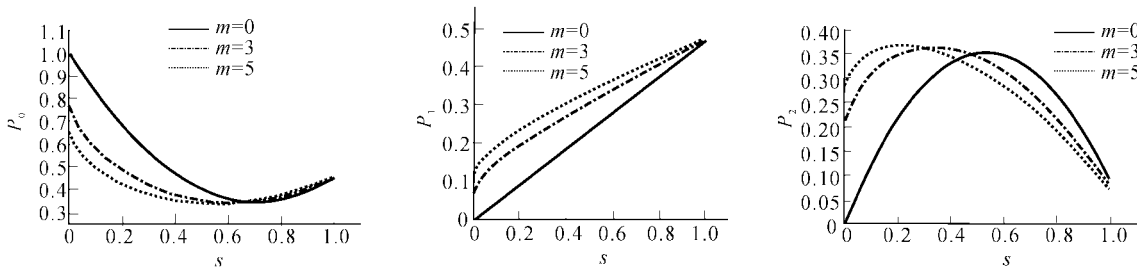


Fig. 4 The evolution of mean value of P_0, P_1 and P_2 with $s(N=15)$

5 相互作用后光场的非经典性质

5.1 Mandel Q 参量

Mandel Q 参量反映了光子统计对泊松分布的偏离,它定义为

$$Q = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle}, \quad (18)$$

如果 $Q = 1$, 光场处于泊松分布; $Q > 1$ 是超泊松分布; $Q < 1$ 是亚泊松分布。只有非经典场才有

$Q < 1$, 即亚泊松光子统计分布反映了光场的非经典特性。

对光子数为 N , 加光子数为 m 的加光子双模 $SU(2)$ 相干态光场, a 模的 Q 函数为

$$Q_a = \frac{\langle (a^+ a)^2 \rangle - \langle (a^+ a) \rangle^2}{\langle a^+ a \rangle}, \quad (19)$$

b 模的 Q 函数

$$Q_b = \frac{\langle (b^+ b)^2 \rangle - \langle (b^+ b) \rangle^2}{\langle b^+ b \rangle}, \quad (20)$$

对上式进行数值运算, 所得结果如图 5 所示, 可见 Q_a 小于 1, 但对于较大的 s , 在一部分时间内 $Q_b > 1$, 表明加光子双模 SU(2) 相干态的 a 模光子处于亚泊松分布, 而 b 模的光子可随时间演化而处于不同的统计分布, Q_a 、 Q_b 均随时间周期性变化, 这是加光子双

模 SU(2) 相干态光场与 Λ 型三能级原子相互作用的结果, 随着加光子数的增大, Q_a 减小, Q_b 增大, 即光场 a 模趋于亚泊松分布, b 模趋于超泊松分布, 这是因为光场两模光子数之和是一定的, 因此光场两模之间存在反关联。

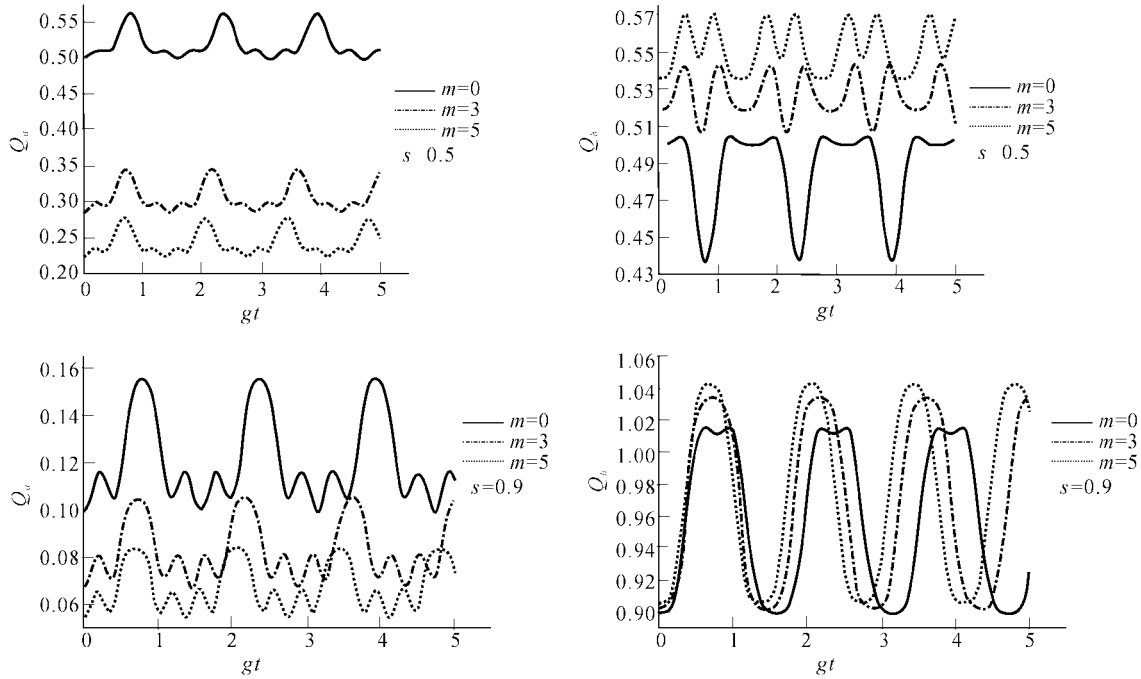


Fig. 5 The evolution of Q_a and Q_b with gt ($N=15$)

5.2 模间相关性

光场的二阶互关联函数定义为^[21]

$$g_{1,2}^{(2)} = \frac{\langle a^+ ab^+ b \rangle}{\langle a^+ a \rangle \langle b^+ b \rangle}, \quad (21)$$

二阶互关联函数描述了光场两模间的相关性, 若 $g_{1,2}^{(2)} = 1$, 则两模不相关; $g_{1,2}^{(2)} > 1$, 两模相关;

$g_{1,2}^{(2)} < 1$, 两模反相关。图 6 给出了 $g_{1,2}^{(2)}$ 随 gt 的演化, $g_{1,2}^{(2)}$ 随 t 作周期震荡, 且始终小于 1, 说明原子与光场相互作用使光场两模间仍呈反相关, 随着加光子数的增大, $g_{1,2}^{(2)}$ 增大, 但仍小于 1, 光场两模间仍呈反相关。

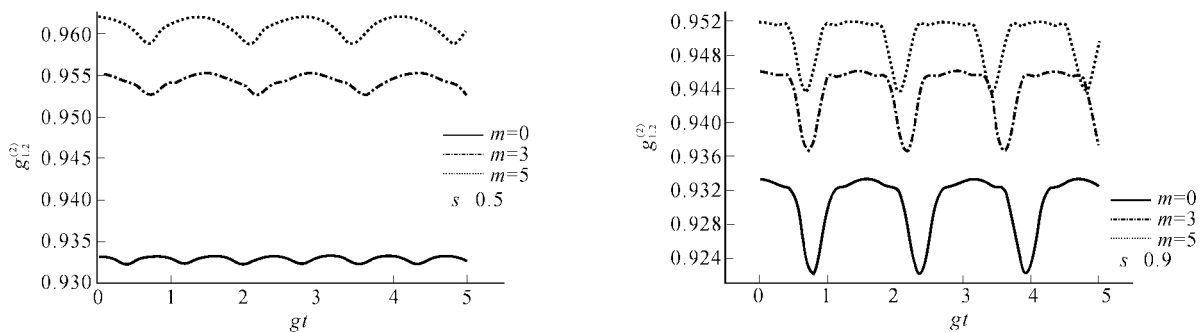


Fig. 6 The evolution of $g_{1,2}^{(2)}$ with gt ($N=15$)

5.3 柯西-施瓦茨不等式

双模光场的柯西-施瓦茨不等式为

$$C = \langle a^{+2} a^2 \rangle \langle b^{+2} b^2 \rangle - \langle a^+ ab^+ b \rangle \geq 0. \quad (22)$$

为了描述对上式的偏离程度, 引入参量

$$I_0 = \frac{\langle a^{+2} a^2 \rangle \langle b^{+2} b^2 \rangle}{\langle a^+ ab^+ b \rangle} - 1, \quad (23)$$

若 $I_0 < 0$, 则 (22) 式不成立, 光场具有非经典特性^[21]。图 7 给出了 I_0 随 gt 的变化, 随着时间的演化, I_0 始终小于 0, 说明光场不遵循柯西-施瓦茨不等式, 光场两模之间具有非经典关联特性, 并且随着加光子数的增大, I_0 变小, 光场的非经典效应增强。

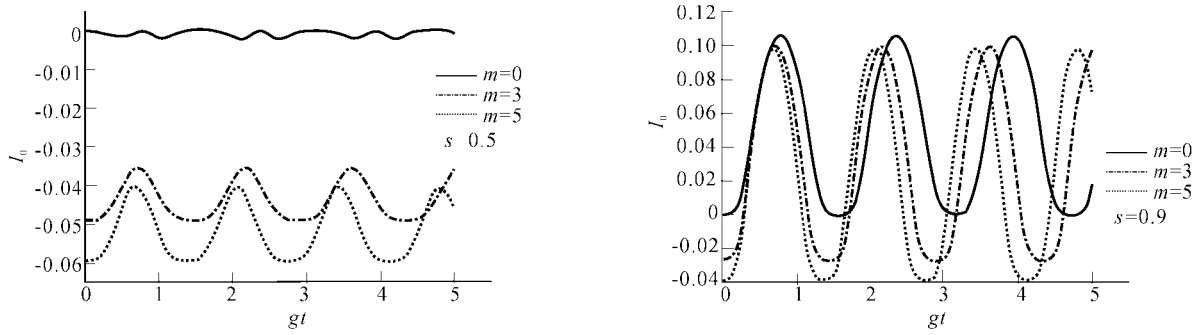


Fig. 7 The evolution of I_0 with gt ($N=15$)

结语 本文提出了加光子 SU(2) 相干态的制备方案,并考察了此双模光场与 Λ 型三能级原子相互作用系统中,加光子对原子布居概率、光场的 Mandel Q 参量、两模间相关度以及柯西-施瓦茨不等式的影响。结果表明,由于加光子的作用,原子布居概率发生改变,表现出与初态场显著不同的特征,光场的光子统计也会发生改变,一模式趋于亚泊松分布,另一模式趋于超泊松分布,光场两模间的相关度增大,非经典相关程度增强。

参 考 文 献

- 1 von Neumann J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1955
- 2 Agarwal G S, Tara K. Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **43**(1):492~497
- 3 Song S, Caves C M, Yurke B. Generation of superposition of classically distinguishable quantum states from optical back action evasion. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(9):5261~5264
- 4 Ban M. Quasicontinuous measurements of photon number. *Phys. Rev. (A)*, 1994, **49**(6):5078~5085
- 5 Ban M. Reduction to the fock state via a degenerate four-wave mixing. *Opt. Commun.*, 1996, **130**(4~6):365~376
- 6 Brune M, Haroche S, Lefevre S *et al.*. Quantum nondemolition measurement of small photon numbers by Rydberg-atom phase-sensitive detection. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(8):976~979
- 7 Cirac J I, Blatt R, Parkins A S *et al.*. Preparation of fock states by observation of quantum jumps in an ion trap. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**(6):762~765
- 8 Dakna M, Knoll L, Welsch D G. Photon-added state preparation via conditional measurement on a beam splitter. *Opt. Commun.*, 1998, **145**(5):309~321
- 9 Zhang Z X, Fan H Y. Properties of states generated by excitations on a squeezed vacuum state. *Phys. Lett. (A)*, 1992, **165**(1):14~18
- 10 Zhang Z X, Fan H Y. Some properties of states

- engendered by the excitations on a two-mode squeezed vacuum state. *Phys. Lett. (A)*, 1993, **174**(1):206~209
- 11 Wang Xiangbin, Kwek L C, Liu Yong *et al.*. Nonclassical effects of two-mode photo-added displaced squeezed states. *Mol. Opt. Phys.*, 2001, **34**(8):1059~1078
- 12 Lee C T. Simple criterion for nonclassical two-mode states. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1998, **15**(3):1187~1191
- 13 Hong L. Statistical properties of photon-added and photon-subtracted two-mode squeezed vacuum state. *Phys. Lett. (A)*, 1999, **264**(1):265~269
- 14 Lai W K, Buzek V, Knight P L. Interaction of a three-level atom with an SU(2) coherent states. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(3):2003~2012
- 15 Perelomov A M. *Generalised Coherent States and Their Applications*. Berlin: Springer, 1986
- 16 Li Gaoxiang, Peng Jinsheng. Two-mode J-C model inside a high-Q cavity filled with a Kerr-like medium. *Acta Physica Sinica (物理学报)*, 1993, **42**(9):1443~1451 (in Chinese)
- 17 Lu Hong, Peng Jinsheng, Wu Meijun. Nondigenerate two-photon interaction of SU(2) coherent state with a two-level atom. *Acta Optica Sinica (光学学报)*, 1995, **15**(10):1365~1370 (in Chinese)
- 18 Li Gaoxiang, Peng Jingsheng. Influences of ac stark shifts on coherent population trapping in the atom-field coupling system via Raman two-photon processes. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **52**(1):465~471
- 19 Lai W K, Buzek V, Knight P L. Nonclassical fields in a linear directional coupler. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **43**(11):6323~6336
- 20 Davidovich L. Sub-Poissonian processes in quantum optics. *Rev. Mod. Phys.*, 1996, **68**(1):127~173
- 21 Song Tongqiang, Feng Jian, Xu Bingzheng *et al.*. Dynamic behavior of atom and field in the system of two atom interacting with pair coherent field. *Acta Physica Sinica (物理学报)*, 1995, **44**(9):1418~1426 (in Chinese)
- 22 Peng Jinsheng, Li Gaoxiang. *Introduction to Modern Quantum Optics (近代量子光学导论)*. Beijing: Science Press, 1996. 356~365 (in Chinese)

Preparation of Two-Mode Photon-Added SU(2) Coherent Field and Its Properties in Interaction with a Λ -Type Three-Level Atom

Zhou Lu Li Gaoxiang

(*Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079*)

(Received 1 February 2002; revised 3 May 2002)

Abstract: A scheme of generating a two-mode photon-added SU(2) coherent field is proposed by means of performing conditional output measurement at the beam-splitter. The influences of the added-photon on atomic populations and the field's non-classical properties are investigated in the system of such a field interacting with a Λ -type three-level atom. It is pointed out that the added-photon can alter atomic populations significantly. The photon number statistical distribution of one mode tends to sub-Poissonian distribution while the other tends to super-Poissonian distribution, the correlation between the two modes is enhanced and nonclassical correlation degree is increased.

Key words: quantum optics; photon-added SU(2) coherent state; Λ -type three-level atom; beam-splitter; conditional output measurement