

文章编号: 0253-2239(2003)03-0348-08

激光导引星大气湍流波前非等晕性误差的 像差模式分解*

沈 锋 姜文汉

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

摘要: 激光导引星概念解决了自适应光学技术的信标问题,同时带来了无法克服的非等晕性误差。将高度聚焦非等晕性误差和角度非等晕性误差统一起来考虑,分析激光导引星的大气湍流波前各阶模式的非等晕性误差,并给出了解析模型。同时分析了瑞利导星和钠导星的大气湍流波前的模式非等晕性相对误差,在没有角度偏离的情况下,90 km 的钠导星的模式非等晕性误差明显小于 15 km 的瑞利导星,但是它对角度的敏感程度却远远大于瑞利导星。采用激光导引星的自适应光学系统用于大气湍流的校正,选择较低阶的模式校正就可以达到较好的效果,而且即使目标与导引星的偏角大于等晕角,选择低阶模式也可以达到有效的部分校正效果。

关键词: 自适应光学; 激光导引星; 非等晕性误差; 模式分解

中图分类号: TP202+.7 文献标识码: A

1 引 言

在大气湍流校正的自适应光学(adaptive optics, AO)系统中,通常需要一个比较亮的参考源来提供大气湍流引起的畸变波前,这样的参考源被称为导引星。导引星可以是自然目标,也可以采用将一束激光发射聚焦到高空大气层中来产生一个参考源^[1~3],这称为激光导引星(laser guide star, LGS)。激光导引星概念的提出和发展解决了自适应光学系统的信标问题,但同时带来了聚焦非等晕性误差,是自适应光学系统无法加以校正的。自适应望远镜的口径越大,则要求导引星的高度越高,才能减小这种非等晕的影响。Tyler^[4,5]采用一个特征参量 d_0 来描述有限高度的聚焦非等晕性误差。Gardner 等^[6,7]对激光导引星的自适应光学系统的设计原则和性能进行了详细的研究。从自适应光学校正理论来说,由于存在激光导引星大气湍流波前的非等晕性误差,如果自适应光学系统对所有的波前畸变像差进行补偿的收益抵不上它的非等晕性误差,那么就应选择最优的校正模式。在校正激光导引星的大气湍流的动态波前畸变时,校正所有模式的直接斜率法并非是最有效的方法^[8]。

本文采用像差模式的泽尼克(Zernike)多项式分解的方法,分析激光导引星大气湍流相位波前的像差模式和目标像差模式之间的相关统计特性,并将信标的高度焦距非等晕性误差与角度非等晕性误差统一起来考虑,认为不同的像差模式,具有不同的非等晕性误差,提出了描述激光导引星大气湍流波前的非等晕性误差的解析模型。最后针对瑞利导引星和 Na 导引星,进行了计算分析。

2 波前像差的模式分解和激光导引星的模式非等晕性要求

为了估计望远镜孔径上的残余波前误差,采用泽尼克多项式分解的方法,研究激光导引星自适应光学系统的聚焦非等晕性和角度非等晕性问题。通常将圆对称光学系统的像差用泽尼克多项式来表示。它是在单位圆域上完备正交的多项式序列,并且对应于不同的光学像差(离焦、像散、彗差、球差等),如下式所示:

$$Z_i(\rho, \vartheta) = \sqrt{n+1} \begin{cases} R_n^m \sqrt{2} \cos(m, \vartheta), & \text{如果 } i \text{ 是奇数并且 } m \neq 0 \\ R_n^m \sqrt{2} \sin(m, \vartheta), & \text{如果 } i \text{ 是偶数并且 } m \neq 0 \\ R_n^0(\rho), & \text{如果 } m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

* 国家科委 863 高技术计划资助课题。

E-mail: shenfeng@ioc.ac.cn

收稿日期: 2001-12-04; 收到修改稿日期: 2002-04-02

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} \rho^{n-2s},$$

上式中 n 为第 i 个多项式的径向自由度, m 为角向自由度。

通常有两种不同的排布序列, 对应不同的径向和角向自由度 n 和 m , 本文采用 Noll^[9] 将泽尼克多项式用于大气湍流波前扰动研究的排布序列。将来自目标的大气湍流波前相位 $\phi_N(R\rho)$ 展开为泽尼克多项式的形式(去除平移项和倾斜项)

$$\phi_N(R\rho) = \sum_{i=4}^{\infty} a_{Ni} Z_i(\rho), \quad (2)$$

上式中 ρ 为归一化的孔径坐标向量, 即 $\rho = r/R$, r 为孔径上的坐标向量, R 为望远镜孔径的半径, 而 a_{Ni} 为泽尼克多项式的模式系数, 它可以表达为

$$a_{Ni} = \int d^2 \rho W(\rho) \phi_N(R\rho) Z_i(\rho), \quad (3)$$

其中 $W(\rho)$ 为归一化孔径函数。

大气湍流波前相位的测量, 是采用间接方法通过相位重构得到的。由于波前传感器的子孔径分割数有限, 只能得到有限数目的泽尼克多项式像差模式, 过多和过少的模式数目都会使重构的波前相位造成模式混淆^[10]。当采用激光导引星来探测大气湍流波前时, 根据光路可逆性原理, 它无法探测大气湍流的波前倾斜量, 此倾斜量只能由自然星通过倾斜跟踪探测器得到。因此通过激光导星探测重构的波前相位要去除倾斜量, 其波前相位 ϕ_g 可以表达为

$$\phi_g(R\rho, \alpha) = \sum_{i=4}^J a_{gi}(\alpha) Z_i(\rho), \quad (4)$$

上式中 J 为利用激光导引星探测的波前重构的模式数目, a_{gi} 为通过波前重构得到的泽尼克模式系数, α 为激光导引星与目标的角度偏离量。

自适应光学系统中通过激光导引星得到的估计波前和目标波前的残余相位方差 σ^2 可以表示为

$$\sigma^2(J, \alpha) = \int d^2 \rho W(\rho) \langle |\phi_N(R\rho, \alpha) - \phi_g(R\rho)|^2 \rangle, \quad (5)$$

利用泽尼克多项式在单位圆上的正交特性, 残余相位方差可以表示为各阶泽尼克模式系数的综合:

$$\sigma^2(J, \alpha) = \sum_{i=J+1}^{\infty} \langle a_{Ni}^2 \rangle + \sum_{i=4}^J [\langle a_{Ni}^2 \rangle + \langle a_{gi}^2 \rangle - 2 \langle a_{Ni} \cdot a_{gi}(\alpha) \rangle], \quad (6)$$

上式中的第一项是自适应光学系统不能重构的波前相位的残余项, Noll^[9] 给出了很好的分析, 对于科尔

莫戈罗夫(Kolmogorov) 湍流模型, 当 J 比较大时, 它约等于 $0.2944 \times J^{-\sqrt{3}/2} (D/r_0)^{5/3} / (\text{rad}^2)$ 。第二项是由于激光导引星的波前不能完全拟合目标波前而产生的误差, 其中的各阶模式项可以表示为

$$E_i^2(\alpha) = \langle a_{Ni}^2 \rangle \left[1 + \frac{\langle a_{gi}^2 \rangle}{\langle a_{Ni}^2 \rangle} - 2 \frac{\langle a_{Ni} \cdot a_{gi}(\alpha) \rangle}{\langle a_{Ni}^2 \rangle} \right] = \langle a_{Ni}^2 \rangle \cdot \epsilon_i^2(\alpha), \quad (7)$$

上式中 ϵ_i^2 为各阶模式的波前非等晕性相对误差, 是激光导引星的自适应光学系统所固有的非等晕性误差, 是激光导引星自适应光学系统无法避免和克服的, 因此必须要使 $\epsilon_i^2(\alpha) \ll 1$, 才能发挥采用激光导引星的自适应光学系统对大气湍流的校正作用。

3 焦距非等晕性和角度非等晕性的模式分析

利用(2)式和(4)式, 我们可以对泽尼克波前模式的相关性进行分析, 即

$$\langle a_{Ni} \cdot a_{gi}(\alpha) \rangle = \int d^2 \rho_N \int d^2 \rho_g W(\rho_N) W(\rho_g) Z_i(\rho_N) Z_i(\rho_g) \times \langle \phi_N(R_N \rho_N) \phi_g(R_g \rho_g, \alpha) \rangle, \quad (8)$$

式中

$$\langle \phi_N(R_N \rho_N) \phi_g(R_g \rho_g, \alpha) \rangle = B(R_N \rho_N - R_g \rho_g, \alpha),$$

为望远镜孔径上的大气湍流波前相位的相关函数, 它与湍流的功率谱互为一对傅里叶变换关系。假设目标的高度为 L_N , 激光导引星的高度为 L_g , 如图 1 所示, 则它们的孔径高度函数 $R_N(h)$ 和 $R_g(h)$ 分别为

$$R_N(h) = \zeta_N(h) R = \left(1 - \frac{h}{L_N}\right) R,$$

$$R_g(h) = \zeta_g(h) R = \left(1 - \frac{h}{L_g}\right) R,$$

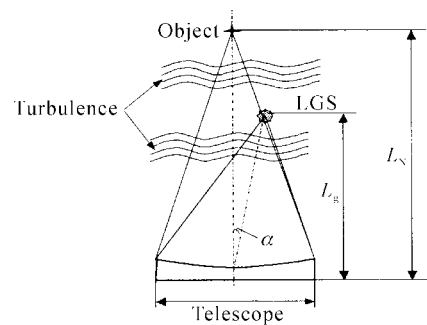


Fig. 1 The object's height and angle deviations from laser guide star

将泽尼克多项式表示为极坐标下的傅里叶变换形式, 并采用大气湍流的分层叠加原理, (8)式可以表示为^[11]

$$\langle a_{N_i} a_{g_i}(\alpha) \rangle = \sum_i \int d^2 \mathbf{K}_N \int d^2 \mathbf{K}_g Q_i(\mathbf{K}_N) Q_i^*(\mathbf{K}_g) \times \int d^2 \boldsymbol{\rho}_N \int d^2 \boldsymbol{\rho}_g \exp(2\pi j \mathbf{K}_g \boldsymbol{\rho}_g) \exp(-2\pi j \mathbf{K}_N \boldsymbol{\rho}_N) \times B_i[ah, i + R_N(h_i) \boldsymbol{\rho}_N + R_g(h_i) \boldsymbol{\rho}_g], \quad (9)$$

式中 h_i 为大气湍流中每一层的高度, $B_i[\dots]$ 为大气湍流每一层的波前相位相关函数, $Q_i(\mathbf{K}_N)$ 是泽尼克多项式的傅里叶变换, 并由文献[9], $Q_i(\mathbf{K})$ 可以写为

$$Q(\mathbf{K}) = Q(k, \phi) = \begin{cases} \sqrt{n+1} \frac{J_{n+1}(2\pi k)}{\pi k} (-1)^{(n-m)/2} i^m \sqrt{2} \cos m\phi, & i \text{ 为偶数.} \\ \sqrt{n+1} \frac{J_{n+1}(2\pi k)}{\pi k} (-1)^{(n-m)/2} i^m \sqrt{2} \sin m\phi, & i \text{ 为奇数.} \\ \sqrt{n+1} \frac{J_{n+1}(2\pi k)}{\pi k} (-1)^{n/2} i, & i = 0. \end{cases} \quad (10)$$

其中 $J_n(x)$ 为第 n 阶贝塞尔函数。将(10)式代入到(9)式中, 将分层湍流的相位功率谱叠加, 并采用科尔莫戈罗夫湍流功率谱模型, 在大气湍流的惯性子空间内, 其相位功率谱为^[12]

$$W_\phi(K) = \frac{k^2}{\cos\Omega} \times 0.033(2\pi)^{2/3} C_n^2(h) K^{-11/3},$$

式中 Ω 为群延迟顶角。

最后可以得到如下式的大气湍流泽尼克像差模式相关性的一般性表示:

$$\langle a_{N_i} a_{g_i}(\alpha) \rangle = \frac{0.033(2\pi)^{-2/3} k^2 R^{5/3}}{\pi^2 \cos\Omega} \int_0^{L_g} dh C_n^2(h) \zeta_g^{-1} \zeta_N^{8/3} (n+1) \times \int_0^\infty dK K^{-14/3} J_{n+1}(2\pi K) J_{n+1} \left[2\pi K \frac{\zeta_g(h)}{\zeta_N(h)} \right] b_{n,m} \left[\frac{ahK i}{R \zeta_N(h)} \right], \quad (11)$$

式中 k 为波数, $C_n^2(h)$ 为大气湍流折射率结构常数, n 为泽尼克多项式的径向自由度, m 为泽尼克多项式的角向自由度,

$$b_{n,m} \left[\frac{ahK i}{R \zeta_N(h)} \right] = \int_0^{2\pi} d\theta \times \begin{cases} (-1)^{n-m} 2\cos^2(m\theta) \\ (-1)^{n-m} 2\sin^2(m\theta) \times \left\{ \cos \left[\frac{2\pi ah}{R \zeta_N(h)} K \cos \theta \right] + i \sin \left[\frac{2\pi ah}{R \zeta_N(h)} K \cos \theta \right] \right\} \\ (-1)^n \end{cases} 2\pi \left\{ J_0 \left[\frac{2\pi ah K}{R \zeta_N(h)} \right] + k_j J_{2m} \left[\frac{2\pi ah K}{R \zeta_N(h)} \right] \right\}, \quad (12)$$

对(12)式用平面波的费里德(Fried)大气相干长度 r_0 的表达式^[13] 进行归一化, 则可以得到更清晰的表达式

$$\langle a_{N_i} a_{g_i}(\alpha) \rangle = 3.895(n+1) \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \times \left\{ \int_0^{L_g} dh C_n^2(h) \zeta_g^{-1}(h) \zeta_N^{8/3}(h) I_{n,m} \left[\frac{ah}{R \zeta_N(h)}, \frac{\zeta_g(h)}{\zeta_N(h)} \right] \right\} / \left[\int_0^\infty dh C_n^2(h) \right], \quad (13)$$

根据(12)式, (13)式中的 $I_{n,m}$ 由下式表达

$$I_{n,m}(x, y) = \int dK K^{-14/3} J_{n+1}(K) J_{n+1}(Ky) [J_0(Kx) + t_i J_{2m}(Kx)], \quad t_i = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ (-1)^{i+m}, & m \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

(13)式中明显地表明, 目标和信标的高度不同和角度不同, 将导致它们之间不同的大气湍流波前的像差模式的相关性变差。当信标与目标重合的时候, 则湍流波前的各阶模式的相关就退化为 Noll^[9] 所给出的结构。

4 激光导引星模式非等晕性的计算分析

由(7)式和(14)式, 我们分析计算自适应光学中最常用的信标方式的模式非等晕性问题, 即瑞利后向散射(15 km 高度)和钠共振散射激光导引星

(90 km 高度),而目标为无穷远的天文观察目标。由于激光导引星的高度和角度的限制,它所引起的焦距非等晕性误差和角度非等晕性误差,会使它所提供的湍流波前与目标的湍流波前之间的相关性变差,这种相关性的变差会大大降低激光导引星自适应光学系统的性能。

自适应光学系统应该选取非等晕性误差小的像差模式进行校正,而对非等晕性误差大的像差模式不予校正,这样可以使自适应光学系统的校正效果达到最佳^[8]。

计算分析中采用的大气湍流的折射率结构函数取为如下的 HV-21 模型^[14]:

$$C_n^2(h) = 8.16 \times 10^{-56} \times \omega^2 h^{10} \times \exp\left(-\frac{h}{1000}\right) + 2.7 \times 10^{-16} \times \exp\left(-\frac{h}{1500}\right) + A \times \exp\left(-\frac{h}{100}\right)$$

上式中 h 为大气层的高度(m),系数 A 和 ω 分别为 $3.189 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$ 和 25.7 m/s ,这个模型给出可见光波段($\lambda = 0.55 \mu\text{m}$)天顶角方向,平面波的费里德大气相干长度 $r_0 = 12 \text{ cm}$,大气等晕角为 $6.34 \mu\text{rad}$ 。

激光导引星的大气湍流波前模式的非等晕误差为

$$\varepsilon_i^2(\alpha) = \left[1 + \frac{\langle a_{gi}^2 \rangle}{\langle a_{Ni}^2 \rangle} - 2 \frac{\langle a_{Ni} a_{gi}(\alpha) \rangle}{\langle a_{Ni}^2 \rangle}\right], \quad (15)$$

由(13)式,上式中的第二和第三项可分别表示为

$$\frac{\langle a_{gi}^2 \rangle}{\langle a_{Ni}^2 \rangle} = \int_0^{L_g} dh C_n^2(h) \zeta_g^{5/3}(h) / \left[\int_0^{\infty} dh C_n^2(h) \right],$$

$$\frac{\langle a_{Ni}(\alpha) a_{gi} \rangle}{\langle a_{Ni}^2 \rangle} = \int_0^{L_g} dh C_n^2(h) \zeta_g^{-1}(h) I_{n,m}[ah/R, \zeta_g(h)] / \left[\int_0^{\infty} dh C_n^2(h) I_{n,m}(0,1) \right],$$

将上式中的 $I_{n,m}(x,y)$ 进行近似展开,可以得到

$$I_{n,m}(x,y) = \int dK \cdot K^{-14/3} \cdot J_{n+1}(K) \cdot J_{n+1}(Ky) \times \left\{ 1 - \frac{1}{\Gamma(2)} \left(\frac{Kx}{2}\right)^2 + \dots + t_i \left[\frac{1}{\Gamma(2m+1)} \left(\frac{Kx}{2}\right)^{2m} - \frac{1}{\Gamma(2m+2)} \left(\frac{Kx}{2}\right)^{2m+3} + \dots \right] \right\}, \quad (16)$$

$$t_i = \begin{cases} 0 & m = 0, \\ (-1)^{i+m} & m \neq 0 \end{cases}$$

在小角度偏离的一级近似条件下,即 $ah/D < 1$ 时,对(16)式,只取变量 x 的平方项,则

$$I_{n,m}(x,y) = \begin{cases} \int dK \cdot K^{-14/3} \cdot J_{n+1}(K) \cdot J_{n+1}(Ky) \left\{ 1 - \left[\left(\frac{Kx}{2}\right)^2 \pm \frac{1}{2} \left(\frac{Kx}{2}\right)^2 \right] \right\}, & m = 1, \\ \int dK \cdot K^{-14/3} \cdot J_{n+1}(K) \cdot J_{n+1}(Ky) \left[1 - \left(\frac{Kx}{2}\right)^2 \right], & m \neq 1, \end{cases} \quad (17)$$

从(17)式可以得出,当泽尼克多项式的角向自由度 $m = 1$ 时,对应的像差模式分别为 2、3、7、8、16、17、27、28、34、35 等,两个方向的非等晕误差并不相等,均方误差约为 3 倍关系。Sasiela 和

Shelton^[15]采用梅林变换技术得到了倾斜的角度非等晕误差,两个方向的均方误差也是 3 倍关系,但这只是在角度偏离很小条件下的一级近似关系。利用下面的积分公式

$$\int \frac{J_\mu(t) J_\nu(at)}{t^\lambda} dt = a^\nu \Gamma\left(\frac{\mu + \nu - \lambda + 1}{2}\right) / \left[2^\lambda \Gamma(\nu + 1) \Gamma\left(\frac{\mu - \nu + \lambda - 1}{2}\right) \right] \times F\left(\frac{\mu + \nu - \lambda + 1}{2}, \frac{-\mu + \nu - \lambda + 1}{2}, \nu + 1, a^2\right)$$

将(17)式进行简化整理,并代入(15)式,可以得到

$$\frac{\langle a_{Ni}(\alpha) a_{gi} \rangle}{\langle a_{Ni}^2 \rangle} = \frac{\int_0^{L_g} dh C_n^2(h) \zeta_g^{-1}(h) \left\{ \int dk \cdot k^{-14/3} J_{n+1}(k) J_{n+1}[k \zeta_g(h)] \left[1 - \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \left(\frac{ah}{D}\right)^2 k^2 \right] \right\}}{\int dh \cdot C_n^2(h) \left[\int dk \cdot k^{-14/3} J_{n+1}(k) J_{n+1}(k) \right]} =$$

$$\left\{ \int_0^{L_g} dh \cdot C_n^2(h) \zeta_g^n(h) F\left[h - \frac{5}{6}, -\frac{11}{6}, n+2, \zeta^2(h)\right] - \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\alpha}{D}\right)^2 \int_0^{L_g} dh \cdot C_n^2(h) (h) h^2 \zeta_g^m(h) \frac{22}{3} \left(n - \frac{5}{6}\right) F\left[n + \frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, n+2, \zeta^2(h)\right] \right\} \times \left[\int_0^{\infty} dh \cdot C_n^2(h) F\left(h - \frac{5}{6}, -\frac{11}{6}, n+2, 1\right) \right]^{-1},$$

其中函数 $F(\dots)$ 为超几何函数

$$F(a, b, c, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i}{(c)_i \cdot i!} z^i, \quad |a| \leq 1,$$

其中 $(a)_0 = 1,$

$$(a)_i = a(a+1)\dots(a+i-1) =$$

$$\Gamma(a+i)/\Gamma(a), \quad i \geq 1$$

我们注意到,在泽尼克多项式的径向自由度 n 小于 10 时,可以将上式中的超几何函数展开,并取前三项,即

$$F\left[n - \frac{5}{6}, -\frac{11}{6}, n+2, \zeta^2(h)\right] = 1 + \frac{(n-5/6)(-11/6)}{(n+2)} \zeta^2(h) + \frac{(n-5/6)(n+1/6)(-11/6)(-5/6)}{2(n+2)(n+3)} \zeta^4(h) + \dots,$$

以及

$$F\left[n + \frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, n+2, \zeta^2(h)\right] = 1 + \frac{(n+1/6)(-5/6)}{(n+2)} \zeta^2(h) + \frac{(n+1/6)(n+7/6)(-5/6)(1/6)}{2(n+2)(n+3)} \zeta^4(h) + \dots,$$

如图 2 所示,上式中,取级数展开的前三项就足以描述超几何函数,在 $n < 10$ 时,级数截断误差很小。

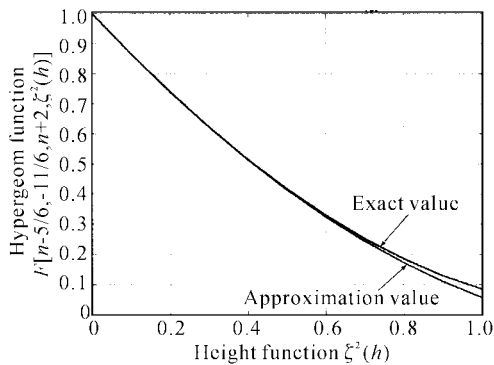


Fig. 2 The approximation of hypergeom function

$$F\left[n - \frac{5}{6}, -\frac{11}{6}, n+2, \zeta^2(h)\right]$$

我们定义下面两个参量,来描述球面波的折射

率结构函数的高度矩:

$$p_n = \int_0^{L_g} dh \cdot C_n^2(h) \zeta^n(h),$$

$$q_n = \int_0^{L_g} dh \cdot C_n^2(h) h^2 \zeta^n(h),$$

由以上的分析,我们可以将激光导引星和目标的各阶像差模式的非等晕性相对误差表示为

$$\epsilon_i^2(\alpha, L_g) = 1 + \frac{p_{5/3}}{u_0} - \frac{2}{cu_0} \times$$

$$[p_n + c_1 p_{n+2} + c_2 p_{n+4} - d(q_n + d_1 q_{n+2} + d_2 q_{n+4})],$$

它是一个偏离角度 α 和导引星高度 L_g 的函数,其中的各个参量如下:

$$c = \frac{64}{27} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+23/6)} \frac{2^{2/3} 3^{1/2} \pi^{1/2}}{\Gamma(2/3)},$$

$$c_1 = \frac{(n-5/6)(-11/6)}{(n+2)},$$

$$c_2 = \frac{(n-5/6)(n+1/6)(-11/6)(-5/6)}{2(n+2)(n+3)},$$

$$d = \begin{cases} \frac{22}{3} \left(\frac{\alpha}{D}\right)^2 \left(n - \frac{5}{6}\right) \left(1 \pm \frac{1}{2}\right), & m = 1, \\ \frac{22}{3} \left(\frac{\alpha}{D}\right)^2 \left(n - \frac{5}{6}\right), & m \neq 1 \end{cases}$$

$$d_1 = \frac{(n+1/6)(-5/6)}{(n+2)},$$

$$d_2 = \frac{(n+1/6)(n+7/6)(-5/6)(1/6)}{2(n+2)(n+3)}.$$

有限高度的激光导引星和观察目标之间的非等晕性误差应该是两者的高度差和角度差的函数。高度增加,则导引星的聚焦非等晕性误差则减小,角度偏离增大,角度非等晕性误差则增加。在不同的大气折射率模型下,激光导引星的像差模式非等晕性误差会有所不同。在 HV-21 的大气折射率模型下,我们可观察 15 km 高度的瑞利激光导引星和 90 km 高度的钠导引星大气湍流波前的各阶像差模式的聚焦非等晕性误差和角度非等晕性误差,如图 3 和图 4 所示。在没有角度偏离的情况下,激光导

引星的高度越高,各阶模式的非等晕性相对误差就越小。90 km 的激光钠共振散射导引星(简称钠导星)的模式非等晕性相对误差比 15 km 的瑞利散射导引星要小一个量级左右。但是,当存在角度偏离时,钠导星的模式非等晕性相对误差迅速增大,而瑞利导星则变化相对较小。当角度增大导致 $a_{N_i}a_{R_i}(\alpha) \rightarrow 0$ 时, $\epsilon_i^2(\alpha) > 1$, 而 $a_{N_i}a_{R_i}(\alpha)$ 决定于整个大气的积分路径,因此高度很高的钠导星与目标之间的湍流波前模式相干性变得很差。而瑞利导星则由于高度较低,对偏离角的敏感程度比钠导星相对要小,但导星高度以上部分的大气湍流没有被采样,又使得它的模式非等晕性相对误差增大。

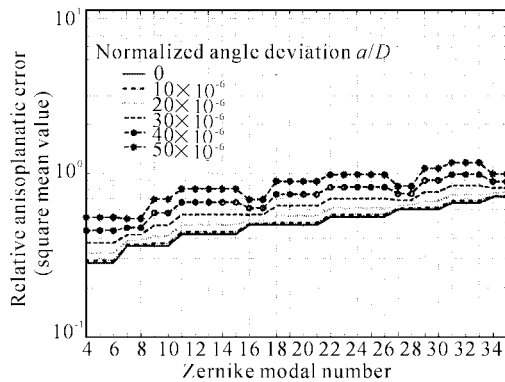


Fig. 3 The modal decomposition of anisoplanatic errors of infinite distance object and Rayleigh laser guide star at height of 15 km. The angle deviation a is normalized by aperture diameter D , and the normalized values are $0, 10 \times 10^{-6}, 20 \times 10^{-6}, 30 \times 10^{-6}, 40 \times 10^{-6}, 50 \times 10^{-6}$ respectively

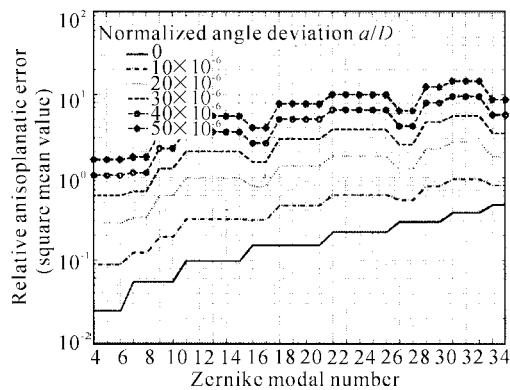


Fig. 4 The modal decomposition of anisoplanatic errors of infinite distance object and Na laser guide star at height of 90 km. The angle deviation a is normalized by aperture diameter D , and the normalized values are $0, 10 \times 10^{-6}, 20 \times 10^{-6}, 30 \times 10^{-6}, 40 \times 10^{-6}, 50 \times 10^{-6}$ respectively

从图 3 和图 4 可以看出,泽尼克多项式的阶数

越高,模式非等晕性相对误差也越大。如果不考虑模式的混淆和重叠,以及噪声的影响,那么自适应光学系统校正的模式阶数应该越高越好。但是模式非等晕性误差会限制校正模式的阶数。图 5 和图 6 是在不同的 a/D 时,自适应光学系统对 15 km 的瑞利导星和 90 km 的钠导星湍流波前畸变补偿的残余量相对比例,横坐标为校正的泽尼克像差模式数,纵坐标为残余量相对比例。从图 5 和图 6 所见,对于 15 km 的瑞利导星,当自适应光学系统校正到 35 阶泽尼克像差时,如果不存在角度非等晕性误差,那么残余的高度聚焦非等晕性均方误差还存在 35% 左右,如果 a/D 为 50×10^{-6} 时,即对于口径为 2 m 的望远镜,目标和导星的角度偏离达到 $97 \mu\text{rad}$ 时,残余的非等晕性均方误差(包括高度聚焦非等晕性误差和角度非等晕性误差)超过 60%,这大大不利于

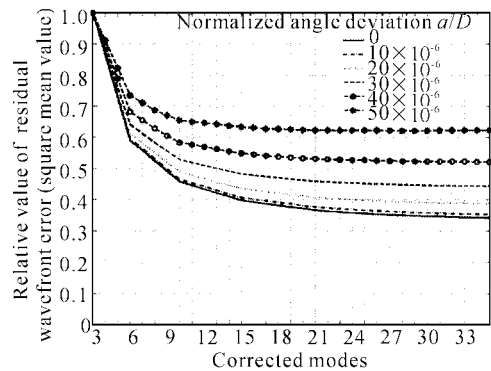


Fig. 5 The residual wavefront error, which include the anisoplanatic error, is decreased with the corrected modals of adaptive optics system, the asymptote is very obvious

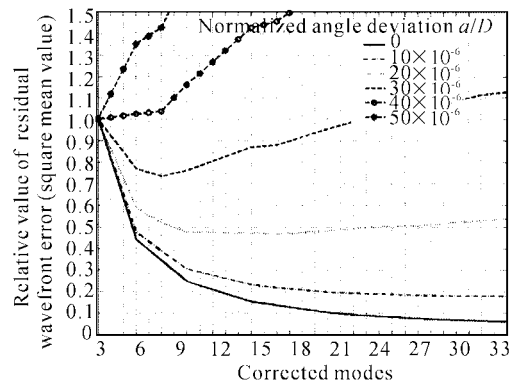


Fig. 6 The residual wavefront error, which include the anisoplanatic error, is decreased with the corrected modals of adaptive optics system at the small angle deviation, but at the large angle deviation, the residual error may be increased rapidly with the corrected modals

自适应光学系统的校正。而对于 90 km 的钠导星, 在 α/D 很小时, 则残余的非等晕性均方误差(包括高度聚焦非等晕性误差和角度非等晕性误差)也很小, 但是当 α/D 逐渐增大时, 残余的非等晕性均方误差则迅速增加, 甚至会超过 100%, 如 α/D 达到 40×10^{-6} 以上, 即当望远镜孔径 D 为 2 m 时, 偏离角度为 $78 \mu\text{rad}$ 时, 这意味着自适应光学系统已经失去了作用。当角度偏离量比较小时, 则自适应光学系统的校正效果将取决于校正的像差模式阶数, 并非是像差模式阶数校正得越多越好, 此时必须仔细权衡像差模式的校正阶数, 因为过多的校正模式, 会带来更大的非等晕性误差, 应该有一个最佳校正的模式阶数, 从图 6 可见, 当 α/D 为 30×10^{-6} 时, 最佳的校正模式数约在 8 阶左右。增大望远镜的孔径, 会使归一化的偏离角度减小, 从而减小非等晕性相对误差, 此时钠导星的优点就能体现出来。

结论 激光导引星的非等晕性误差会降低自适应光学系统的校正性能。如何选择合理的大气湍流像差模式进行有效校正, 是激光导引星自适应光学系统必须要考虑的问题。由于不同的像差模式的非等晕性误差不同, 模式阶数越高, 则误差越大。而且由于导引星不可能与观察目标完全同轴, 它们之间的角度偏离会导致非等晕性误差。对于瑞利激光后向散射导引星, 由于其高度较低, 不能采样导引星高度以上的大气湍流, 从而产生聚焦非等晕性误差, 但是它对角度的敏感性较小。而对于 90 km 左右的钠导星, 高度聚焦非等晕性误差较小, 但是对角度的敏感性较大。聚焦非等晕性误差和角度非等晕性误差的大小, 与大气折射率结构函数有很大关系。本文提出了导引星大气湍流的非等晕性相对误差的定义, 认为采用激光导引星的自适应光学系统应该选取非等晕性相对误差比较小的模式进行校正, 就可以得到较好的校正效果, 而且即使目标和导引星的偏角远大于等晕角, 选择低阶模式可以进行有效的部分校正。在实际的自适应光学校正系统中, 噪声的存在会进一步降低自适应光学系统的性能, 这里没有讨论当存在噪声时激光导引星重构波前的模式非等晕性的问题。

参 考 文 献

- 1 Foy R, Labeyrie A. Feasibility of adaptive telescope with laser probe. *Astron. Astrophys.*, 1985, **152**:129~131
- 2 Thompson L A, Gardner C S. Experiments on laser guide stars at Mauna Kea Observatory for adaptive imaging in astronomy. *Nature*, 1987, **328**(6127):229~231
- 3 Fugate R Q, Fried D L, Amecr G A *et al.*. Measurement of atmospheric wavefront distortion using scattered light from a laser guide star. *Nature*, 1991, **353**(6340):144~146
- 4 Tyler G A. Rapid evaluation of d_o : the effective diameter of a laser-guide-star adaptive-optics system. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1):325~338
- 5 Tyler G A. Wave-front compensation for imaging with off-axis guide stars. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1):339~346
- 6 Gardner C S, Welsh B M, Thomson L A. Design and performance analysis of adaptive optical telescopes using laser guide stars. *Proc. IEEE*, 1990, **78**:1721~1743
- 7 Fried D L, Belsher J F. Analysis of fundamental limits to artificial-guide-star adaptive-optics-system performance for astronomical imaging. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1):277~287
- 8 Whiteley M R, Welsh B M, Roggemann M C. Optimal modal wave-front compensation for anisoplanatism in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **15**(8):2097~2106
- 9 Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3):207~211
- 10 Jiang Wenhan, Li Huagui, Huang Shufu *et al.*. Hartmann-Shack wavefront sensing and wavefront control algorithm. *Proc. SPIE*, 1990, **1271**:82~93
- 11 Molodij G, Rousset G. Angular correlation of Zernike polynomials for a laser guide star in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1997, **14**(8):1949~1966
- 12 Greenwood D P, Fried D L. Power spectra requirements for wave-front-compensative systems. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3):193~206
- 13 Fried D L. Statistics of a geometric representation of wavefront distortion. *J. Opt. Soc. Am.*, 1965, **55**(10):1427~1435
- 14 Parenti R P, Sasiela R J. Laser-guide-star system for astronomical applications. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1):288~309
- 15 Sasiela R J, Shelton J D. Transverse spectral filtering and Mellin transform techniques applied to the effect of outer scale on tilt and tilt anisoplanatism. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1993, **10**(4):646~660

Modal Decomposition of Anisoplanatic Error of Atmospheric Turbulence for a Laser Guide Star

Shen Feng Jiang Wenhan

(*Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209*)

(Received 4 December 2002; revised 2 April 2002)

Abstract: The beacon problem of adaptive optics (AO) is settled by the promotion of laser guide star (LGS), but the anisoplanatic error due to LGS will degrade the performance of AO system as well. Analytical expressions are given to evaluate the modal anisoplanatic error of atmospheric turbulence for LGS. Anisoplanatic error for Rayleigh LGS and Na LGS are also analyzed. Results show that the modal anisoplanatic error of 90 km Na LGS is obviously less than that of 15 km Rayleigh LGS without the angle deviation between LGS and object, but is greatly sensitive to the angle deviation than Rayleigh LGS. Good performance will be obtained with low-order aberration mode correction in LGS AOS, and when angle deviation between beacon and object is larger than isoplanatic patch, low-order modes should be corrected for effective correcting result.

Key words: adaptive optics; laser guide star (LGS); anisoplanatic error; modal decomposition