

文章编号: 0253-2239(2003)02-0240-05

快速傅里叶算法在哈特曼-夏克传感器 波前重构算法中的应用

段海峰 杨泽平 张雨东

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

摘要: 提出了一种应用快速傅里叶变换算法提高哈特曼-夏克波前传感器波前重构实时性的快速算法。在根据波前斜率值应用最小二乘法估计波前相位的过程中,应用快速傅里叶变换算法进行方程的对角化和相位值的解耦,算法精度高、稳定。空间分辨率越高,算法实时性的优越性就越显著。

关键词: 自适应光学; 波前重构; 哈特曼-夏克传感器; 快速傅里叶变换算法

中图分类号: TP212.14 文献标识码: A

1 引言

哈特曼-夏克传感器因其波前测量实时性好等特点而广泛用于自适应光学系统中^[1],随着自适应光学系统在天文观测、激光传输等领域应用研究的发展,自适应光学正向高性能、高空间分辨率波前校正方向发展,波前校正器的驱动器数由几十个发展到数百个、上千个,这就要求与之相匹配的哈特曼-夏克波前测量传感器的空间分辨率也要相应提高。

哈特曼传感器还由于其在现场测量时无需参考光,并可以测量高能脉冲光的波前,抗干扰能力比干涉仪高等优点,已成功用于激光光束质量诊断、光学元件和光学系统检测、大气扰动测量等诸多领域^[2]。

在惯性约束聚变等大型激光系统中,需要高质量的激光光束,因此要对激光的近场波前相差及系统的元件进行精密测量、加工,而且在这些系统中,光束口径比较大。干涉测量技术有很高的测量精度,但由于大口径的波前测量缩束比较大,光束在空间的传播距离长,受振动、空气扰动等因素的影响,测量精度不高。移相干涉技术能够减弱这些因素的影响,但它需要多次采样,可用于元件检测,但不适用于脉冲激光的测量,而且在元件加工过程中的在线测量实时性也较差,成本也比较高。文献[3]详细研究了 64×64 子孔径哈特曼-夏克传感器与 Fizeau 移相干涉仪波前测量精度比较,结果表明 64×64 子孔径空间分辨率的哈特曼-夏克传感器,其

测量精度与干涉仪相当,并在大口径光学测量和激光光束诊断方面有更多的优点。

因此,开展高分辨率哈特曼-夏克传感器技术的研究,对高分辨率自适应光学技术、激光参量诊断技术及大口径光学元件精密加工技术都有重要的实用意义。哈特曼-夏克传感器测量的是波前相位斜率,需要经过波前复原求出相位值,复原的方法主要有区域法和模式法两类^[4,5],为了满足实时性的要求,哈特曼-夏克传感器的子孔径较少,测量的空间分辨率因此比干涉仪低。当增加哈特曼-夏克传感器的子孔径数提高空间分辨率、提高测量精度时,区域法和模式法的运算量非常大,实时性降低,限制了高分辨率哈特曼-夏克传感器在自适应光学系统等领域的进一步应用。针对实时性问题,文献[6]提出了分块算法,文献[7]提出了迭代法进行波前重构。本文在区域法重构波前的基础上,应用快速傅里叶变换(FFT)算法,提高波前复原算法的实时性,为高分辨率哈特曼-夏克传感器在自适应光学技术及其它领域的应用作算法准备。

2 波前重构数学模型

图 1 所示的方形哈特曼-夏克传感器测量区域,哈特曼-夏克传感器的子孔径数为 $M \times N$,图中的方形子区域为哈特曼-夏克传感器的子孔径,栅格交叉点为待估计相位点,为 $(M+1) \times (N+1)$ 维,由于哈特曼-夏克传感器测量的是波前各子区域的相位斜率,区域法重构波前的最小二乘表达式为^[7]

$$4\phi_{ij} - \phi_{i-1,j} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1} =$$

E-mail: haifduan2002@yahoo.com

收稿日期:2001-09-17; 收到修改稿日期:2002-05-27

$$(g_{xij} - g_{x,i+1,j} + g_{yij} - g_{y,i,j+1})h$$

$$1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad (1)$$

其中 g_x, g_y 是哈特曼-夏克传感器测得的两彼此正交方向的波前斜率, ϕ_{ij} 为待估计相位点的相位值, h 为哈特曼-夏克传感器子孔径的尺寸。考虑到边界条件, 文献[8] 给出了区域法求解波前的矩阵方程, 求解该方程可用直接求逆法、高斯消元法、迭代解法等算法。这些算法在哈特曼-夏克传感器子孔径数较少时, 运算量不大, 可以保证算法的实时性, 但随着哈特曼-夏克传感器空间分辨率的提高, 重构算法的实时性就成为必须解决的实际问题。本文应用快速傅里叶变换算法进行波前矩阵方程的对角化和相位求解, 从而可以大幅度降低运算量, 提高算法的实时性。

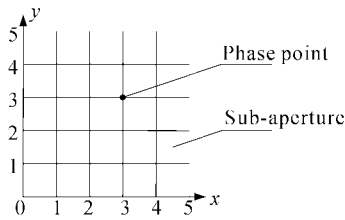


Fig. 1 H-S sensor's sub-aperture

3 应用快速傅里叶变换算法求波前相位的最小二乘解

快速傅里叶变换算法以其运算速度快、所需内存小而广泛用于数字信号处理领域^[9]。在求解由(1)式确定的线性方程组的过程中, 需要实现方程系数矩阵的对角化, 而这一过程可以通过快速傅里叶变换算法实现, 从而实现(1)式的快速求解。

首先, 不考虑区域中边界处的相位估计差分方程, 在波前重构的区域内, 即

$$1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq j \leq N-1,$$

(1)式严格成立, 并由它导出波前估计的矩阵方程组表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_0 \phi_1 - \phi_2 &= \beta_1, \\ -\phi_{q-1} + \mathbf{A}_0 \phi_j - \phi_{q+1} &= \beta_q, \\ (2 \leq q \leq M-2) \\ -\phi_{M-2} + \mathbf{A}_0 \phi_{M-1} &= \beta_{M-1}, \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & 0 \\ & -1 & 4 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

其中 ϕ_i 为待估计相位矢量, β_i 为由测量波前斜率决定的矢量。

因 \mathbf{A}_0 为实对称正定矩阵, 则存在正交矩阵 \mathbf{Q} , 使

$$\mathbf{Q}' \mathbf{A}_0 \mathbf{Q} = \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1})$$

且

$$\mathbf{Q}' \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{Q}$$

\mathbf{I} 为单位矩阵。取矩阵 \mathbf{Q} 的元素 q_{ij} 为

$$q_{ij} = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{ij\pi}{N}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3)$$

则

$$\lambda_i = 4 - 2\cos(i\pi/N)$$

对(2)式的矩阵 \mathbf{A}_0 作正交变换, 得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} \phi'_1 - \phi'_2 &= \beta'_1, \\ -\phi'_{q-1} + \mathbf{D} \phi'_j - \phi'_{q+1} &= \beta'_q \\ (2 \leq q \leq M-2), \\ -\phi'_{M-3} + \mathbf{D} \phi'_{M-2} &= \beta'_{M-2}, \end{aligned} \right\} (4)$$

其中

$$\phi'_q = \mathbf{Q} \phi_q, \quad \beta'_q = \mathbf{Q} \beta_q. \quad (5)$$

将(4)式的每一个分块矩阵方程组的第 k 个方程重新组合成一个新的分块矩阵方程组, 则(4)式可另表示为

$$-\phi''_{q-1} + \mathbf{D}''_q \phi''_j - \phi''_{q+1} = \beta''_q \quad 1 \leq q \leq N-1. \quad (6)$$

上式矩阵表达式的系数矩阵为对角占优矩阵, 应用高斯消元法解方程求解 ϕ'' , 需 $5(M-1)(N-1)$ 次乘法。将(6)式解得的 ϕ'' 的每个向量组的第 k 个元素重新组合成向量 ϕ' , 则根据(5)式, 可求出待估计的相位点的相位值:

$$\phi_q = \mathbf{Q} \phi'_q, \quad 1 \leq q \leq M-1. \quad (7)$$

在波前相位的求解过程中, 系数矩阵 \mathbf{A} 的对角化可以离线计算出, 算法只需完成两次向量的线性变换, 由(3)式和(5)式, 若设

$$\nu_l = \begin{cases} 0, & l = 0 \\ \phi'_{ql}, & l = 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & l = N-1, N, \dots, 2N-1 \end{cases}$$

则

$$\mathbf{V}_l = \text{FFT}(\nu) = \sum_{k=0}^{2N-1} \nu_k \exp\left(\frac{ikl2\pi}{2N}\right), \quad (8)$$

比较(3)式、(8)式, (7)式可表示为

$$\phi_i = \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \text{Im}[\text{FFT}(\phi'_q)], \quad (9)$$

其中 $\text{FFT}(\cdot)$ 代表傅里叶变换算子。 $\text{Im}[\cdot]$ 代表取复数的虚部算子。同理可求得(5)式中的向量 β' 。

若 M, N 为 2^m 的形式, 则在两次线性变换过程中应用快速傅里叶变换算法, 乘法运算量可由直接作线

性变换的 $2(MN^3 + NM^3)$ 次降为 $2(MN\log_2 2N + MN\log_2 2M)$ 次,当哈特曼-夏克传感器的子孔径数比较大时,运算速度可大幅度提高,从而提高哈特曼-夏克传感器波前重构算法的实时性。

4 边界条件的近似求解

在波前估计的计算式(2)中,只考虑了哈特曼-夏克传感器区域内的估计点,需要知道区域边界处的相位值,才能准确求解(2)式,而哈特曼-夏克传感器测量的是斜率值,给出的是诺依曼边界条件,需要作边界条件的近似求解,求得边界处的相位值。

在边界上:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0,j+1} - \phi_{0j} + \epsilon_{0j} &= g_{x,1j}, \\ \phi_{M,j+1} - \phi_{Mj} + \epsilon_{Mj} &= g_{x,M,j}, \\ \phi_{i+1,0} - \phi_{i,0} + \xi_{i0} &= g_{y,i,1}, \\ \phi_{i+1,N} - \phi_{i,N} + \xi_{iN} &= g_{y,i,N}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由于实际被测的波前相位是连续光滑的曲面,则在边界上的相位点是封闭连续的曲线,设

$$\phi_{0,0} = 0,$$

则边界上的相位最小二乘解的矩阵表达式为

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{G}, \quad (11)$$

Table 1 The number of multiplicative time in different algorithm

Number of H-S's sub-apertur	FFT algorithm	Iterative algorithm	Gauss elimination	Inverse matrix algorithm	Matrix extended inversion algorithm
8×8	1754	2.401×10^3	3.922×10^4	1.176×10^5	4.706×10^5
16×16	8490	5.063×10^4	3.797×10^6	1.139×10^7	4.556×10^7
32×32	38986	9.235×10^5	2.958×10^8	8.875×10^8	3.550×10^9
64×64	1.7428×10^5	1.575×10^6	2.084×10^{10}	6.252×10^{10}	2.501×10^{11}
128×128	7.662×10^5	2.601×10^7	1.399×10^{12}	4.196×10^{12}	1.678×10^{13}
256×256	3.335×10^6	4.228×10^9	9.165×10^{13}	2.749×10^{14}	1.100×10^{15}

6 实验及仿真结果

应用快速傅里叶变换算法,实验比较了一 32×32 阵列的哈特曼-夏克传感器和 Zego 干涉仪对同一像差板的波像差测量,如图 2、图 3 所示。

图 4 是两测量结果对应坐标位置的相位值相减的结果。

实验结果表明快速傅里叶变换算法用于哈特曼-夏克传感器的波前重构是完全可行的。而后仿真实验了 128×128 子孔径数的哈特曼-夏克传感器波前测量、重构的精度,原始波前由泽尼克(Zernike)多项式定义,根据夫琅和费衍射理论,仿真生成带有各种波前像差的光束在哈特曼-夏克传感器上形成

其中, \mathbf{A} 为(2)式中 \mathbf{A}_0 的形式,对角线元素为 2,维数 $[2(M+N)-1] \times [2(M+N)-1]$, $\boldsymbol{\phi}, \mathbf{G}$ 为 $[2(M+N)-1] \times 1$ 维持估计波前、相邻子孔径斜率差分量,应用高斯消元法,需 $5[2(M+N)-1]$ 次乘法运算,可得边界处波前相位的最小二乘解,将解得的边界相位值代入(2)式,即可求得哈特曼-夏克传感器的重构波前。

5 讨 论

根据以上的分析,应用快速傅里叶变换算法总的乘法次数为

$$5[2(M+N)-1] + 2MN\log_2 2N + 5(M-1)(N-1) + 2MN\log_2 2M. \quad (12)$$

而对(1)式采用求逆矩阵的方法,乘法次数为 $[(M-1)(N-1)]^3$,采用高斯消元法,乘法次数为 $[(M-1)(N-1)]^3/3$,采用高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代算法,迭代次数约为 $[(M-1)(N-1)]^2$ 量级^[10];若采用文献[4]中的求广义逆矩阵的方法,乘法次数为 $4(MN)^3$ 。表 1 是采用不同算法的乘法次数比较。

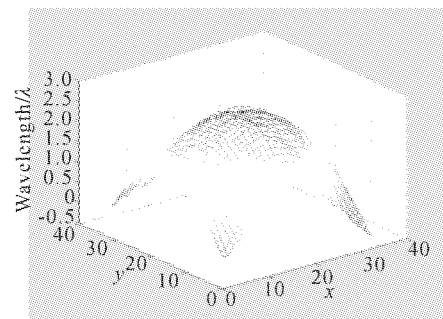


Fig. 2 The wavefront measured by 32×32 H-S sensor PV=3.07λ;RMS=0.694λ

的 CCD 光斑点阵,采用质心法计算哈特曼-夏克传感器各子孔径的斜率,相邻子孔径处的斜率由插值法解出,依(2)式~(11)式应用快速傅里叶变换算法

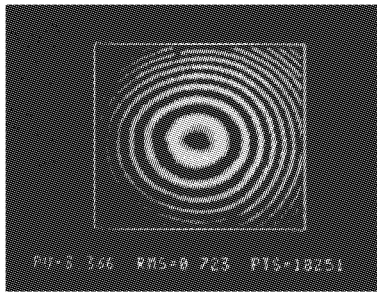


Fig. 3 The wavefront measured by Zego interferometer

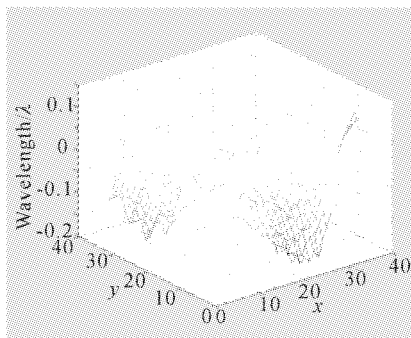


Fig. 4 The residual error of wavefront measured by H-S compared with Zego interferometer

$$PV=0.311\lambda; RMS=0.0394\lambda$$

重构波前,利用残余波前相位均方根与原始波前均方根的比值 C_{rms}/Y_{rms} 表示波前重构精度,该比值越小,表示波前重构精度越高。

图 5 是 128×128 子孔径的哈特曼-夏克传感器对 65 阶泽尼克多项式波前的重构精度。由仿真结果可知, 128×128 子孔径的哈特曼-夏克传感器对低阶泽尼克多项式波前有很高的重构精度 ($\lambda/100 \sim \lambda/30$),随着泽尼克多项式阶数的增加,波前的空间频谱逐渐变宽,哈特曼-夏克传感器的采样精度降低,重构精度随之降低。而且应用快速傅里叶变换

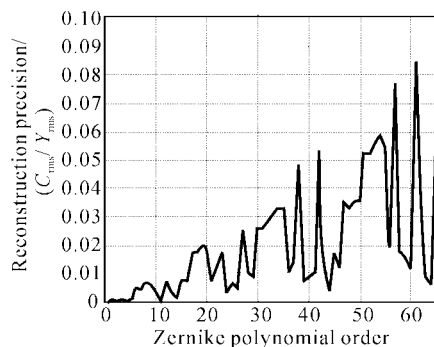


Fig. 5 The reconstruction precision for the first 65 order Zernike polynomial

算法,计算机很快就可以计算出重构结果,若采用其他重构算法,由表 1 可知,运算量比快速傅里叶变换算法高几个量级,计算速度是无法容忍的,也必然会限制高分辨率哈特曼-夏克传感器的应用。

结论 本文在应用区域法对波前进行最小二乘估计的过程中,应用快速傅里叶变换算法,在子孔径数较多的哈特曼-夏克传感器的波前重构过程中,使算法的运算量大幅度降低,既节约处理系统的内存,又提高了波前重构的实时性,为解决高分辨率哈特曼-夏克传感器在自适应光学系统、光学在线检测、及激光近场测量等领域应用中的实时性问题,在算法上提出了一种解决途径。从而可以在不降低哈特曼-夏克传感器实时性、稳定性的前提下,进一步提高哈特曼-夏克传感器的空间分辨率,提高测量精度。

参 考 文 献

- 1 Li Xinyang, Jiang Wenhan *et al.*. Analysis of an adaptive control algorithm used in an adaptive optical system. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2001, **21**(3):283~289 (in Chinese)
- 2 Rao Changhui, Jiang Wenhong *et al.*. Temporal correction effectiveness of adaptive optical system for light wave atmospheric propagation. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2001, **21**(8):933~938 (in Chinese)
- 3 Koch J A, Presta R W. Experimental comparison of a Shack-Hartmann sensor and a phase-shifting interferometer for large-optics metrology applications. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(25):4540~4546
- 4 Southwell W H. Wave-front estimation from wave-front slope measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, **70**(8):998~1006
- 5 Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1977, **67**(8):1065~1072
- 6 Wang yingbo. A fast algorithm of zonal wave-front reconstructions. *High Power Laser and Particle Beams*, 1991, **13**(8):297~302
- 7 Zou Weiyao, Zhang Zhenchao. Generalized wave-front reconstruction algorithm applied in a Shack-Hartmann test. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(2):250~268
- 8 Zhou Renzheng. *Adaptive Optics* (自适应光学). Beijing: National Defense Industrial Press, 1996 (in Chinese)
- 9 Gonzalez R C, Wintz P. *Digital Image Processing*. Reading, MA, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1977
- 10 Lapidus L, Pinder G F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. Sun Nezheng, Beijing: Coal and Charcoal Industrial Press, 1989

Wave-Front Reconstruction Algorithm of Shack-Hartmann Sensor Based on FFT Algorithm

Duan Haifeng Yang Zeping Zhang Yudong

(*Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209*)

(Received 17 September 2001; revised 27 May 2002)

Abstract: Based on the fast Fourier transform (FFT) algorithm, the wave-front reconstruction algorithm of Shack-Hartmann sensor is described. The fast Fourier transform is used to diagonalize and decouple the wave-front reconstruction equations which is deduced from the least-squares criterion. The algorithm is accurate and stable. And the superiority of real-time becomes notable when the Shack-Hartmann sensor's spatial resolution is getting higher.

Key words: adaptive optics; Shack-Hartmann wave-front sensor; wave-front reconstruction; FFT algorithm