

文章编号: 0253-2239(2003)02-0155-04

双重分数傅里叶变换计算全息*

曾阳素^{1,2} 郭永康¹ 谢世伟¹ 高福华¹ 彭钦军¹

(¹ 四川大学物理系, 成都 610064)
(² 邵阳学院物理系, 邵阳 422000)

摘要: 提出了双重分数傅里叶变换计算全息。在这种方法中, 将两个图像的信息分别经不同阶的分数傅里叶变换后, 记录在同一张分数傅里叶变换计算全息图上。它需要两个特定的分数傅里叶变换系统才能再现出所记录的图像信息, 利用其再现方式的特殊性, 可制成一种新的安全认证系统。

关键词: 全息术; 分数傅里叶变换; 计算全息图; 光学安全

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A

1 引 言

1966 年, 罗曼(Lohmann)首先应用迂回相位法对复数波面编码, 制出了罗曼型计算全息图, 标志着计算全息术的开端^[1]。人们曾对计算全息寄予厚望, 然而由于种种原因, 在这之后的一段时间内, 它的应用并没有人们原来预想的那么广泛。近年来, 随着信息处理、计算机技术和制图设备的不断发展, 计算全息也得到了相应的发展, 在更多的领域中得到了应用。

分数傅里叶光学是将数学中的分数傅里叶变换引入光学而形成的新分支, 它是傅里叶光学的发展和延拓, 它可以用一个新的观点去审视光的传播、成像、信息处理等问题, 并提供一种新的工具去处理这些问题, 正在得到越来越多的新应用^[2~6]。

本文在分数傅里叶变换和计算全息的基础上, 提出了双重分数傅里叶变换计算全息, 是一种利用分数傅里叶变换计算全息(FRT-CGH)实现图像解码的新方法。在这种方法中, 将两个(或多个)原始图像的信息分别经不同阶的分数傅里叶变换后, 记录在同一张分数傅里叶变换计算全息图上; 它需要两个(或多个)特定的分数傅里叶变换系统才能再现出所记录的图像信息, 即再现像分别与再现系统的分数傅里叶变换阶数有关。只有让每一个再现系统的分数阶与它的记录系统的分数阶相匹配, 才可以

从记录有两个(或多个)图像信息的分数傅里叶变换计算全息图上分解出原始的单个图像信息。这种方法在设计、制作上更显灵活方便, 同时利用其再现方式的特殊性, 可制成一种新的安全认证系统, 因而具有较高的实用价值。

2 分数傅里叶变换的离散表示及其快速算法

设输入函数为 $f(x)$, 则其 P 阶分数傅里叶变换定义为^[7]

$$F^P(u) = \mathcal{F}^P[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) B_P(x, u) dx, \quad (1)$$

$$B_P(x, u) = \frac{\exp[-i(\pi\Phi/4 - \phi/2)]}{|\sin \phi|^{1/2}} \times \exp[i\pi(x^2 \cot \phi - 2xu \csc \phi + u^2 \cot \phi)], \quad (2)$$

其中, $B_P(x, u)$ 为核函数,

$$\phi = P\pi/2, \quad \Phi = \text{sgn}(\sin \phi),$$

P 为分数阶, 式中 x 和 u 分别为空域和分数域坐标。

将(1)式改写为

$$F^P(u) = A_\phi \exp(i\pi a u^2) \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi\beta u x) [\exp(i\pi a x^2) f(x)] dx, \quad (3)$$

其中, $\alpha = \cot \phi$, $\beta = \csc \phi$,

$$A_\phi = \frac{\exp[-i\pi \text{sgn}(\sin \phi)/4 + i\phi/2]}{|\sin \phi|^{1/2}}.$$

假设 $f(x)$ 的维格纳(Wigner)分布在直径为 Δx 的圆以外为 0, 则受调制的函数 $\exp(i\pi a x^2) f(x)$ 在频域中被限制在 Δx 以内, 根据抽样定理, 有

* 国家自然科学基金(69907003)、湖南省教育厅科研基金资助课题。

E-mail: yangsz@sohu.com

收稿日期: 2002-06-11; 收到修改稿日期: 2002-09-10

$$\exp(i\pi\alpha x^2)f(x) = \sum_{n=-N}^N \exp\left[i\pi\alpha\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right] f\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \operatorname{sinc}\left[2\Delta x\left(x - \frac{n}{2\Delta x}\right)\right], \quad (4)$$

其中 n 是离散量, $N = (\Delta x)^2$ 。由于假设了 $f(x)$ 在 $[-\Delta x/2, \Delta x/2]$ 以外为 0, 因此积分范围为 $-N$ 到 N 。将 (4) 代入 (3) 并改变积分及求和的次序, 可得

$$F^P(u) = A_\# \exp(i\pi\alpha u^2) \sum_{n=-N}^N \exp\left[i\pi\alpha\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right] f\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi\beta u x) \operatorname{sinc}\left[2\Delta x\left(x - \frac{n}{2\Delta x}\right)\right] dx, \quad (5)$$

上式的积分等于 $\exp\left[-i2\pi\beta u\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)\right] \frac{1}{2\Delta x} \operatorname{rect}\left(\frac{\beta u}{2\Delta x}\right)$ 。当 $|x| \leq \frac{\Delta x}{2}$ 时, 根函数 $\operatorname{rect}\left(\frac{\beta u}{2\Delta x}\right)$ 始终为 1, 因此有

$$F^P(u) = \frac{A_\#}{2\Delta x} \sum_{n=-N}^N \exp(i\pi\alpha u^2) \exp\left[-i2\pi\beta u\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)\right] \exp\left[i\pi\alpha\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right] f\left(\frac{n}{2\Delta x}\right), \quad (6)$$

上式即为分数傅里叶变换的离散形式, 经抽样以后得到

$$F^P\left[f\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)\right] = \frac{A_\#}{2\Delta x} \sum_{n=-N}^N \exp\left\{i\pi\left[\alpha\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2 - 2\beta\frac{mn}{(2\Delta x)^2} + \alpha\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right]\right\} f\left(\frac{n}{2\Delta x}\right), \quad (7)$$

其中 m 是分数分离量。这是一个有限项的求和, 直接计算需要作 $O(N^2)$ 次乘法, 如用上式设计分数傅里叶变换全息图, 计算量将很大, 使得菲涅耳计算全息的设计非常困难。将 (7) 式作如下的变换:

$$F^P\left[f\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)\right] = \frac{A_\#}{2\Delta x} \exp\left[i\pi(\alpha - \beta)\left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2\right] \sum_{n=-N}^N \exp\left[i\pi\beta\left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)^2\right] \exp\left[i\pi(\alpha - \beta)\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right] f\left(\frac{n}{2\Delta x}\right), \quad (8)$$

上式中的求和项可看作 $\exp\left[i\pi\beta\left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2\right]$ 与受啁啾调制的物函数 $f(x)$ 的卷积。调用现成的快速傅里叶变换算法, 很快就可求出该卷积。这样, 利用快速傅里叶变换算法计算分数傅里叶变换, 可以将运算量从 $O(N^2)$ 降低到 $O(N\log N)$, 大大降低直接计算的运算量。算出的值再乘以一个啁啾调制项, 得到最后的输出值。采用这种算法, 为设计分数傅里叶变换全息图提供了有力工具。

3 双重分数傅里叶变换计算全息图的制作

在满足抽样定理的条件下分别将含有字母“H”和字符“中”的平面物体, 即 $f_h(x, y)$ 和 $f_c(x, y)$ 作为待编码图像进行抽样。根据抽样定理, 分别在 x 方向选抽样点, δx 为间距, 其抽样单元数为 $L = \Delta x/\delta x = 256$; 在 y 方向, δy 为间距, 其抽样单元数为 $K = \Delta y/\delta y = 256$ 。这儿选取 $\Delta x = \Delta y, \delta x = \delta y$, 即 $L = K$, 物面上抽样点总数为 $L \times K$ 。物函数 $f_h(x, y)$ 和 $f_c(x, y)$ 在抽样点处的值为 0 或 1, 即对字母或文字的抽样值为 0, 而图像其它地方的抽样值为 1。

利用这种编制的分数傅里叶变换快速算法程序对抽样得到的数据阵列进行分数阶为 P 的分数傅里叶变换, 得到物函数 $f_h(x, y)$ 的 P 阶分数傅里叶变换函数 $F_h^P(U, V)$, 或称 P 阶分数域谱。用同样的方

法对另一物函数 $f_c(x, y)$ 进行分数阶为 P' 的分数傅里叶变换, 得到其分数域谱 $F_c^{P'}(U, V)$ 。求出振幅和相位, 再将 $F_h^P(U, V)$ 和 $F_c^{P'}(U, V)$ 进行相干叠加, 得到一个新的分数域谱 $F(U, V)$

$$F(U, V) = F_h^P(U, V) + F_c^{P'}(U, V). \quad (9)$$

采用罗曼 III 型迂回相位编码方法将其振幅和相位进行编码^[1], 最后经过计算机输出、激光打印、缩板和冲洗就得到含有两个图像信息 $f_h(x, y)$ 和 $f_c(x, y)$ 的双重分数傅里叶变换计算全息图。

4 光学再现

要得到物体 $f_h(x, y)$ 与 $f_c(x, y)$ 的像, 需对全息图的再现光场实行与原变换分数阶 P, P' 相匹配的 P_1, P'_1 阶分数傅里叶变换。采用 Lohmann I 型^[8] 分数傅里叶变换系统作为再现系统, 如图 1 所示。输入面和输出面到透镜的距离均为 z , 透镜的焦距为 f , 当 z 和 f 满足下列条件时, 输出函数为输入函数的 P 阶分数傅里叶变换:

$$z = f_1 \tan(P\pi/4), \quad f = f_1 / \sin(P\pi/2), \quad (10)$$

其中, f_1 称为标准焦距, 当变换系统确定时为常数。

将分数傅里叶变换计算全息图置于输入面, 利用快速傅里叶变换的周期性和再现像的位置与再现系统分数阶有关的特性, 可在两个不同位置再现出不同物的像, 而其余信息则形成背景噪声。即光学再现时若对全息图作分数阶为 $2 - P$ 的分数傅里叶变换, 则再现出物体 $f_h(x, y)$ 的倒像; 若作分数阶为

$2 - P'$ 的分数傅里叶变换, 则再现出另一物体 $f_c(x, y)$ 的倒像。

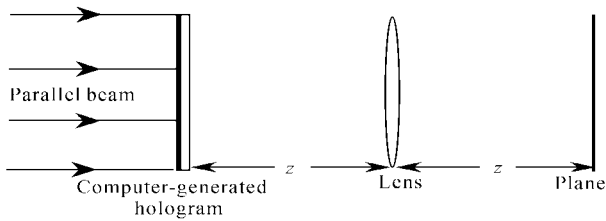


Fig.1 Lohmann I optical reconstruction set-up realizing fractional Fourier transform

实验记录和再现结果如图 2 所示。记录时用的两个图像分别是字母“H”和字符“中”, 相应的变换

分数阶分别为 $P=1.25, P'=0.5$ 。光学再现系统的变换透镜焦距 $f=30$ cm。只有当再现系统的分数阶为 $P_1=(2-P)=0.75$ 时才可在输出面观察到一个清晰的原始像, 即字母“H”, 它与变换透镜间的距离 $Z=18.5$ cm, 而字符“中”则为模糊的背景噪声, 无法辨认; 同样, 只有当再现系统的分数阶为 $P'_1=(2-P')=1.5$ 时方可在输出面观察到另一个清晰的原始像, 即字符“中”, 它与变换透镜间的距离 $Z=51.2$ cm, 而此时字母“H”的像则为模糊的背景噪声, 无法辨认。若密钥的分数阶不是 $P_1=0.75$ 或 $P'_1=1.5$, 则无法再现原始图像。

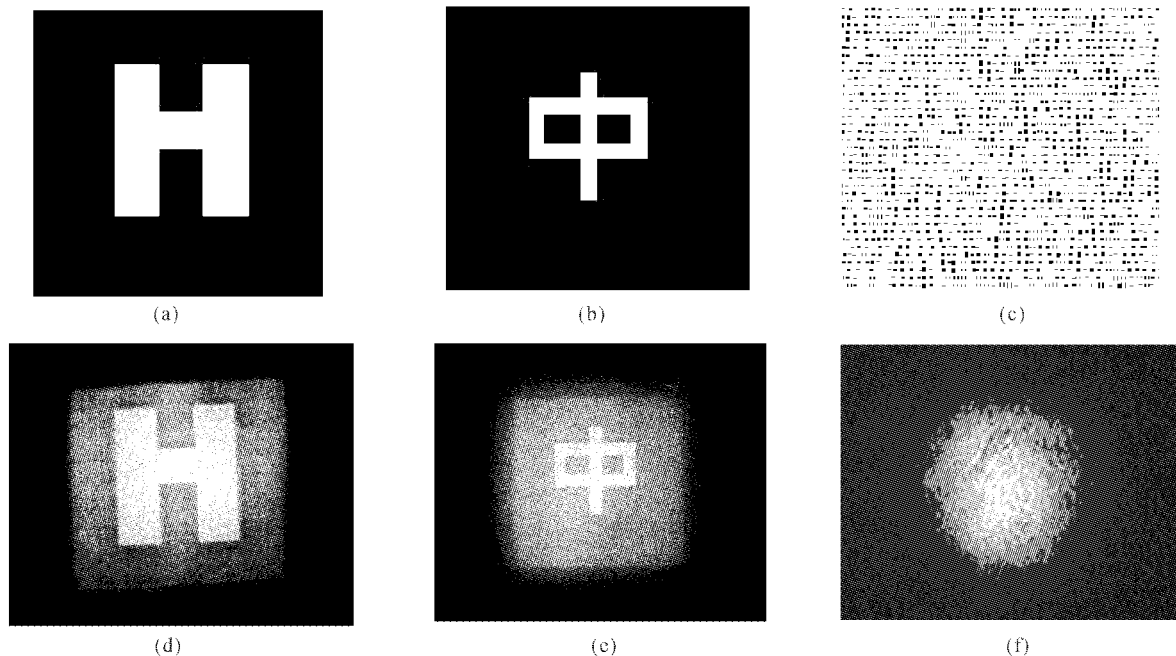


Fig.2 Original objects and reconstructed results. (a), (b) Original objects information; (c) Part of printed a CGH; (d) Fractional order of the reconstruction with $P_1=0.75$, the distance between reconstructed image and the lens is $Z=18.5$ cm; (e) Fractional order of the reconstruction with $P'_1=1.5$, the distance between reconstructed image and the lens is $Z=51.2$ cm; (f) Reconstructed image with wrong fractional order

5 讨 论

为了提高信噪比, 获得好的再现结果, 可对每个再现图像的背景噪声做校正处理。

如对(9)式作分数阶为 $2 - P$ 的分数傅里叶变换, 得到含有噪声 $F_c^{2-P}[F_c^P(U, V)]$ 的物函数 $f'_h(x, y)$, 即

$$f'_h(x, y) = F_h^{2-P}[F_h^P(U, V)] + F_c^{2-P}[F_c^P(U, V)] = f_h(x, y) + F_c^{2-P}[F_c^P(U, V)], \quad (11)$$

根据分数傅里叶变换的线性性质, 可以单独求出第二项。因此从总和中减去第二项, 就得到信号 $f_h(x,$

$y)$, 即字母“H”。同理作分数阶为 $2 - P'$ 的分数傅里叶变换, 则得到含有噪声 $F_h^{2-P'}[F_h^{P'}(U, V)]$ 的物函数 $f'_c(x, y)$, 即

$$f'_c(x, y) = F_h^{2-P'}[F_h^{P'}(U, V)] + F_c^{2-P'}[F_c^{P'}(U, V)] = F_h^{2-P'}[F_h^{P'}(U, V)] + f_c(x, y), \quad (12)$$

求出第一项, 并从总和中减去它, 就得到信号 $f_c(x, y)$, 即字符“中”。因此, 在编码时可以采取预补偿和直接相减的方法来消除噪声, 提高信噪比。

如果需要同时再现经解码的两个像, 则可在全息图后面加一块 45° 的半透半反镜。两个系统的再

现装置互成 90° , 这样便可在互相垂直的方向上同时得到两个再现像。

结论 本文利用双重分数傅里叶变换计算全息实现了两个图像(字符“中”和字母“H”)的编码和解码, 通过光学再现获得了满意的实验结果。可以看到只有在记录系统和再现系统的分数傅里叶变换的分数阶完全相匹配时, 方可再现出原始的单个图像信息; 同时不仅可以用分数傅里叶变换理论准确计算各个再现像的位置, 而且只需在记录时适当设计, 便可以在不同位置的较大范围内再现像; 这些特点使其在防伪力度得到提高的同时, 实际应用也更为方便, 因而用于图像信息的加密时, 具有很高的安全性。

参 考 文 献

- 1 Yu Zuliang, Jin Guofan. *Computer Generated Hologram*. Beijing: Publishing House of Tsinghua University, 1984. 41~44 (in Chinese)
- 2 Unnikrishnan G, Singh K. Double random fractional Fourier-domain encoding for optical security. *Opt. Eng.*, 2000, **39**(11):2853~2859
- 3 Zhu Banghe, Liu Shutian, Ran Qiwen. Optical image encryption based on multifractional Fourier transforms. *Opt. Lett.*, 2000, **25**(16):1159~1161
- 4 Zeng Yangsu, Zhang Yixiao, Guo Yongkang. Study on multiple fractional Fourier transform holography. *Proc. SPIE*, 2002, **4677-38**:366~371
- 5 Guo Yongkang, Huang Qizhong, Du Jinglei. Fractional Fourier transform hologram and its application in anti-counterfeiting. *Opt. Acta*, 1999, **19**(6): 821~825 (in Chinese)
- 6 Zeng Yangsu, Xie Shiwei, Guo Yongkang. Pseudo color coding fractional Fourier transform rainbow hologram. *Chinese J. Lasers (A)*, 2001, **28**(6): 559~561 (in Chinese)
- 7 Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *J. Inst. Math. Appl.*, 1980, **25**(3):241~265
- 8 Dorsch G, Lohmann A W. Fractional Fourier transform used for a lens design problem. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(20):4111~4112

Computer-Generated Hologram of Double Fractional Fourier Transform

Zeng Yangsu^{1,2} Guo Yongkang¹ Xie Shiwei¹ Gao Fuhua¹ Peng Qinjun¹

(¹ Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064
² Department of Physics, Shaoyang Institute, Shaoyang, 422000)

(Received 11 June 2002; revised 10 September 2002)

Abstract: A new optical encryption technique based on computer-generated hologram of double fractional Fourier transform is presented. In this method, the fractional Fourier transform hologram of several images with different orders are respectively recorded on one plate, which means each image has its own fractional order. In order to reconstruct the encoded images, several fractional Fourier transform systems with certain orders are needed. Because of its particularity of image reconstruction, it is regarded as a new optical security system and can be used in anti-counterfeiting.

Key words: holography; fractional Fourier transform (FRT); computer-generated hologram (CGH); optical security