

文章编号: 0253-2239(2003)02-0182-06

# $\epsilon'$ 对旋光光纤特性影响的理论分析与计算\*

鲍振武 刘 钊 张雅琦 艾德才

(天津大学电子信息工程学院, 天津 300072)

**摘要:** 通过对旋光光纤基本理论的讨论,以  $\epsilon'$  为自变量对旋光光纤的基本参量和电磁场分量进行了数值分析,得出了相应的计算图表。另外,通过对实际的旋光光纤进行旋光角测量和进一步分析,论证了  $\epsilon'$  与偏置磁场之间具有简单而明确的线性关系。这使得原本复杂的张量介电常量矩阵的求解变得非常简单。

**关键词:** 光纤光学; 旋光光纤; 张量介电常量; 孪生标量波; 旋光角

中图分类号: TN25 文献标识码: A

## 1 引 言

旋光光纤是一种使传输光产生旋光特性的特种光纤。它在光纤型磁光调制器、磁场传感器、电流传感器、光隔离器等光纤型传感器及磁光器件中有重要应用。从理论上讲,旋光光纤属于各向异性介质中电磁波的传输问题。其电磁场理论分析相当复杂,因此早期关于旋光光纤的研究多是从光学角度去分析<sup>[1,2]</sup>,而未涉及电磁场理论。旋光光纤更深刻的本质问题在理论上仍有待研究。20 世纪 90 年代后,有人开始以电磁场理论为基础,探讨旋光光纤的基本理论,得出了光在旋光光纤中是以互相耦合的孪生标量波进行传输的物理本质。孪生标量波两个传输常数( $\beta_1, \beta_2$ )之间微小的差异,形成了旋光特性<sup>[3~6]</sup>。本文进一步研究旋光光纤中张量介电常量矩阵中旋光元素  $\epsilon'$  对旋光特性的影响。 $\epsilon'$  的存在是使两个传播常数( $\beta_1, \beta_2$ )产生微小差异的物理本质。通过对  $\epsilon'$  的精确计算与分析,探讨了  $\epsilon'$  对旋光光纤基本参量的影响,对电磁场(振幅,实部或虚部)的影响及对旋光特性的影响。最后总结出旋光光纤中计算旋光光纤  $\epsilon'$  的理论公式和张量矩阵  $\epsilon$  的一般公式。

## 2 旋光光纤的基本理论

$\epsilon'$  为旋光光纤张量介电常量矩阵

$$\epsilon_0 = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon & -j\epsilon' & 0 \\ j\epsilon' & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}$$

中表示旋光特性的元素。其取值大小直接表征了旋光光纤各向异性的强弱,是影响旋光特性最本质的物理因素。为便于分析  $\epsilon'$  对旋光特性的影响,现将旋光光纤基本理论中的某些有用的结论简述如下。

### 2.1 特征方程与场分量表达式

1) 特征方程:旋光光纤的特征方程为<sup>[4,5]</sup>

$$\frac{u_i J'_m(u_i)}{J_m(u_i)} = \frac{\omega_i K'_m(\omega_i)}{K_m(\omega_i)}, \quad (1)$$

式中  $J_m(u_i), K_m(\omega_i), J'_m(u_i), K'_m(\omega_i)$  分别为贝塞尔函数和变形贝塞尔函数及其导数,  $u_i, \omega_i$  分别为纤芯和包层的横向传播常量,且有

$$\left. \begin{aligned} u_i &= a(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_1 - \beta_i^2)^{1/2}, \\ \omega_i &= a(\beta_i^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_2)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $a$  为光纤半径,  $\mu_0, \epsilon_0$  分别为真空中的介电常量和导磁率;  $\epsilon_1, \epsilon_2$  分别为光纤芯和包层材料的相对介电常量;  $\beta_i$  为旋光光纤中两个相互耦合的孪生标量波的传播常量,即  $\beta_1$  或  $\beta_2$ 。 $\omega$  为光的角频率。

2) 场分量表达式:光纤纤芯中纵向场分量  $\dot{E}_z, \dot{H}_z$  表达式为<sup>[5]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_z &= (K_1 - K_2)^{-1} A [K_1 J_m(u_2 r/a) \exp(-j\beta_2 z) - K_2 J_m(u_1 r/a) \exp(-j\beta_1 z)] \exp[j(\omega t + m\theta)], \\ \dot{H}_z &= (K_1 - K_2)^{-1} A [J_m(u_1 r/a) \exp[-j\beta_1 z] - J_m(u_2 r/a) \exp(-j\beta_2 z)] \exp[j(\omega t + m\theta)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在光纤包层中,纵向场矢量  $\dot{E}_z, \dot{H}_z$  的表达式为

\* 国家自然科学基金(6967702)资助课题。

E-mail: baozw@public.tj.cn

收稿日期:2002-01-28; 收到修改稿日期:2002-03-18

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_z &= (K_1 - K_2)^{-1} B [K_1 K_m(\omega_2 r/a) \exp(-j\beta_2 z) - K_2 K_m(\omega_1 r/a) \exp(-j\beta_1 z)] \exp[j(\omega t + m\theta)], \\ \dot{H}_z &= (K_1 - K_2)^{-1} B [K_m(\omega_1 r/a) \exp(-j\beta_1 z) - K_m(\omega_2 r/a) \exp(-j\beta_2 z)] \exp[j(\omega t + m\theta)], \end{aligned} \right\} (4)$$

式中  $K_1, K_2$  (或  $K_i, i = \{1, 2\}$ ) 为两个互相耦合的孪生标量波的耦合系数, 它也是旋光光纤的基本参量之一。

## 2.2 旋光光纤基本参量

旋光光纤的基本参量  $\beta_i, u_i, \omega_i$ , 耦合系数  $K_i$  都是表示旋光光纤基本特性的参量。它们都与旋光光纤中各向异性张量介电常量  $\boldsymbol{\epsilon}$  矩阵元素中的  $\epsilon'$  有密切关系, 并可表述如下<sup>[6,7]</sup>

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u \pm \Delta u \approx \\ &a \sqrt{k_i^2 - \beta^2} \mp \frac{a\beta\Delta\beta}{\sqrt{k_i^2 - \beta^2}}, \\ \omega_i &= \omega \pm \Delta\omega \approx \\ &a \sqrt{\beta^2 - k_i^2} \mp \frac{a\beta\Delta\beta}{\sqrt{\beta^2 - k_i^2}}, \\ \beta_i &= \beta \pm \Delta\beta = k_0 \left( \sqrt{\epsilon} \pm \frac{1}{2} \frac{\epsilon'}{\sqrt{\epsilon}} \right), \\ K_i &= K \pm \Delta K = \\ &\frac{c-f}{2d} \pm \frac{\sqrt{2dg + (c-f)^2}}{2d}. \end{aligned} \right\} (5)$$

上式中, 波数

$$k_0 = 2\pi/\lambda, \quad k_1 = n_1 k_0, \quad k_2 = n_2 k_0;$$

Table 1 Concerned constants and units

Parameter	Value
Fiber radius $a$ /m	$2.25 \times 10^{-6}$
Core refractive index $n_1$	1.6863
Core dielectric constant $\epsilon_1$	2.8436
Clad refractive index $n_2$	1.6829
Clad dielectric constant $\epsilon_2$	2.8322
Wavelength $\lambda_0$ /m	$0.6328 \times 10^{-6}$
Propagation constant $k_0$ / (rad $\cdot$ m <sup>-1</sup> )	$9.92918 \times 10^6$
Vacuum dielectric constant $\epsilon_0$ / (F $\cdot$ m <sup>-1</sup> )	$8.8542 \times 10^{-12}$
Vacuum magnetic permeability $\mu_0$ / (H $\cdot$ m <sup>-1</sup> )	$4\pi \times 10^{-7}$
Vacuum wave impedance $Z_0$ / $\Omega$	377

### 3.1 $\epsilon'$ 对旋光光纤的基本参量的影响

根据(5)式对旋光光纤的基本传输参量  $\beta_i, u_i, \omega_i, K_i$  进行计算<sup>[10]</sup>。计算中发现  $\beta_1$  与  $\beta_2$  之差  $\Delta\beta$  非常小(约小 6 个数量级), 因此无法利用  $\beta_i \epsilon'$  的关系曲线表示数值计算结果, 为此改用  $\Delta\beta \epsilon'$  曲线来变通表达  $\beta_i \epsilon'$  的关系曲线。计算结果如图 1 所示。对于  $u_i, \omega_i$  也有类似情况, 为此用  $\Delta u \epsilon'$  和  $\Delta \omega \epsilon'$  关系曲线

$$\left. \begin{aligned} c &= k_i^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon'^2 / \epsilon, \\ d &= -j\omega\beta\epsilon_0 \epsilon' / \epsilon, \\ k_i^2 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon - \beta^2, \\ f &= k_i^2, \quad g = j\omega\beta\mu_0 \epsilon'^2 / \epsilon, \\ \Delta\beta &= |\beta_1 - \beta_2| / 2, \end{aligned} \right\}$$

$\beta$  为纵向偏置磁场  $H_b = 0$  即旋光光纤变成普通光纤时光纤的传播常量。在  $\epsilon' \ll \epsilon$  的条件下, 可以证明有<sup>[7]</sup>

$$\left. \begin{aligned} K_i &= \pm \sqrt{g/d} = \pm j \sqrt{\epsilon' \mu_0 / \epsilon \epsilon_0} = \\ &\pm j Z_0 \sqrt{\epsilon' / \epsilon} = \pm \Delta K, \end{aligned} \right\} (6)$$

式中

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 377 \Omega$$

为真空中的波阻抗。

## 3 $\epsilon'$ 影响的数值分析

目的在于定量地分析  $\epsilon'$  对光纤基本参量 ( $\beta_i, u_i, \omega_i, K_i$ ), 场分量  $\dot{E}, \dot{H}$  和旋光角  $\psi$  的影响。计算中用到的各种常量如表 1 所示, 且一切单位都为有理制单位。自变量  $\epsilon'$  的取值范围为  $10^{-7} \sim 10^{-3}$ 。

来变通表达  $u_i \epsilon'$  和  $\omega_i \epsilon'$  关系曲线的计算结果, 如图 2 和图 3 中曲线所示。但对于  $K_i \epsilon'$  的关系, 因有  $K = 0$ , 则  $K_i = \pm \Delta K$ , 所以可直接绘出  $K_i \epsilon'$  的关系曲线如图 4 所示<sup>[8,9]</sup>。从计算可知, 随着  $\epsilon'$  的增大,  $\Delta\beta, \Delta u, \Delta\omega$  均呈线性增加(但由于变量  $\epsilon'$  的取值范围是  $10^{-7} \sim 10^{-3}$ , 达 4 个数量级, 横坐标  $\epsilon'$  只能采用对数坐标, 因此难于从图 1 ~ 图 3 直接观察到线性关系)。

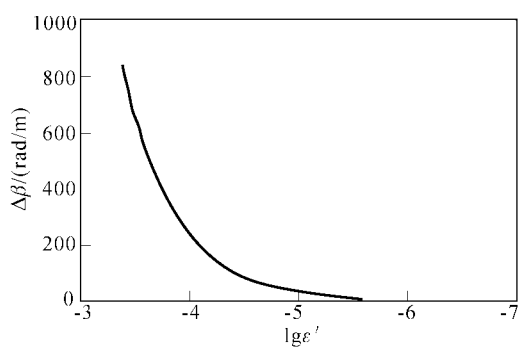


Fig. 1 Curve about  $\Delta\beta-\epsilon'$

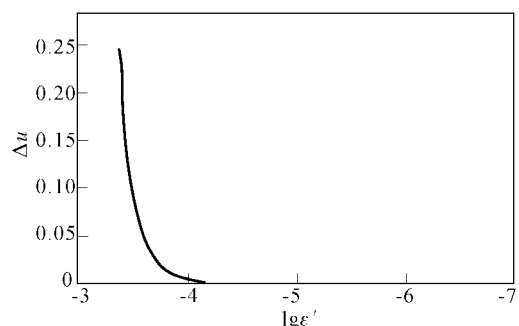


Fig. 2 Curve about  $\Delta u-\epsilon'$

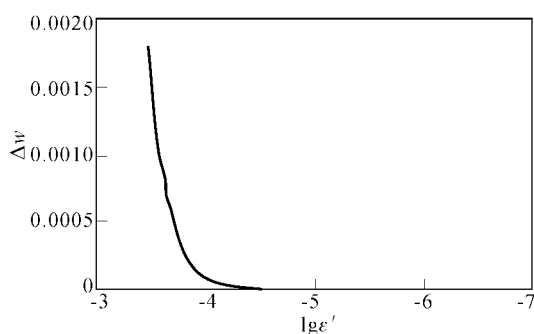


Fig. 3 Curve about  $\Delta W-\epsilon'$

当  $\epsilon'$  变小且  $\epsilon' < 10^7$  时, 将有  $\Delta\beta = 0, \Delta u = 0, \Delta w = 0, \Delta K = 0$ , 即  $\beta_1 = \beta_2 = \beta, u_1 = u_2 = u, \omega_1 = \omega_2 = \omega, K_1 = K_2 = 0$ 。这说明孪生标量波兼并, 旋光光纤变成了普通光纤。另外, 有一个问题是孪生标量波的耦合系数  $K_i$  有两个值。但值得注意的是这两个值与  $\beta, u, \omega$  同时存在两个值在概念上是不同的。 $K_i$  的两个值不是同时存在的。它的存在与偏置磁场  $H_b$  的方向有关。例如当  $H_b$  的方向与光的传播方向一致时, 取值为  $K_1 = \Delta K$ , 相反则取值为  $K_2 = -\Delta K$ 。另外需要注意的是耦合系数是有量纲的, 具有电抗的性质, 其单位为  $\pm j\Omega$ 。 $K_i$  与  $\epsilon'$  的函数曲线如图 4 所示。

通过上述分析, 可得如下几点结论:

1)  $\epsilon'$  对旋光光纤基本参量的影响是线性的, 但需注意其中  $K_i$  与  $\sqrt{\epsilon'}$  的关系是线性的。

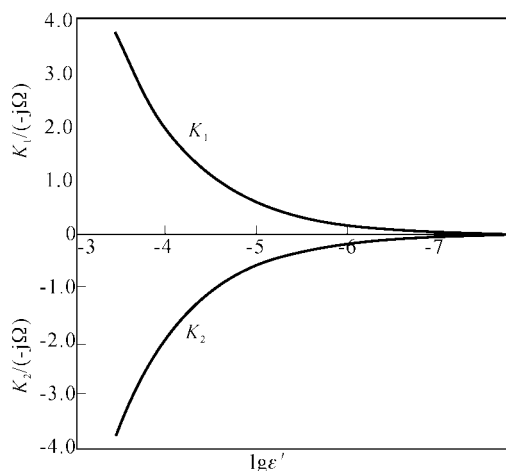


Fig. 4 Curve about  $K_i-\epsilon'$

2) 旋光光纤中的耦合系数在概念上是有区别的。例如在横向耦合光波导系统中耦合系数表明波导之间有能量的传递关系, 具有传播常量  $\beta$  的量纲。在光耦合系统中, 耦合系数的量纲为小于 1 的正数, 亦称为耦合效率。而旋光光纤属各向异性材料, 其耦合系数  $K_i$  代表的是孪生标量波中电场与磁场的耦合, 即  $\varphi_i = E_z + K_i H_z$ 。 $K_i$  具有电抗性的量纲, 单位为  $\pm j\Omega$ 。正负号的取值与偏置磁场的方向有关。

3) 旋光光纤中的  $\beta_i, u_i, \omega_i$  为双值, 当  $\epsilon'$  趋于 0 时  $\beta_i, u_i, \omega_i$  简并, 旋光光纤变为各向同性的普通光纤。因此可以说普通光纤是旋光光纤在  $\epsilon'$  趋于 0 时的特殊情况。实际上当  $\epsilon' < 10^6$  时, 旋光特性便可忽略, 分析时可按普通光纤对待。

### 3.2 $\epsilon'$ 对电磁场的影响

计算表明,  $\epsilon'$  的变化对电场和磁场均有影响。在 (3) 式的  $\dot{E}_z, \dot{H}_z$  表达式中, 取  $m = 0, 1, 2, 3$  等各种情况进行计算。限于篇幅, 这里只给出  $m = 0$  时对  $\epsilon'$  关系的函数曲线。图 5 为  $\dot{E}_z, \dot{H}_z$  复数振幅实部对  $\epsilon'$  的函数曲线 (虚部也有类似的函数曲线, 此处略)。

图 6 为  $\dot{E}_z, \dot{H}_z$  复数振幅的绝对值 (模) 对  $\epsilon'$  关系的函数曲线。计算时对光纤中 15 个空间点的电场和磁场进行了计算。其中沿  $z$  方向取 5 个点, 分别为  $z = 0, z = \lambda_0/4, z = \lambda_0/2, z = 3\lambda_0/4, z = \lambda_0$ 。径向方向取 3 个点, 分别为  $r = 0, r = a/2, r = a$ 。由图 5 和图 6 可以看出, 从相对值变化上看  $\epsilon'$  对磁场的影 响远大于对电场的影响, 在  $10^5 < \epsilon' < 10^3$  范围内, 电场变化  $1 \sim 10$  V/m, 约为 1 个数量级; 而磁场的变化约为  $0 \sim 0.09$  A/m。相对变化很大。另外, 由图 6 还可看出沿  $z$  方向  $\epsilon'$  对电磁场振幅的变化没有影响, 即  $|\dot{E}_z|, |\dot{H}_z|$  沿  $z$  方向不随  $\epsilon'$  变化。但在半径方向上,  $r$  的大小不同,  $\epsilon'$  对  $|\dot{E}_z|, |\dot{H}_z|$  的影响是不均匀

的。 $r$  越大  $\epsilon'$  的影响也越大。

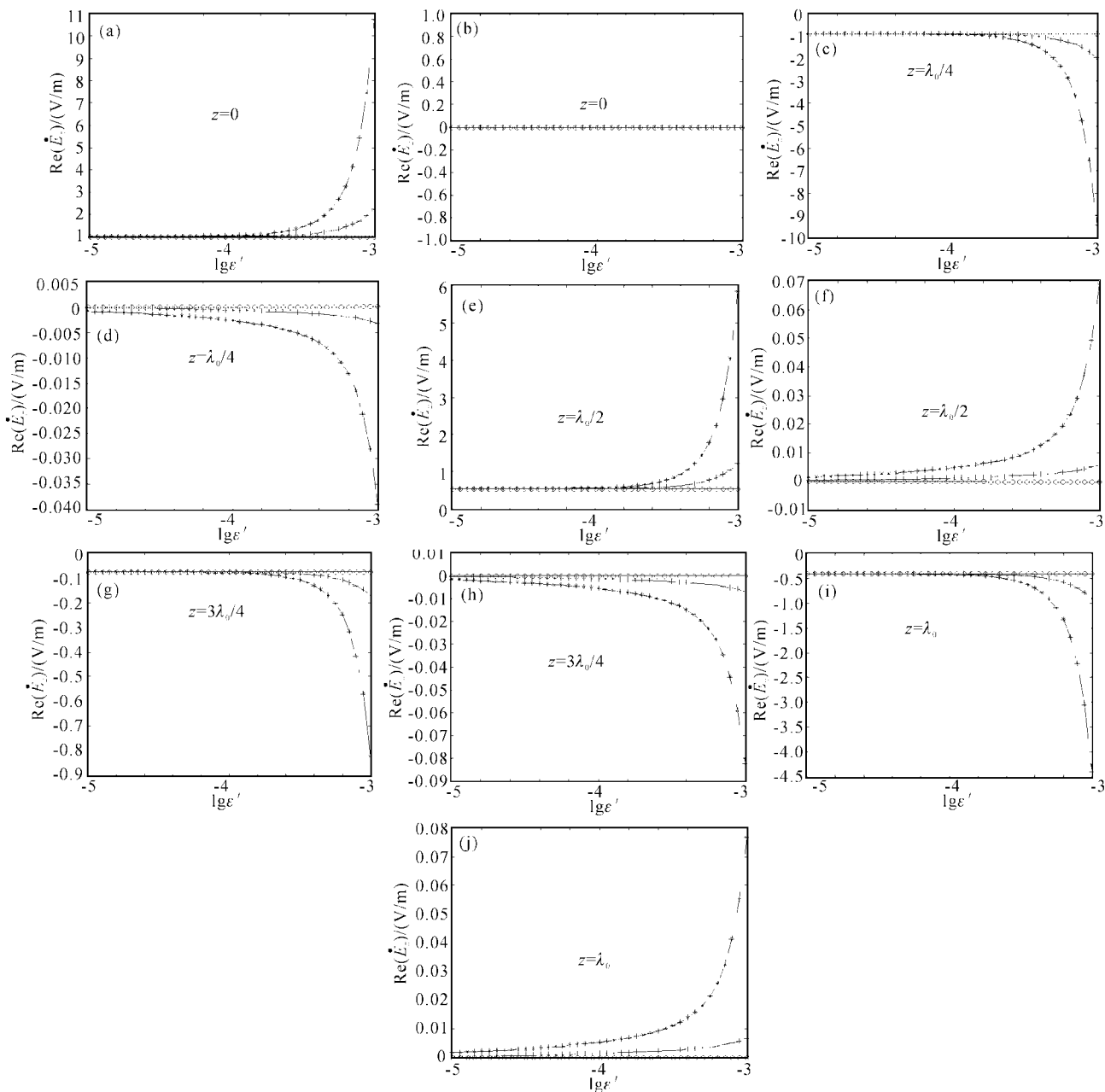


Fig. 5 Function curves about absolute value of electromagnetic field depends on  $\epsilon'$ . o:  $r=0$ ; +:  $r=a/2$ ; -:  $r=a$

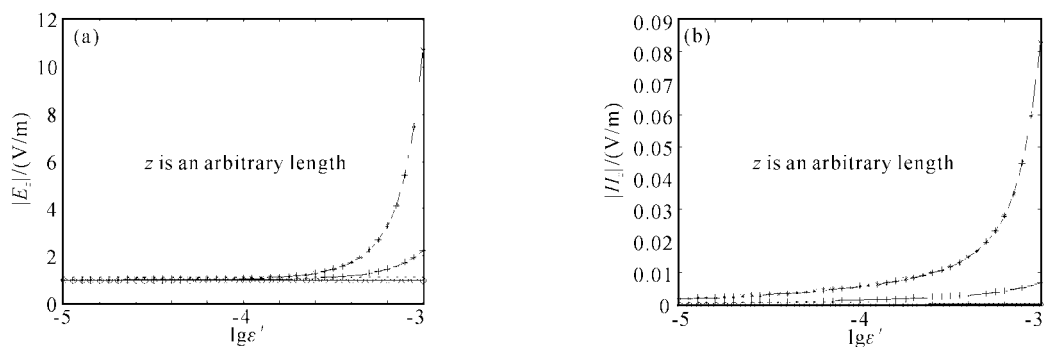


Fig. 6 Curves about real part of electromagnetic field depends on  $\epsilon'$ . o:  $r=0$ ; +:  $r=a/2$ ; -:  $r=a$

### 3.3 $\epsilon'$ 对旋光特性的影响

限于篇幅,只考虑纤芯中的旋光特性。纤芯中的孪生标量波为<sup>[5,6]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= AJ_m \left( \frac{u_1 r}{a} \right) \exp[j(\omega t - \beta_1 z) + m\theta], \\ \varphi_2 &= AJ_m \left( \frac{u_2 r}{a} \right) \exp[j(\omega t - \beta_2 z) + m\theta]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由于  $\beta_1 \neq \beta_2$ , 则光沿  $z$  传输时将产生旋光特性。为了分析这一现象,对  $\varphi_1, \varphi_2$  的振幅做一些近似。即由于

$u_1, u_2$  差别很小,则可近似认为  $u_1 = u_2 = u$ , (7) 式可改写为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= E \exp[j(\omega t - \beta_1 z) + m\theta], \\ \varphi_2 &= E \exp[j(\omega t - \beta_2 z) + m\theta]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中  $E = AJ_m(ur/a)$ 。由于  $\beta_1 \neq \beta_2$ , 所以可以把孪生标量波看成两个相速不同的圆偏振光,可合成为一直线偏振光,其  $X, Y$  方向分量为

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \text{Re}(\varphi_1 + \varphi_2) = E \cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)z \cos \left[ \omega t - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)z + m\theta \right], \\ E_y &= \text{Re}(\varphi_1 - \varphi_2) = E \sin \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)z \cos \left[ \omega t - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)z + m\theta \right]. \end{aligned} \right\}$$

合成矢量的方向为

$$\Psi = \text{arctan}(E_y/E_x) = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)z = \Delta\beta z.$$

引用(5)式有

$$\Delta\beta = k_0 \epsilon' / \epsilon^{1/2},$$

则

$$\Psi = k_0 \epsilon' z / \epsilon^{1/2}, \quad (9)$$

即  $\epsilon'$  与旋光角  $\psi$  的关系为线性关系。

## 4 求解 $\epsilon'$ 及张量矩阵 $\epsilon$ 的方法

### 4.1 $\epsilon'$ 的求解

在前面电场、磁场、光纤基本参量的分析中均以  $\epsilon'$  为自变量。但在旋光光纤中的  $\epsilon'$  往往是未知的。它不是常数,而是与偏置磁场有关,因此  $\epsilon'$  是很难确定的一个量。过去的学者曾用测量的方法得到过

$\epsilon'^{[7,8]}$ , 但那是在给定光纤长度和偏置磁场  $H_b$  时测得的,而对任意光纤长度和  $H_b$  情况下,如何求解  $\epsilon'$  和  $\epsilon$  尚属未知。利用本文数值分析的结果则可顺利解决这一问题。在前面的数值分析中,已导出(9)式  $\Psi = k_0 \epsilon' z / \epsilon^{1/2}$ 。另外,在以费尔德常数  $V$  表达的旋光光纤中,有一个众所周知的公式  $\Psi = V H_b z$ , 综合上述二式,则有

$$\epsilon' = (V \epsilon^{1/2} / k_0) H_b, \quad (10)$$

上式表明  $H_b$  与  $\epsilon'$  之间具有简单的线性关系,且  $\epsilon'$  的求解与光纤长度无关,利用这一公式,可以提供一种计算旋光光纤  $\epsilon'$  的新方法,只要能确定施加在旋光光纤的纵向磁场  $H_b$ , 就可精确计算出  $\epsilon'$ 。

### 4.2 张量矩阵 $\epsilon$ 的求解

将(10)式代入  $\epsilon$  的矩阵中则有

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon & -j\epsilon' & 0 \\ j\epsilon' & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & -j(V\epsilon^{1/2}/k_0)H_b & 0 \\ j(V\epsilon^{1/2}/k_0)H_b & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}. \quad (11)$$

这一公式给数值求解旋光光纤各向异性张量介电常量矩阵提供了非常方便的求解方法。以前曾研制的旋光光纤为实例<sup>[6]</sup>,  $V = 0.3003 \text{ min/A}$ ,  $\epsilon$  及  $k_0$  的取值见表1。当磁场  $H_b = 113716.2 \text{ A/m}$  时,利用

(10)式则有  $\epsilon' = 1.6847 \times 10^{-6}$ 。计算中使用有理单位制。利用(11)式可得到此条件下旋光光纤的张量介电常量为

$$\epsilon = 8.8542 \times 10^{-12} \begin{bmatrix} 2.8436 & -j1.6847 \times 10^{-6} & 0 \\ j1.6847 \times 10^{-6} & 2.8436 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8436 \end{bmatrix}.$$

**结论** 本文通过对旋光光纤基本理论的讨论,以 $\epsilon'$ 为自变量对旋光光纤的电磁场分量、光纤基本参量和旋光特性进行了数值分析,得出了相应的计算图表。另外在对旋光角进行测量和进一步分析的基础上得出了 $\epsilon'$ 与偏置磁场的线性关系式,使得旋光光纤中 $\epsilon'$ 和张量矩阵 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的求解变得极为容易,使旋光光纤中复杂的电磁场理论问题有了简单明确的解析方法。

### 参 考 文 献

- 1 Kawakami S, Shiraishi K. Components for Fiber Optical Polarization Rotatory. IOOC83, Japan Tokyo, 1983, 346~347
- 2 Harms H, Papp A, Kempter K. Magneto-optical properties of index-gradient optical fiber. *Appl. Opt.*, 1976, **15**(3):799~801
- 3 Smith A. Polarization and magneto-optical properties of single mode optical fiber. *Appl. Opt.*, 1978, **17**(1):52~56
- 4 Bao Zhenwu, Huang Lifeng. The electromagnetic field theory analysis about a rotation optical fiber. *Acta Electronica Sinica* (电子学报), 1995, **23**(9):47~51 (in Chinese)
- 5 Bao Zhenwu. The study of magneto-optical effect in an optical fiber. *J. Tianjin University* (天津大学学报), 1994, **27**(4):402~411 (in Chinese)
- 6 Bao Zhenwu, Zhang Yaqi. Analysis and calculation for rotatory optic fiber. *Acta Electronica Sinica* (电子学报), 1997, **25**(9):56~59 (in Chinese)
- 7 Bao Zhenwu, Zhang Yaqi. Theoretical analysis and calculation for rotatory optic fiber. *Semiconductor Photonics and Technology*, 1997, **3**(4):274~279

## The Effect and Evaluation of $\epsilon'$ for Rotatory Characteristic in a Rotatory Optical Fiber

Bao Zhenwu Liu Zhao Zhang Yaqi Ai Decai

(School of Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072)

(Received 28 January 2002; revised 18 March 2002)

**Abstract:** The basic theory of a rotatory optical fiber was discussed. The electromagnetic field components, fundamental parameters of the fiber were evaluated as the functions of the argument  $\epsilon'$  which is the rotatory element of the tensor dielectric coefficient matrix  $\boldsymbol{\epsilon}$  of the fiber. The calculating results were shown by the curves. In addition, a new expression about the relation between  $\epsilon'$  and bias magnetic field  $H_b$  was demonstrated, by that the tensor dielectric coefficient of the rotatory optical fiber can be easily evaluated.

**Key words:** optical fiber optics; rotatory optical fiber; tensor dielectric coefficients; twin scalar waves; rotatory angle