

文章编号: 0253-2239(2003)12-1445-6

傅里叶变换求取叠栅条纹微小位移的精度分析*

张香春 宋耀祖

(清华大学工程力学系 教育部传热强化与过程节能重点实验室, 北京 100084)

摘要: 提出了借助于傅里叶变换提取叠栅条纹相位分布的途径来获得条纹微小位移量的方法中, 图像的截断必然会产生频谱泄漏, 从而引入数据处理的误差。详细分析了傅里叶变换中频谱泄漏产生的原因及其对测量误差的影响, 提出了图像处理时, 通过外插值将截断区域延拓为叠栅条纹周期整数倍时可以减小甚至忽略频谱泄漏所引起的相位计算误差, 并对此进行了数值模拟以及初步的实验验证, 证实了该方法的有效性, 为叠栅偏折法应用于微细尺度流动与传热的实验研究提供了有效的技术途径。

关键词: 传热; 云纹法测量微细尺度温度场; 信息处理; 叠栅偏折法; 傅里叶变换; 频谱泄漏

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A

1 引 言

叠栅偏折方法可用于测量微细尺度传热中流体的密度场与温度场^[1]。但是, 在微细尺度测量中, 由于热流场所引起的叠栅条纹的位移量十分微小, 通常只有条纹间距的 1/10~1/30, 为了提高测量灵敏度和数据处理精度, 本文采用了傅里叶变换的方法对得到的叠栅条纹进行图像处理, 利用获取条纹的相位分布的途径来求取条纹的微小位移量, 进而求得光线通过非均匀热流体后的偏折角, 最终获得待测热流体的密度场、温度场。在这一过程中, 测量误差与精度分析是十分重要的。傅里叶变换中, 由于空间区域的截断, 必然会产生频谱泄漏, 从而使求得的相位和真实值之间产生偏差。关于这一问题, 在傅里叶变换轮廓术中人们已经注意到, 并提出了相应的解决方案^[2]。本文在文献^[2]的解析分析基础上, 进一步分析了叠栅偏折法用于微细尺度流场的温度测量时, 傅里叶变换中频谱泄漏对求得的叠栅条纹相位分布的误差影响。数值模拟表明了叠栅条纹所占空间为条纹周期的任意整数倍时, 得到的相位值和真实值之间的相对误差仅为 10^{-17} 量级。在此基础上进行的初步实验验证也表明对叠栅条纹进行延拓处理, 可以抑制傅里叶变换求取相位的误差, 最终减小测得的温度场的误差。因此采用本文提出的叠栅条纹的图像处理方法提取相位具有较高的精

度, 从而为该方法用于微细尺度流场热参量测量提供了有效的技术途径。

2 傅里叶变换在检测叠栅条纹微小位移中的应用

在微细尺度的流场测试中, 光线通过待测流场后的偏折角很小, 由此引起的叠栅条纹的位移量亦很小, 传统的数据处理方法已经很难精确地获得条纹的微小位移量。本文借助于傅里叶变换提取叠栅条纹相位分布的途径来求取条纹的微小位移量。条纹的位移量 $h(x, y)$ 和相应的相位分布变化 $\Delta\varphi(x, y)$ 之间满足如下关系^[1]

$$\Delta\varphi(x, y) = 2\pi f_0 h(x, y), \quad (1)$$

从而可以通过求取条纹的相位分布来获得条纹的微小位移量, 其中叠栅条纹的相位分布则通过傅里叶变换的方法来获得。

叠栅条纹的强度分布可以用下式表达^[3]:

$$g(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[2\pi f_0 x + \varphi(x, y)], \quad (2)$$

其中 $\varphi(x, y)$ 为相位, 包含了待测热流场的有用信息; $a(x, y)$ 和 $b(x, y)$ 是由于背景辐射、光束不均匀的反射和传输所引起的; f_0 是干涉条纹在空间周期性变化的基频。对(2)式进行恒等变换, 得到

$$g(x, y) = a(x, y) + c(x, y)\exp(i2\pi f_0 x) + \bar{c}(x, y)\exp(-i2\pi f_0 x), \quad (3)$$

其中

$$c(x, y) = \frac{1}{2}b(x, y)\exp[i\varphi(x, y)],$$

* 国家自然科学基金(59976018)资助课题。

E-mail: zxc98@mails.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2002-08-02; 收到修改稿日期: 2002-12-02

$\bar{c}(x, y)$ 为 $c(x, y)$ 的共轭复数。对(3)式进行一维傅里叶变换(固定 y , 对 x 坐标进行变换), 得到三个频带:

$$G(f, y) = A(f, y) + C(f - f_0, y) + \bar{C}(f + f_0, y), \quad (4)$$

在(4)式中, 利用带通滤波, 滤去 $A(f, y)$ 和 $\bar{C}(f + f_0, y)$ 后, 进行傅里叶逆变换, 得

$$c'(x, y) = \frac{1}{2}b(x, y)\exp\{i[\varphi(x, y) + 2\pi f_0 x]\}, \quad (5)$$

由(5)式可得

$$\varphi(x, y) + 2\pi f_0 x = \arctan \frac{\text{Im}(c')}{\text{Re}(c')}, \quad (6)$$

利用(6)式即可求得叠栅条纹的相位分布。

利用傅里叶变换的方法可以获得起始点相位差小于 2π 的光线被热流体扰动前后叠栅条纹的相位差。利用该相位差可以求出叠栅条纹位移量, 进而计算出光线通过待测热流体后的偏折角, 最终反演

出待测流场的折射率场和温度场^[1]。

3 傅里叶变换提取叠栅条纹相位分布的误差分析

为了研究利用上述方法求取叠栅条纹相位值分布的精度, 本文采用计算机数值模拟的方法, 先预设一个叠栅条纹光强理论分布为

$$I = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{40}x + 1\right),$$

取空间区域为 $[0, 511]$, 它的理论相位分布为

$$\varphi(x) = \frac{2\pi}{40}x + 1.$$

图 1(b)、图 1(b)给出了计算出的相位值和预设理论相位值在边缘区域的比较, 其中实线为理论预设相位, 虚线为利用傅里叶变换的方法计算出的相位值。从图中可知, 由数据处理所引起的误差主要集中在叠栅条纹两侧的边缘区域。

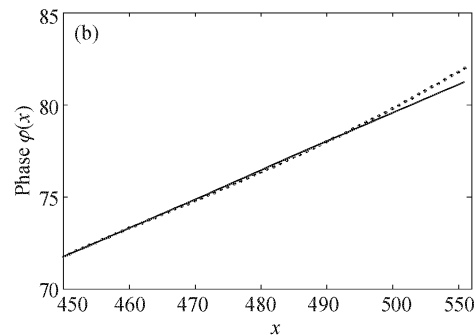
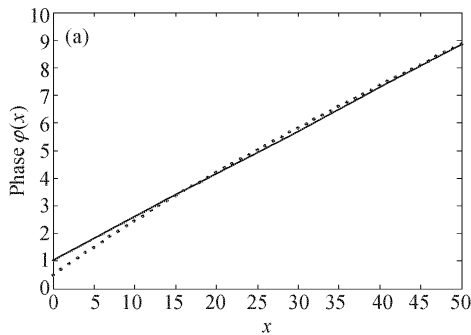


Fig. 1 Phase comparison of left edge (a) and right edge (b)

图 2 给出了计算所得到的相位和预设理论相位之间的绝对误差, 图 3 给出了它们之间的相对误差, 两者之间的平均相对误差为 0.63%。其中, 两者在中间区域差别很小, 平均相对误差约为 0.05%; 在边缘差别较大, 左边缘平均相对误差约为 3.6%, 右边缘平均相对误差约为 0.26%。

由图 1、图 2、图 3 可见, 利用傅里叶变换的方法求取相位分布时, 区域边缘的误差较大, 如果能够减小边缘的误差, 就能够极大地提高傅里叶变换方法提取相位的精度。下一节的分析表明, 边缘误差较大正是由傅里叶变换中的频谱泄漏所引起的。

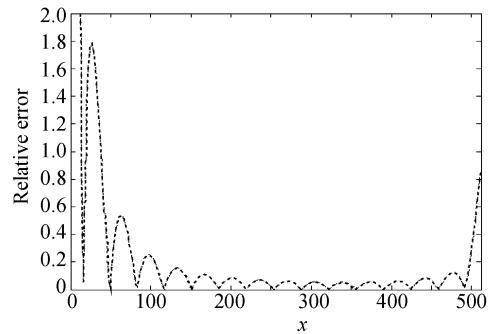
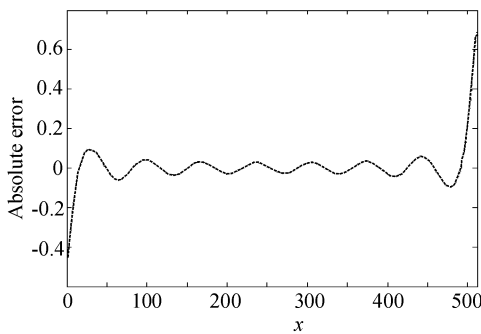


Fig. 2 The absolute error between the pre-set true phase and the computation phase value

Fig. 3 The relative error between the pre-set true phase and the computation phase value (%)

4 频谱泄漏对傅里叶变换求取叠栅条纹相位分布误差影响的解析分析

在实际的实验研究中,往往要把所观测到的叠栅条纹信号限制在一定的空间间隔内,也就是在数据处理时仅取出某一段区域内的信号,这种对数据的截断过程相当于加窗处理,在傅里叶变换中相当

于所研究波形的频谱与窗函数的频谱卷积过程。这一过程将使频谱产生“拖尾”(扩展)现象,称之为频谱泄漏。

为了考虑频谱泄漏问题,将有限空间区域的叠栅条纹光强表达式中忽略背景光强,并进行离散,得到如下的表达式^[2]:

$$g(x, y) = b(x, y) \cos[2\pi f_0 x + \varphi(x, y)] \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{T_w}\right), \quad (7)$$

其中 $\text{comb}(x/\Delta x)$ 为梳状函数, $\text{rect}(x/T_w)$ 为矩形函数, T_w 为有限区域叠栅条纹的空间范围, $x \in \left(-\frac{T_w}{2}, \frac{T_w}{2}\right)$ 。对(7)式进行傅里叶变换并取 $n = 0$, 得^[2]

$$G(f) = C(f) \otimes \delta(f - f_0) \otimes T_w \text{sinc}(T_w f) + \bar{C}(f) \otimes \delta(f + f_0) \otimes T_w \text{sinc}(T_w f), \quad (8)$$

以下可对(8)式进行类似对(4)式的处理,由傅里叶变换的性质可知,只有当 $C(f) \otimes \delta(f - f_0) \otimes T_w \text{sinc}(T_w f)$ 为 $C(f)$ 的常数倍,即 $\delta(f - f_0) \otimes T_w \text{sinc}(T_w f)$ 为常数时,进行逆变换才能得到形如(5)式右侧的 $\frac{1}{2}b(x, y) \exp[i\varphi(x, y)]$, 进而得到真

实相位值。因此对 $\delta(f - f_0) \otimes T_w \text{sinc}(T_w f)$ 进行分析。

设图像所占空间区域 T_w 与条纹周期之间 T_0 的关系为: $T_w = mT_0 + kT_0$, 其中 m 为整数, k 的取值范围为 $[0, 1]$ 。则有

$$\begin{aligned} \delta(f - f_0) \otimes T_w \text{sinc}(T_w f) &= T_w \text{sinc}[T_w(f - f_0)] = T_w \frac{\sin[\pi T_w(f - f_0)]}{\pi T_w(f - f_0)} = \\ T_w \frac{\sin[\pi(mT_0 + kT_0)(f - f_0)]}{\pi T_w(f - f_0)} &= \frac{\sin[\pi(mT_0 + kT_0)f - \pi m - \pi k]}{\pi(f - f_0)} = \\ \frac{\sin[\pi f T_w - \pi m - \pi k]}{\pi(f - f_0)} &= (-1)^m \frac{\sin[(\pi f T_w) - \pi k]}{\pi(f - f_0)}, \end{aligned} \quad (9)$$

1) 若图像所占空间区域为条纹周期的整数倍,即 $k = 0$ 时。注意到 fT_w 为整数,分析可知 $\delta(f - f_0) \otimes T_w \text{sinc}(T_w f)$ 只在 f_0 处有值,其余坐标处均为 0。 $C(f) \otimes \delta(f - f_0) \otimes T_w \text{sinc}(T_w f)$ 的逆变换为 $\frac{1}{2}b(x, y) \exp[i\varphi(x, y)]$ 。

2) 若图像所占空间区域不为条纹周期的整数倍,即 $k \neq 0$ 时。由(9)式可知

$$\delta(f - f_0) \otimes T_w \text{sinc}(T_w f) = (-1)^m \frac{\sin(\pi k)}{\pi(f - f_0)}, \quad (10)$$

其中, $M = m + T_w f_0$ 。于是实际的频谱为 $C(f) \otimes (-1)^m \frac{\sin(\pi k)}{\pi(f - f_0)}$ 。进行逆变换后得到

$$\begin{aligned} c'(x, y) &= \\ \frac{1}{2}b(x, y) \exp\{i[\varphi(x, y) + 2\pi f_0 x]\} E(x). \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$E(x) = \sum_{nf_w=0}^{1/2\Delta x} \left[(-1)^M \frac{\sin(\pi k)}{\pi(nf_w - f_0)} \right] \exp\left(i \frac{2\pi x n f_w}{N}\right), \quad (12)$$

为 $(-1)^M \frac{\sin(\pi k)}{\pi(nf_w - f_0)}$ 的逆变换, n 为叠栅条纹空间区域总点数。对比(5)式和(11)式,可知 $E(x)$ 将决定傅里叶变换方法获得的相位与真实值之间的误差。对 $E(x)$ 的函数形态的进一步分析表明,正是它导致了边缘误差。

由以上分析,为了减小频谱泄漏所引起的误差,应使图像空间区域为叠栅条纹周期的整数倍。为此,对于 CCD 得到的叠栅条纹图案,可以通过外插值的方法,对条纹进行延拓,从而提高傅里叶变换求取相位的精度。

5 延拓法减小频谱泄漏所引起的相位误差的数值验证

为了对频谱泄漏引起的误差进行验证,预设叠栅条纹的理论光强度 $I=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{40}x+1\right)$,叠栅条纹周期为 $T_0=40$,分别取不同的长度的空间截断区域 T_w ,分析傅里叶变换方法计算得到的相位和预设相位值之间的相对误差随空间坐标的分布,如图4~图7所示。

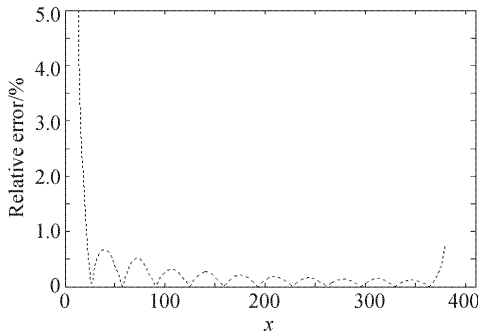


Fig. 4 The relative error when $T_w=9.5T_0$

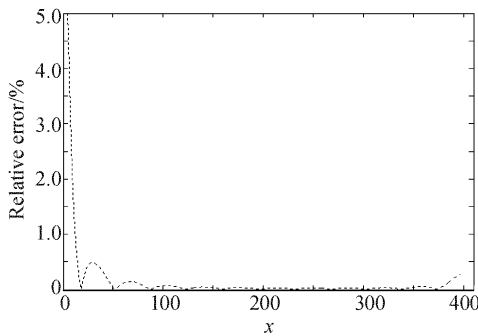


Fig. 5 The relative error when $T_w=9.95T_0$

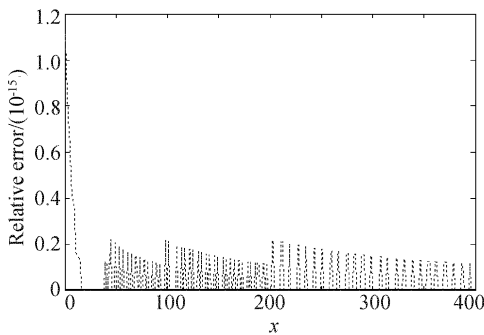


Fig. 6 The relative error when $T_w=10T_0$

表1给出了空间区域偏离叠栅条纹周期整数倍及为条纹周期整数倍时计算得到的相位和预设相位之间的平均相对误差。从图4~图7中和表1中可以看出,只有当截断区域为条纹周期整数倍时,傅里叶变换方法计算得到的相位与理论预设值在区域边

缘的误差才能得到有效抑制,从而使得两者之间的平均误差迅速减小,此时相对误差仅为 10^{-17} 量级。如此小的误差,在叠栅条纹的数据处理中完全可以忽略。

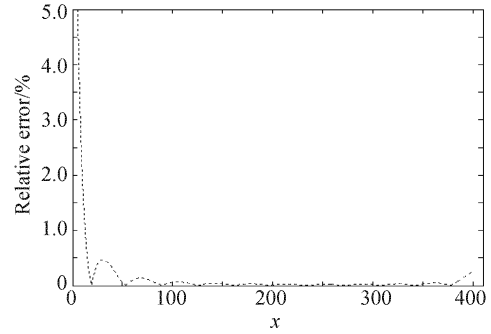


Fig. 7 The relative error when $T_w=10.05T_0$

Table 1 The average relative error at various conditions

Relation between T_w and T_0	Average relative phase error / (%)
$T_w=9.5T_0$	2.58
$T_w=9.95T_0$	0.225
$T_w=9.975T_0$	0.113
$T_w=10T_0$	5.8×10^{-15}
$T_w=10.025T_0$	0.114
$T_w=10.05T_0$	0.230
$T_w=10.1T_0$	0.466
$T_w=10.5T_0$	2.34

其次,值得注意的是,当截断区域为条纹周期的整数倍时,相位值的相对误差随该倍数基本没有太大变化。如图8所示。图8中给出了计算相位和理论相位之间的平均相对误差随整数倍数 N (其中 $N=T_w/T_0$)的分布。由此可见,只要条纹空间截断区域为条纹周期的任意整数倍,用傅里叶变换方法求得的相位误差就很小(约为 10^{-17} 量级)。因此,在叠栅条纹图像数据处理中,只要考虑将叠栅条纹延拓为距离现有空间区域最近的条纹周期的整数倍即可。

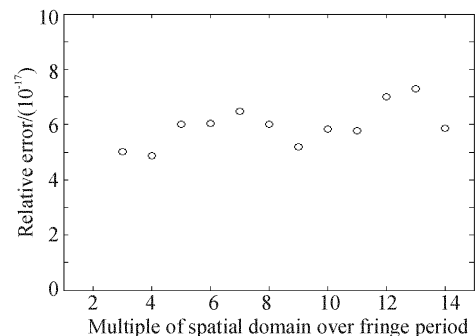


Fig. 8 The relative error at various integer times

6 图像处理中以及延拓区域的确定

由上分析可知,减小傅里叶变换方法求取叠栅条纹相位误差的关键在于延拓图像至条纹周期的整数倍,而且只要延拓至距离所采集到条纹图像区域最近的整数倍即可。而这一过程主要在于如何确定叠栅条纹周期 T_0 。在图像处理中, T_0 和 T_w 分别对应条纹周期和图像区域所占的像素值。

当然,最简单的方法就是人工数出一幅条纹图像上有多少条条纹,然后用叠栅条纹图像所占的空间区域大小(像素值)除以条纹条数即可得 T_0 。然而,这样不利于自动化处理。注意到所面临的问题中叠栅条纹均为竖直或者水平的平行规则条纹,以水平条纹为例,可以求出每行的像素灰度平均值,通过对该平均值比较大小的方法,找到两个相邻峰值之间的距离(像素点数),此即为条纹的周期 T_0 。

设延拓前图像所占空间区域为 T_{w0} ,前面已求出条纹周期 T_0 ,则延拓后的条纹所占区域 T_w 可用下式求出:

$$T_w = \left[\text{ent} \left(\frac{T_{w0}}{T_0} \right) + 1 \right] T_0,$$

其中 $\text{ent}(x)$ 为取整函数,取值为小于等于 x 的最大整数。

求得 T_w 后,可以运用数值外插值的方法,求出 T_{w0} 以外、 T_w 以内的叠栅条纹图像的灰度值,实现将条纹图像延拓为条纹周期的整数倍,减小最终求

得相位的误差。

7 实验验证

采用如图 9 所示的实验光路和装置,对一根加热的细丝周围的温度场进行测量。得到的受流场扰动前后的两幅叠栅条纹图像如图 10 所示。不进行条纹延拓,直接对条纹进行傅里叶变换,得到扰动前后的相位差,计算出光线偏折角,再利用阿贝尔(Abel)变换反演出细丝周围的温度分布。另外,将得到的条纹进行延拓处理后,再经过上述处理,得到细丝周围温度分布。最后把得到的两个温度分布同理论值进行比较。图 11 为三个温度随空间变化曲线,其中实线为理论分布,虚线为进行条纹延拓后得到的分布,点划线为未进行条纹周期延拓时得到的分布,由图 11 可见三者吻合的较好。图 12 为求得的温度分布和理论预测值之间的相对误差,实线为进行条纹延拓后得到的相对误差,虚线为未进行延拓得到的温度的相对误差。由图 12 可见,对得到的条纹图像进行延拓后,再傅里叶变换,最终求取温度,得到的结果相对于理论预测值的误差小于不进行延拓时的误差。因此,利用条纹延拓的办法,可以抑制傅里叶变换求解条纹相位的误差,最终减小得到温度分布的误差。

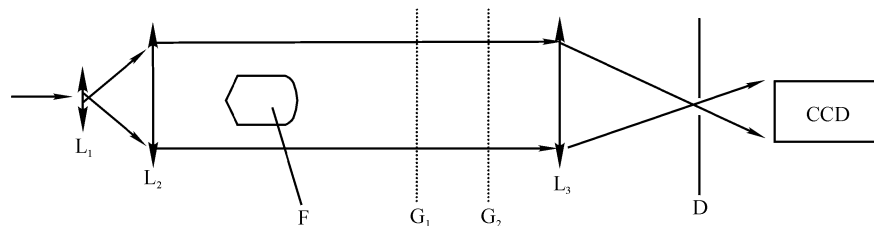


Fig. 9 Experimental arrangement of laser moiré deflectometry. L_1 : extender lens; L_2 : collimating lens; F: flow field; L_3 : microscopical image lens; G_1, G_2 : grating; D: aperture

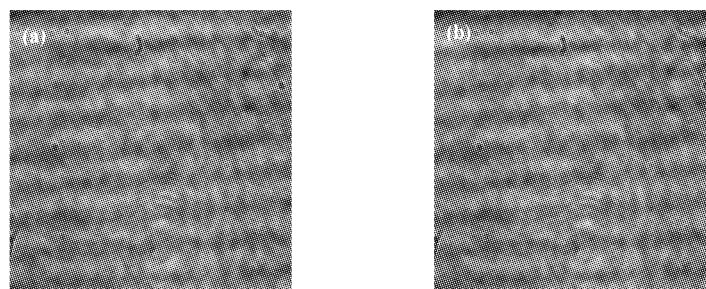


Fig. 10 Moiré fringe obtained. (a) Without flow field; (b) With flow field

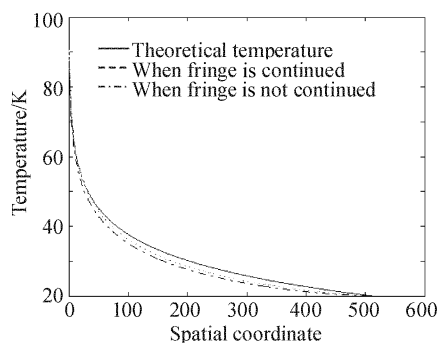


Fig. 11 The temperature distribution

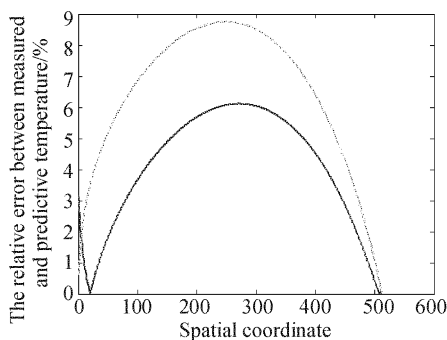


Fig. 12 The relative error between measured and predictive temperature

结论 本文研究与分析了傅里叶变换求取叠栅条纹相位分布中频谱泄漏产生的原因及其对相位求解误差的影响,理论分析、数值模拟以及初步实验验证都表明:傅里叶变换方法求取叠栅条纹的相位分布时,由于空间区域截断而产生的频谱泄漏将使得区域边缘的相位值误差较大;只要延拓空间区域为叠栅条纹周期的任一整数倍,就可以显著减小傅里叶变换方法求得的相位误差至可以忽略的数量级,大大提高了数据处理精度,为叠栅偏折法应用于微细尺度传热和流动的实验研究提供了有效的技术途径。

参 考 文 献

- 1 Zhang Hongling, Song Yaozu. Laser moiré deflectometry applicable for temperature measurement in mini or micro scale flow. *J. Engng. Thermophysics* (工程热物理论), 2002, **23**(3):339~341 (in Chinese)
- 2 Chen Wenjin, Su Xianyu, Tan Songxin. Discussion on phase errors caused by frequency leakage in FTP. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2000, **20**(10): 1429~1434 (in Chinese)
- 3 Takeda M, Ina H, Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1)

Analysis of Measurement Accuracy for Mini-displacement of Moiré Fringe by Fourier Transform

Zhang Xiangchun Song Yaozu

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084)

(Received 2 August 2002; revised 2 December 2002)

Abstract: A new data processing method by means of Fourier transform has been developed. In Fourier transform, frequency leakage will surely be caused because of the space-limited extension of fringe pattern in Fourier transform. It will cause measurement error. The reason why frequency leakage is caused is analyzed, the corresponding numerical simulation is presented in detail, and the preliminary experiment is carried out. On the basis of the analysis, the numerical simulation and the experiment, it is proposed that external interpolation continuation of the fringe pattern to any integer times will greatly improve the measurement accuracy. The data processing method will promote the application of moiré deflectometry in micro-scale heat transfer and flow measurement.

Key words: information processing; moiré deflectometry; Fourier transform; frequency leakage; micro-scale heat transfer and flow