

文章编号: 0253-2239(2003)12-1433-6

# 一种少投影光学层析新算法及其应用\*

万 雄<sup>1,2</sup> 何兴道<sup>2</sup> 高益庆<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)  
(<sup>2</sup> 南昌航空工业学院测控系, 南昌 330034)

**摘要:** 研究少投影数情况下等离子体温度场重建问题。结合光学层析重建算法及等离子体光谱诊断中的谱线绝对强度法进行自由电弧等离子体温度场重建实验。理论上, 详细讨论了一种基于最大熵准则及最优化原理的光学层析图像重建新算法。通过计算机数值模拟, 考察了该算法对非对称温度场分布的重建效果。详细分析了投影噪声、投影方向数、场分布性质对重建精度的影响, 并与代数迭代重建算法结果进行对比。结果表明, 该算法以两个正交方向投影数据重建单峰余弦模拟场平均误差仅为 0.03%, 而代数迭代重建算法为 3.81%; 该算法以四个均匀角度间隔投影数据重建三峰随机高斯模拟场平均误差为 1.77%, 而代数迭代重建算法为 2.02%。实验中, 运用该算法结合谱线绝对强度法重建了自由电弧等离子体的温度分布。

**关键词:** 信息光学; 光学层析; 电弧温度场; 光谱测量; 最大熵

中图分类号: TN2 文献标识码: A

## 1 引 言

光学层析(OCT)技术是一种从三维场分布参量线积分重建场分布的技术。它在热物理量测量、等离子体诊断<sup>[1~6]</sup>等方面已显示出极大的优越性。到目前为止, 各种光学层析技术在实际应用方面都有其局限性。例如光束偏转法需要测量对象进行旋转和移动扫描, 它能应用于稳态场测量, 但不能适用于瞬态场测量。全息层析技术能进行物理量的瞬态测量, 若采用卷积反投影算法或傅里叶重建算法则它具有较高精度, 但需要获得多方向投影数据。而在光学层析测量中, 由于装置成本和复杂性原因, 获取的投影数据往往是很有限制的, 因此该方法受到极大限制。从光学层析实用性出发, 目前正在向少投影数和有限视角方向发展<sup>[1,5,7]</sup>。少投影数的光学层析算法一般是基于级数展开的迭代算法, 包括: 代数迭代重建算法(ART)、同时迭代重建算法(SIRT)、乘性代数重建算法(MART)、联合代数重建算法(SART)等, 每种算法都有它的优缺点。本文提出一种新颖的基于最大熵准则和最优化原理的光学层析算法(MECT)<sup>[7,8]</sup>, 数值模拟表明, 该算法

在少投影数情况下具有相当高的重建精度, 与代数迭代重建算法相比具有明显的优点。作为应用实例, 结合谱线绝对强度法, 对电弧等离子体温度场进行了三维分布测量。

## 2 谱线绝对强度法测量原理

热等离子体温度场的诊断有接触式和非接触式测量两类。而接触式测量会干扰被测量场的分布, 而且测量探头难于忍受等离子体的高温, 所以常采用非接触式的光谱方法。所谓光谱方法就是测量热等离子体的谱线强度、连续谱强度或谱线宽度等, 再通过某些关系式求得所需的热力学参量场。

电弧等离子体谱线发射系数可表示为

$$f_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} g_u \frac{n}{z(T)} \exp\left(-\frac{E_u}{kT}\right), \quad (1)$$

它是等离子体温度的强函数, 其中  $h$  为普朗克常量,  $\nu$  为谱线频率,  $A_{ul}$  为爱因斯坦跃迁几率,  $g_u$ 、 $E_u$  分别为能级的统计权重和能量,  $z(T)$  为配分函数。以上参量均为原子常数, 可通过查表或计算作用已知量。如果等离子体满足局域热力学平衡条件, 则可由玻耳兹曼分布和沙哈方程求得粒子数密度  $n$ 。因此只要知道谱线发射系数  $f_\nu$ , 就可通过(1)式求得等离子体温度分布。而测量仪器只能测出谱线强度, 它与发射系数的关系如图 1 所示, 且有

$$I_\nu(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(x, y) ds. \quad (2)$$

\* 中国航空科学基金(00156004)及江西省测控工程研究中心基金(KG200104002)资助课题。

E-mail: wangxiong1@163.net

收稿日期: 2002-07-29; 收到修改稿日期: 2002-12-26

通过测量不同角度的谱线强度,利用光学层析算法可重建发射系数的三维分布,进而可得到等离子体场温度的分布,这就是光谱绝对强度法的原理。

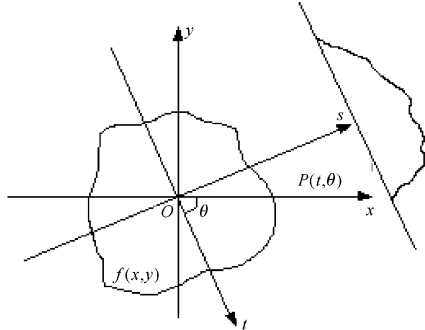


Fig. 1 The relationship of spectrum intensity and emission coefficient

### 3 基于最大熵准则的光学层析算法

从数学角度说,源函数的重建问题可归结于拉东(Radon)逆变换即从投影数据重建图像。在图 1 中,谱线强度  $I$  是发射系数  $f(x,y)$  沿坐标轴  $s$  的投影数据。

笛卡儿坐标系  $(t,s)$  是基本坐标系  $(x,y)$  旋转  $\theta$  得到的。如投影角度数很少,则重建发射系数将是一个不确定性问题,而最大熵准则<sup>[8]</sup>是解决这个问题的好方法。它的定义如下:

$$\phi(f) = - \iint f(x,y) \ln |f(x,y)| dx dy, \quad (3)$$

通过使  $\phi(f)$  最大,则可得到最可能的  $f(x,y)$  分布。利用拉格朗日乘子法可解决约束最优化问题。构建优化函数如下:

$$\Gamma(f) = \phi(f) - \sum_j \lambda_j(s) \Delta s \left[ I_j(s) - \int f(x,y) dt \right], \quad (4)$$

$\lambda_j$  为拉格朗日乘子,  $\Delta s$  为坐标间隔  $[s_m, s_{m+1}]$ , 当  $\Delta s \rightarrow 0$ , 可得

$$\Gamma(f) = \phi(f) - \sum_j \int ds \lambda_j(s) \left[ I_j(s) - \int f(x,y) dt \right], \quad (5)$$

上式的第三项可写成

$$\int ds \lambda_j(s) \int f(x,y) dt = \iint \lambda_j(s) f(x,y) dx dy = \iint \lambda_j(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) f(x,y) dx dy, \quad (6)$$

积分变量的转换运用了雅可比行列式等于 1。优化函数对  $f$  求导可得

$$-\ln(f) - 1 + \sum_j \lambda_j(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) = 0, \quad (7)$$

则有

$$f(x,y) = \prod_j M_j(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j). \quad (8)$$

式中

$$M_j(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) = \exp[\lambda_j(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) - 1/J], \quad (9)$$

式中  $J$  为投影方向总数。把(8)式代入(2)式中,则可得计算  $M_j$  的迭代公式:

$$M_j^{(t+1)} = \frac{I_j}{\int ds \prod_{k \neq j} M_k^{(t)} [t \cos(\theta_j - \theta_k) - s \sin(\theta_j - \theta_k)]}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, J \quad (10)$$

式中  $I_j$  表示各方向所测量得到的谱线强度,  $\theta_j$  和  $\theta_k$  为投影角度。

特别地,当只有两个正交投影数据情况下,该重建算法表示为

$$f(x,y) = M_1(x)M_2(y), \quad (11)$$

如果源函数能够分解为互相正交的两个函数之积,则可得到拉东逆变换的解析解,如果定义

$$\iint f(x,y) dx dy = 1, \quad (12)$$

则有

$$f(x,y) = I_1(y)^T I_2(x), \quad (13)$$

这样,发射系数源函数可由两个互相垂直的谱线强度投影数据进行重建。如果发射系数函数不具备对

称性,也不可分解为两个正交函数相乘,则投影角度数目必须大于 2,才能保证一定的重建精度。

### 4 计算机数值模拟与结果

#### 4.1 重建发射系数场函数、误差指标及投影方式选择

为了考察上述算法的可靠性与重建效果,选用单峰余弦函数及三峰任意高斯函数进行发射系数的数值模拟。

单峰余弦函数如图 2 所示,代表的是光滑、非对称且在区域边缘梯度趋于零的场分布,其表达式如下:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0.25\{1 - \cos[2\pi(x + 0.5)^{4/5}]\}\{1 - \cos[2\pi(y + 0.5)^{2/3}]\}, & |x, y| < 0.5, \\ f(x, y) = 0 & |x, y| \geq 0.5, \end{cases} \quad (14)$$

三峰随机分布高斯函数如图 3 所示,代表多相任意的自由电弧火焰分布情况,表达式如下:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^3 c_i \exp\left[-\frac{4\ln 2}{a_i^2}(x - x_{0i})^2 - \frac{4\ln 2}{b_i^2}(y - y_{0i})^2\right], \quad (15)$$

$$c_1 = c_2 = 2c_3 = 1, \quad a_1 = a_2 = 0.4a_3 = 0.2, \quad b_1 = 2b_3 = 0.4, \quad b_2 = 0.5;$$

$$x_{01} = x_{03} = 0.4, \quad x_{02} = -0.3, \quad y_{01} = 0.4, \quad y_{02} = 0, \quad y_{03} = -0.3, \quad \phi_1 = \phi_3 = 45^\circ, \quad \phi_2 = 0^\circ.$$

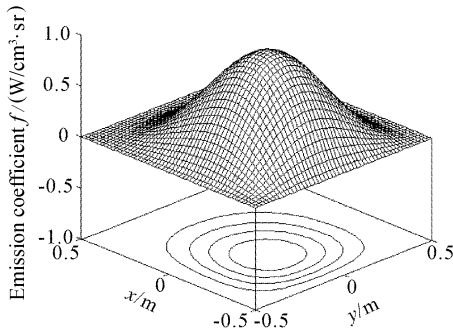


Fig. 2 The single-peak-cosine emission coefficient simulation function

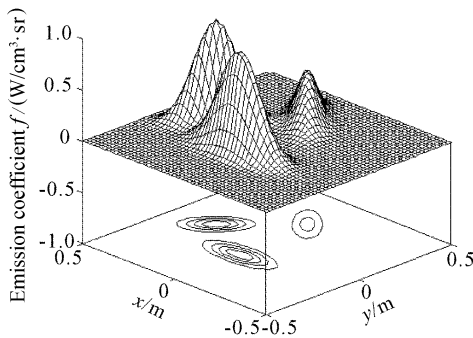


Fig. 3 The three-peak-Random-Gauss emission coefficient simulation function

以上发射分布经辛普生数值线积分,可得到各个投影方向的模拟谱线强度数据  $I_j$ 。为了考查噪声的影响,分三种情况讨论重建结果:无噪声,30 dB 噪声,20 dB 噪声。信噪比按下式定义:

$$R_{SN} = 10 \lg \left( \frac{\sum_{i=1}^n I_i^2}{\sum_{i=1}^n \bar{I}_i^2} \right), \quad (16)$$

式中  $I$  为模拟谱线强度数据,  $\bar{I}$  为噪声引起的强度误差.  $i = 1, 2, \dots, n$  为各个投影方向的射线条数。

定义三种重建误差:

1) 平均相对误差

$$\alpha = \frac{\sum_{m,n} |f(m,n) - R(m,n)|}{f_{\max} \times m \times n}, \quad (17)$$

2) 最大相对误差

$$\beta = \frac{|f(m,n) - R(m,n)|_{\max}}{f_{\max}}, \quad (18)$$

3) 均方根误差

$$\gamma = \left\{ \frac{\sum_{m,n} [f(m,n) - R(m,n)]^2}{\sum_{m,n} [f(m,n)]^2} \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

三种误差定义从不同角度体现了重建误差,从而客观地反映了算法的重建精度,式中  $f(x, y)$  为原始发射系数,  $R(m, n)$  为重建发射系数。

采用两种有限角方式进行重建:

A) 两个正交方向的投影角

B) 四个间隔为  $45^\circ$  的投影角。

#### 4.2 重建结果及收敛性分析

为了考察基于最大熵准则及最优化原理的层析新算法(MECT)的效果,选择基于级数展开的代数迭代重建算法(ART)与之相比。重建误差比较见表 1、表 2、表 3。新光学层析算法重建结果如图 4、图 5 所示(图 4 为仅从两个方向投影重建,图 5 为从四个方向投影重建)。

Table 1 Average errors / %

Algorithm	Noise / dB	Emission coefficient function			
		Single-peak-cosine		Three-peak-random-Gauss	
		A	B	A	B
MECT	0	<b>0.03</b>	1.77	5.15	<b>1.77</b>
	30	<b>0.87</b>	2.27	5.13	<b>1.79</b>
	20	<b>2.69</b>	4.80	5.19	<b>2.14</b>
ART	0	3.81	1.37	5.66	2.02
	30	3.87	1.94	5.63	2.09
	20	4.23	4.36	5.65	2.44

Table 2 Maximum errors / %

Algorithm	Noise / dB	Emission coefficient function			
		Single-peak-cosine		Single-Peak-Cosine	
		A	B	A	B
MECT	0	<b>0.12</b>	14.26	71.08	<b>22.22</b>
	30	<b>10.07</b>	15.90	72.99	<b>23.40</b>
	20	27.66	45.39	72.23	35.36
ART	0	13.77	10.03	71.91	24.81
	30	13.22	11.90	72.37	26.42
	20	20.68	<b>19.95</b>	73.97	38.19

Table 3 Mean-square errors (MSE)/%

Algorithm	Noise / dB	Emission coefficient function			
		Single-peak-cosine		Single-Peak-Cosine	
		A	B	A	B
MECT	0	<b>0.12</b>	3.90	75.48	<b>18.89</b>
	30	<b>3.14</b>	5.30	75.34	<b>19.12</b>
	20	<b>10.00</b>	11.38	75.61	<b>21.95</b>
ART	0	12.61	5.09	66.46	21.37
	30	12.87	6.84	66.46	21.94
	20	14.46	14.77	66.66	24.47

表中黑体的数据为相同情况下的最优结果(代数迭代重建算法采用 sinc 基函数且以 0 初值进行迭代,且松弛因子选择为 1)。

为了确定两种光学层析算法的合理迭代次数,必须研究它们在不同噪声及不同有限角投影方向情况下的收敛情况。研究表明,在单峰余弦场两方向重建中,基于最大熵准则及最优化原理的最大熵层析算法及传统的代数迭代重建算法在各种噪声情况下均具有很好的收敛性。并且当迭代次数增大到一定数值时,再继续增加迭代次数并不能改善重建精度(如图 6 所示)。在三峰随机分布高斯场四方向重建中,最大熵层析算法在各种噪声情况下依然保持极好的收敛性,而代数迭代重建算法在较强噪声(20 dB)情况下出现了发散现象(如图 7 所示)。

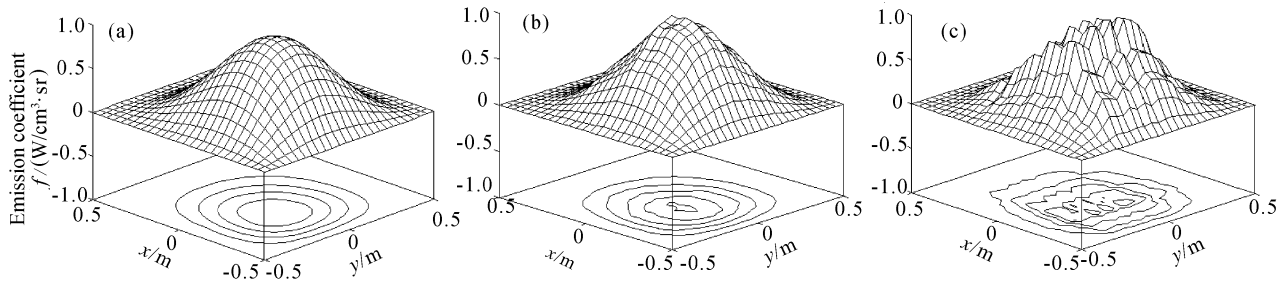


Fig. 4 The reconstruction results of the single-peak-Cosine function with MECT algorithm. (a) No noise; (b) 30 dB noise; (c) 20 dB noise

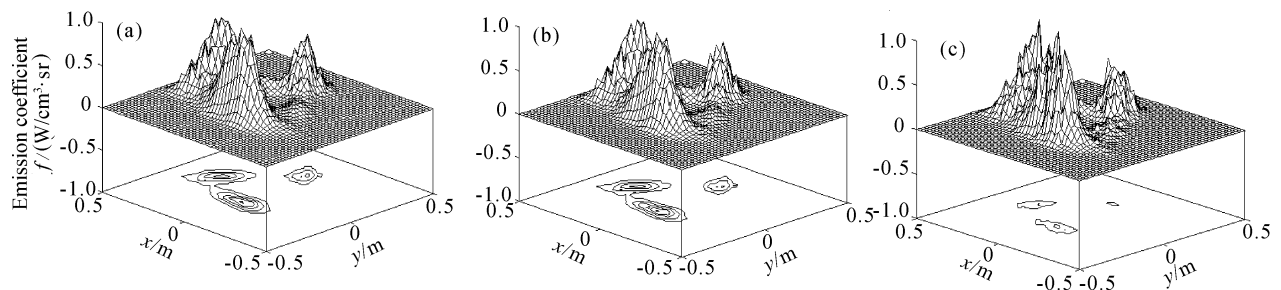


Fig. 5 The reconstruction results of the three-peak-random-Gauss function with MECT algorithm. (a) No noise; (b) 30 dB noise; (c) 20 dB noise

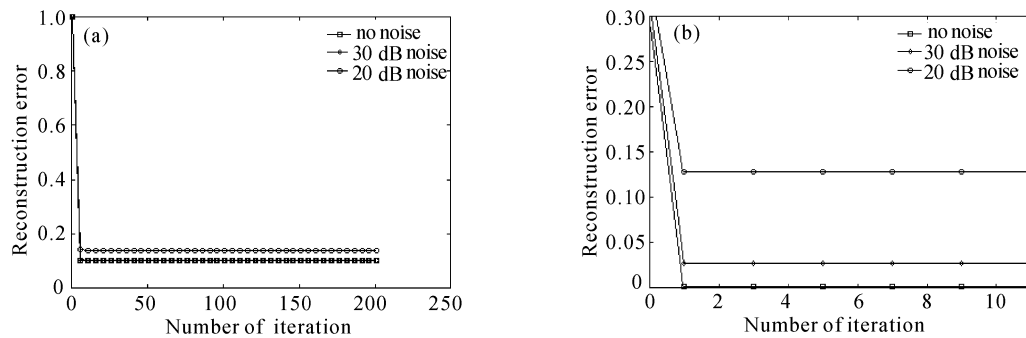


Fig. 6 The MSE convergence of ART and MECT algorithms for the single-peak-Cosine function reconstruction with only two views. (a) ART algorithm; (b) MECT algorithm

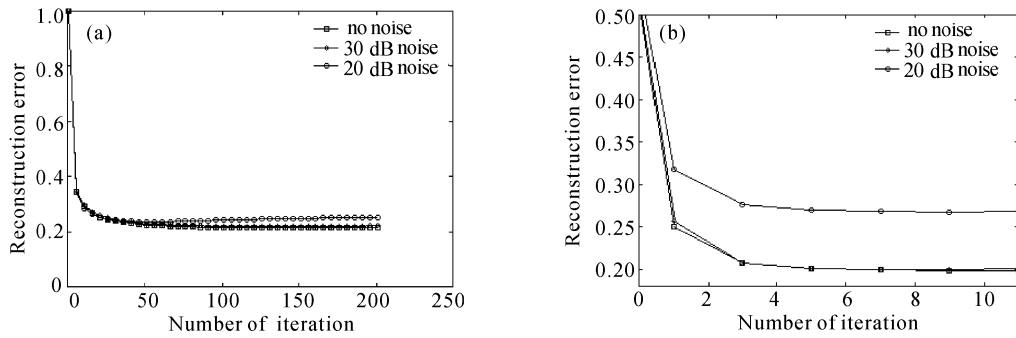


Fig. 7 The MSE convergence of ART and MECT algorithms for the three-peak-random-Gauss function reconstruction with four space-even views. (a) ART algorithm; (b) MECT algorithm

此外,最大熵层析算法在大于两个投影方向重建时,只须迭代极少的次数就可超过传统的代数迭代重建算法迭代百次的重建效果,其优势极其明显。因为迭代次数少意味着重建所需时间很短,因此最大熵层析算法具有在线重建的极强潜力。根据图 6 及图 7 均方根误差收敛曲线,本文所有重建计算中选择迭代次数为:最大熵层析算法迭代 6 次;代数迭代重建算法迭代 100 次。

结果表明,在绝大多数情况下,最大熵新算法均比传统的代数迭代重建算法占优。对于单峰场分布,只需二个角度投影数据,新算法就能取得极佳效果(见图 4),而且增加投影角度反而造成重建精度的下降。对于多峰任意旋转场分布,则投影角度数至少应大于等于 4(见图 5),才会取得较好的重建效果。

## 5 氩气电弧温度的测试实验<sup>[9~11]</sup>

采用谱线绝对强度法测量氩气等离子体温度场装置原理如图 8 所示,实验对象是一双气通道 Tig 焊弧,其电流为 40 A,电压为 18.5 V,内喷嘴直径为 5 mm,喷出的氩气流量为 1.5 L/min,弧长为 1.4 cm。

由于所测场分布为单峰形状,故采用基于最大熵准则的新型层析算法所需投影方向数为 2。每个方向谱线强度(投影数据)的获得装置包括:成像透镜、狭缝、单色仪、光电传感器、平移机构。由光学层析方法可重建发射系数场分布,然后可通过公式(1)重建电弧温度场。实验中将电弧温度场分为 10 个截面,重建了整个电弧三维温度分布的数据,表 4 为距电极 0.60 cm 的截面上重建的温度分布数据。详细的谱线绝对强度法用于等离子体诊断所需解决的诸如定标等技术难题的解决方法将在另文中报道。

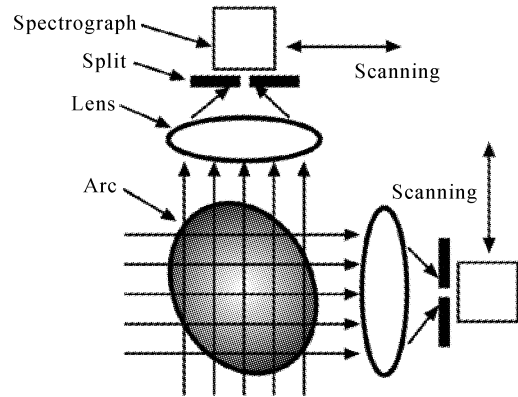


Fig. 8 The test device of the temperature fields reconstruction of Arc plasma

Table 4 Temperature distribution of argon arc  
 $T(x, y, 0.6 \text{ cm}) / \text{K}$

4800	4900	5100	5500	5200	5000	4900
4900	6100	7800	8200	7700	6200	5100
5200	7200	9300	10200	9000	7600	5400
5400	7800	9600	13700	9300	7700	5500
5300	7300	9000	9400	9100	7400	5300
5100	6200	7000	8100	8000	7000	5200
5000	5100	5300	5600	5200	5100	4900

**结论** 计算机模拟和实验测量表明,本文提出的基于最大熵准则与最优化方法相结合的光学层析新算法在少投影情况下与传统的计算方法相比,具有更好的重建效果及抗噪性能,对于热物理量瞬态场重建的领域有着极好的应用前景。

## 参 考 文 献

- 1 Wan Xiong. Study of limited-view tomography algorithms for plasma diagnostics. *Proc. SPIE*, 2002, **4927**:625~632

- 2 Gao Yiqing. Reconstruction of Arc temperature fields by projection space iteration reconstruction-reprojection. *Acta Photonica Sinica* (光子学报), 2001, **30**(2):196~200 (in Chinese)
- 3 Gao Yiqing. 3-D Arc temperature diagnosis with more computed tomography. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1998, **18**(3):376~380 (in Chinese)
- 4 Wan Xiong. 3-D flame temperature field reconstruction with multi-wavelength radiation computed tomography. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2003, **23**(9):1099~1104 (in Chinese)
- 5 Verhoeven D. Limited-data computed tomography algorithms for the physical sciences. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(20):3736~3756
- 6 Hino M, Aono T, Nakajima M *et al.*. Light emission computed tomography system for plasma diagnostics. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(22):4742~4746
- 7 Denisova N V. Two-view tomography. *Appl. Phys.*, 2000, **33**(2):313~319
- 8 Denisova N V. Maximum-entropy-based tomography for gas and plasma diagnostics. *Appl. Phys.*, 1998, **30**(12):1888~1895
- 9 Wan Xiong, Gao Yiqing *et al.*. 3-D flame temperature field reconstruction with multiobjective neural network. *Chin. Opt. Lett.*, 2003, **1**(2):78~81
- 10 Gao Yiqing. 3-D Phase object reconstruction using beam-deflection iterative tomography. *Chin. J. Lasers*, 1996, **B5**(2):150~156
- 11 Gao Yiqing. Reconstruction of 3-D refractive index fields with an opaque object by Radon transform iteration. *Chin. J. Lasers* (中国激光), 1995, **A22**(1):49~54 (in Chinese)

## A Novel Limited-View Tomography Algorithm Based on Maximum Entropy and Its Application

Wan Xiong<sup>1,2</sup> He Xindao<sup>2</sup> Gao Yiqing<sup>2</sup>

$\left[ \begin{array}{l} \text{1 Institute of Automation, Nanjing University of Aeronautics} \\ \text{and Astronautics, Nanjing 210016} \\ \text{2 Department of Measuring and Control Engineering, Nanchang Institute of Aeronautical} \\ \text{Technology, Nanchang 330034} \end{array} \right]$

(Received 29 July 2002; revised 26 December 2002)

**Abstract:** The reconstruction problem of temperature field of plasma with limited-view data is studied. The reconstruction experiment of the arc plasma temperature is fulfilled combining the optical computed tomography with the absolute spectral intensity method in the plasma diagnosis. An optical computed tomography algorithm based on maximum entropy and optimization is discussed in detail theoretically. Its reconstruction results for asymmetrical temperature field with the simulation computation are studied. The effects of noise, view numbers and distribution are analyzed and this algorithm is compared with ART algorithm. The results show the average error of the new algorithm is 0.03% and that of ART is 1.77% with the data of two orthogonal views. The average error of the new algorithm is 1.77% and that of ART is 2.02% with the data of four space evenly views. As a measurement sample, an arc temperature field with spectrum method is reconstructed.

**Key words:** information optics; optical computed tomography; arc temperature field; spectrum measurement; maximum entropy