

文章编号: 0253-2239(2003)12-1451-5

利用级数展开的 Z 扫描理论分析*

臧维平 田建国 刘智波 曹丕佳 周文远 张春平 张光寅

(南开大学物理科学学院光子学中心, 天津 300071)

摘要: 利用级数展开的方法,对薄介质的 Z 扫描理论进行了分析,并对于通常所采用的级数展开和非涅耳衍射分析方法进行了讨论,证明了在分析利用高斯光束对薄介质进行 Z 扫描测量时,即使对于大的非线性相移,高斯分解方法和非涅耳衍射积分方法仍具有等效性,澄清了人们认识上的一些误解。同时分析了远场小孔的归一化透射率与积分限的关系,并对采用高斯分解方法时级数求和的振荡原因进行了分析和讨论,给出了消除振荡所需的最小求和数的判据。针对高斯分解方法和非涅耳衍射积分方法的使用场合,也进行了讨论。根据所得结论,可以在具体的实验和理论分析中,正确地选择更高效的分析方法。

关键词: 非线性光学; Z 扫描; 归一化透射率; 高斯分解; 非涅耳衍射

中图分类号: O437 文献标识码: A

1 引 言

由 Sheik-Bahae 等人提出的 Z 扫描方法^[1],已被广泛地用来测量材料的非线性系数。对于薄介质最常采用的分析方法是高斯分解法(GD)^[1,2],快速傅里叶变换法(FFT)^[3]等。对于入射激光为高斯光束的情况,在一阶近似下,可以得到轴上透射率的简单解析表达式,文献[1]已对此进行了深入的分析。当然也有大量的作者采用非涅耳(Fresnel)衍射^[4,5]或汉开尔变换^[6]进行了数值分析。人们通常认为,高斯分解方法只适用小的非线性相移情况,而对于大的非线性相移情况,只能采用非涅耳衍射积分方法。本文通过理论分析证实,高斯分解方法同样适用于大的非线性相移的情况,我们利用级数展开证明,两种方法的处理结果是完全一样的。

本文利用级数展开的方法,对薄介质的 Z 扫描理论进行了分析,对于通常所采用的级数展开和非涅耳衍射分析方法进行了讨论,证明了在分析利用高斯光束对薄介质进行 Z 扫描测量时,高斯分解方法和非涅耳衍射积分方法结果的等效性,澄清了人们认识上的一些误解。同时分析了远场小孔的归一化透射率与积分限的关系,以及采用高斯分解方法

时级数求和的振荡情况。

2 理论模型

图 1 为 Z 扫描方法的实验原理图。这里只讨论介质具有三阶光学非线性的情况,高阶非线性的分析方法是完全类似的。对于三阶光学非线性,折射率 n 由下式给出:

$$n = n_0 + \frac{n_2}{2} |E|^2 = n_0 + \gamma I, \quad (1)$$

式中 n_0 为线性折射率, E 为电场强度, I 为介质中的光强。假定一个 TEM₀₀ 高斯光束,束腰半径为 w_0 ,沿 +Z 方向传播,电场 E 由下式给出:

$$E(r, z, t) = E_0(t) \frac{w_0}{w(z)} \times \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)} - \frac{i\pi r^2}{\lambda R(z)}\right] \exp[-i\varphi(z, t)], \quad (2)$$

式中 $w(z) = w_0(1 + z^2/z_0^2)^{1/2}$, w_0 为光束腰半径, $z_0 = kw_0^2/2$ 为光束共焦参量; $k = 2\pi/\lambda$ 为波矢, λ 为

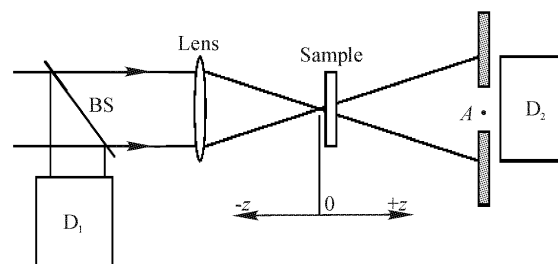


Fig. 1 Scheme of the Z-scan experiment. D_1 , D_2 : detectors; BS: beam splitter

* 国家杰出青年基金(60025512)、教育部重点研究项目(00026)、教育部骨干教师计划及霍英东教育基金会青年教师基金(71008)资助课题。

E-mail: jjtian@nankai.edu.cn

收稿日期: 2002-10-14; 收到修改稿日期: 2002-12-03

光波波长, $E_0(t)$ 表示包含时间的脉冲电场包络, r 为径向坐标, $\exp[-i\varphi(z,t)]$ 包含了径向无关的相位改变。

当介质的厚度足够薄时(这里的薄是指厚度远小于光束的共焦参量),以至于在其中由于衍射和非线性折射引起的光束半径的变化可忽略不计,这样的介质称为薄介质。我们下面的讨论将针对薄介质情况进行。当介质不存在非线性吸收时,可求得在样品出表面的电场强度表达式为^[1]

$$E_e(r, z, t) = E(r, z, t) \exp(-\alpha L/2) \exp[-i\Delta\varphi(r, z, t)], \quad (3)$$

上式中 $\Delta\varphi(r, z, t)$ 为通过非线性介质后的非线性相移,其表达式为

$$\Delta\varphi(z, r, t) = \Delta\varphi_0(z, t) \exp\left[\frac{-2r^2}{w^2(z)}\right], \quad (4a)$$

$$\Delta\varphi_0(z, t) = \frac{\Delta\varphi_0(t)}{1 + z^2/z_0^2}, \quad (4b)$$

式中 $\Delta\varphi_0(t)$ 为轴上焦点处的相移,定义为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_0(t) &= k\Delta n_0(t)L_{\text{eff}}, \\ L_{\text{eff}} &= [1 - \exp(-\alpha L)]/\alpha, \\ \Delta n_0(t) &= \gamma I_0(t), \end{aligned}$$

I_0 为焦点处光强。至此,光在非线性介质中的传播分析已经完成,下面我们将用两种不同的方法来分析薄样品的 Z 扫描性质。

3 高斯分解方法

将(3)式中的非线性相移进行泰勒(Taylor)级数展开,样品出表面的复电场分解成一系列高斯光束的叠加,即

$$\exp[-i\Delta\varphi(z, r, t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-i\Delta\varphi_0(z, t)]^m}{m!} \exp\left[\frac{-2mr^2}{w^2(z)}\right], \quad (5)$$

每一个高斯光束,独立地传播到探测表面,在探测表面对电场再进行重新求和,所得结果为^[1]

$$E_{\text{ga}}(r, t) = E(z, r=0, t) \exp(-\alpha L/2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-i\Delta\varphi_0(z, t)]^m}{m!} \frac{w_{m0}}{w_m} \exp\left(-\frac{r^2}{w_m^2} - \frac{ikr^2}{2R_m} + i\theta_m\right), \quad (6)$$

电场 E 的下标 ga 代表采用高斯分解方法所求得的电场。设 $g=1+d/R(z)$, d 为在自由空间中从介质到孔径 A(Aperture)处的距离。(6)式中其它参量如下:

$$w_{m0}^2 = \frac{w^2(z)}{2m+1}, \quad (7a)$$

$$d_m = \frac{kw_{m0}^2}{2}, \quad (7b)$$

$$R_m = d \left(1 - \frac{g}{g^2 + d^2/d_m^2}\right)^{-1}, \quad (7c)$$

$$\theta_m = \arctan\left(\frac{d/d_m}{g}\right), \quad (7d)$$

$$w_m^2 = w_{m0}^2 (g^2 + d^2/d_m^2). \quad (7e)$$

对于远场小孔和不大的 $|D\varphi_0|$, 我们可以得到光阑处的归一化透射率为^[1]

$$T(z) = 1 + \frac{4x\Delta\varphi_0}{(x^2+1)(x^2+9)}. \quad (8)$$

4 菲涅耳衍射积分方法

为了简单起见,我们计算远场轴上小孔孔径处的电场强度,并且假定入射电场具有轴对称特点。电场在样品出表面由(3)式给出。为了确定 A 点的

电场强度,我们必须计算样品出表面上每一点对 A 点电场的贡献。这可以通过将(3)式乘以惠更斯(Huygens)传播项 W 来获得,具体表式为

$$W = \frac{ik}{2\pi} \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho}, \quad (9a)$$

$$\rho = \sqrt{d^2 + r'^2} \cong d + \frac{r'^2}{2d}, \quad (9b)$$

这里, ρ 为样品出表面 r' 处到 A 点的距离, d 为样品表面到探测点 A 的距离。在探测点 A 处的总电场应为

$$E_{\text{fa}}[z, \Delta\varphi_0(t), t] = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} E_e(r', z, t) \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} r' dr'. \quad (10)$$

通常(10)式需要进行数值求解,只要给出在样品入射表面各处的电场数值即可。但是如果入射光束为高斯光束,即电场可以用方程(2)来表达,通过一些合理的近似,我们可以将(10)改成级数求和。对于远场光阑,并且满足菲涅耳近似,(9)式进行如下化简:

$$\frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} = \frac{\exp(-ikd)\exp(-ikr'^2/2d)}{d}. \quad (11)$$

将(5)式、(6)式、(11)式代入(10)式进行化简,可以得到下式:

$$E_{\text{fa}}[z, \Delta\varphi_0(t), t] = 2C_F E_0(t) \frac{\omega_0}{\omega(z)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-i\Delta\varphi_0(z, t)]^m}{m!} \int_0^{\infty} \exp[-a(z, m)r'^2] r' dr', \quad (12a)$$

$$a(z, m) = \frac{1}{\omega^2(z)} + \frac{i\pi}{\lambda R(z)} + \frac{2m}{\omega^2(z)}, \quad (12b)$$

C_F 包含了一些对计算归一化透射率无关的项。完成积分得

$$E_{\text{fa}}[z, \Delta\varphi_0(t), t] = C_F E_0(t) \frac{\omega_0}{\omega(z)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-i\Delta\varphi_0(z, t)]^m}{m!} \frac{1}{a(z, m)}, \quad (13)$$

当计算归一化透射率时, (13) 式和 (6) 式是一样的。同样, 我们也可以采用对样品出表面的电场进行零阶汉克尔变换, 对于高斯入射光束, 采用级数展开同样可以得到 (13) 式的结果。

5 讨 论

因为对于小非线性相移情况, 文献[1]已经进行

了详细的讨论, 并且可以有一个比较简单的解析表达式。只有当非线性相移较大, 进行 Z 扫描理论分析时, 才需要保留非线性相移的高次项对透射率的影响。所以, 我们的讨论将集中在大的非线性相移情况。

对于远场光阑, 采用高斯分解方法, 可得归一化透射率为

$$T_g(z, \Delta\varphi_0, t) = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-i\Delta\varphi_0(z, t)]^m}{m!} \frac{\omega_{m0}\omega_0}{\omega_m\omega_{00}} \exp\left[i\left(\theta_m - \theta_0 - \frac{m\pi}{2}\right)\right] \right|^2, \quad (14)$$

我们取 $\Delta\varphi_0(t) = 3\pi$, 作为大相移的代表值。在图 2 中, 我们给出了 (14) 式所表示的归一化透射率随样品位置变化的 Z 扫描曲线, 对于级数项我们分别取到 17、18、19、20 项。

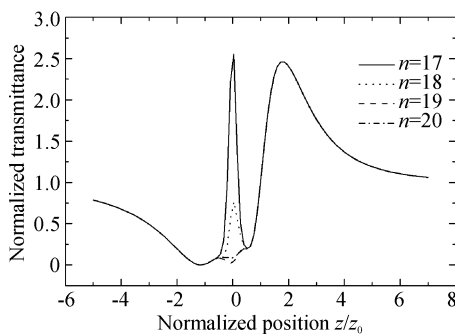


Fig. 2 The oscillation and convergence of normalized transmittance with the increase of summing items for a nonlinear phase shift of 3π

从图 2 可以看到, 当 (14) 式的级数项取 17 和 18 时, 曲线振荡变化还比较大, 当取到 19 和 20 项时, 对应的两曲线已经相当接近, 我们在图上没有绘制 m 较小的曲线是因为级数求和在开始时振荡幅度比较大的缘故, 对于图 2 的情况, 当级数项取到 10 时, 曲线的振荡幅度超过了 2000。

为了分析产生振荡的原因, 我们将 (14) 式展开, 可得如下多项式

$$T_g(z, \Delta\varphi_0, t) = \sum_{m=0}^{\infty} K_m(z, m, t) \frac{\{\Delta\varphi_0/[1+(z/z_0)^2]\}^m}{m!}, \quad (15)$$

上式中, $K_m(z, m, t)$ 为随 m 变化较慢的函数, 振荡主要由 $[\Delta\varphi_0/(1+z^2/z_0^2)]^m/m!$ 项引起, 并且在 $z=0$ 处, 振荡最为严重。当 $\Delta\varphi_0$ 小于 1 时, 不产生振荡; 但当 $\Delta\varphi_0$ 大于 1 时, 将产生振荡, 所以当确定焦点处相移 $\Delta\varphi_0$ 后, 我们可以通过求解下述超越方程来获得 m 的数值:

$$(\Delta\varphi_0)^m/m! \leq 0.5, \quad (16)$$

通常当 $\Delta\varphi_0 \leq 0.5$, 我们取到 $m=1$ 即可。这对应通常的小相移情况。即我们可以采用方程 (8) 来分析 Z 扫描测量结果。当 $\Delta\varphi_0 > 0.5$, 我们可以通过求解方程 (16) 来得到所需要的 m 值, 即确定消除振荡所需要的最小求和项的数目。

在图 3 中我们给出 $\Delta\varphi_0 = 3\pi$ 时的 $y(\Delta\varphi_0, m) = \frac{(\Delta\varphi_0)^m}{m!}$ 的曲线。从图上可以看出, 当 $m=20$ 时, $y(\Delta\varphi_0, m) = \frac{(\Delta\varphi_0)^m}{m!}$ 的数值已经较小, 这与图 2 是吻合的, 所以我们可以用这种方法来初步确定用于求和的 m 值, 即确定消除振荡所需要的最小求和项的数目。

对于菲涅耳衍射积分方法, 归一化透射率可由下式表示:

$$T_i[z, \Delta\varphi_0(t), t] = \frac{|E_{fa}[z, \Delta\varphi_0(t), t]|^2}{|E_{fa}(z, 0, t)|^2}, \quad (17)$$

我们同样取 $\Delta\varphi_0(t)$ 为 3π , 作为大相移的代表。在图 4 中, 我们给出了 (17) 式所表示的归一化透射率随样品位置变化的 Z 扫描曲线, 并对 (12) 式的积分上限分别取不同值进行比较。

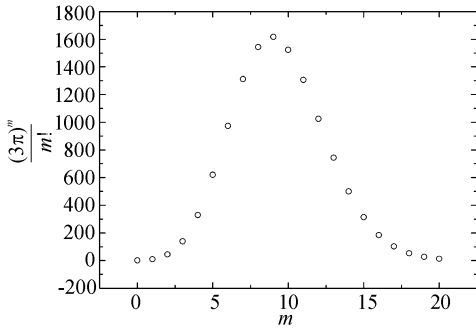


Fig. 3 The change of the function $y(\Delta\varphi_0, m) = (\Delta\varphi_0)^m / m!$ with m

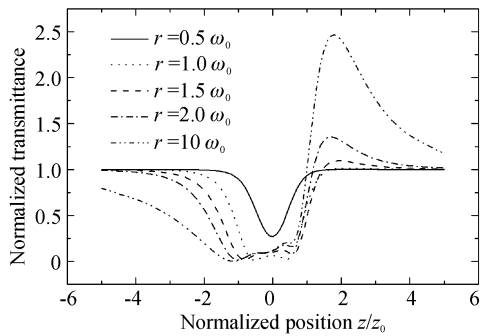


Fig. 4 The convergence of normalized transmittance with the increase of upper limit of integral for a nonlinear phase shift of 3π

从图 4 我们可以看出, 当积分上限小于束腰半径时, 只有透射谷出现, 当继续增大积分上限时, 透射峰开始出现并逐渐增大。当达到 10 个束腰半径时, 才可以得到比较准确的数值解。在图 5 中, 我们给出了, 高斯分解和菲涅耳积分所求透射率的比较。这里, 我们同样取非线性相移为 3π , 对于高斯分解方法, 我们取前 20 项求和, 对于菲涅耳积分, 我们取积分上限为 10 个光束束腰半径。可以看到, 两者相当吻合。

从图 3 到图 5, 我们可以看出, 这时的归一化透射率曲线不但峰谷值不再相对于 $T = 1$ 对称, 而且峰谷坐标也不再关于原点对称, 甚至峰谷差也不再等于 $1.7z_0$ 。这主要是因为当焦点处相移较大时, 高阶项对归一化透射率的影响不能忽略, 从而引起归

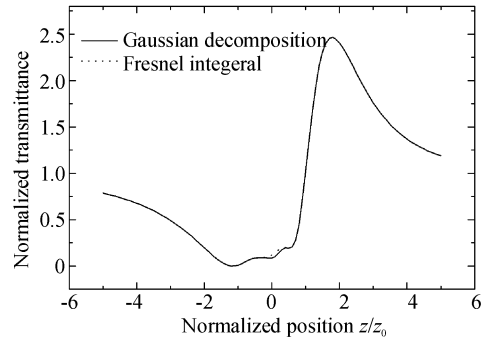


Fig. 5 The comparison of the normalized transmittance by Gaussian decomposition method with one by Fresnel integral for a nonlinear phase shift of 3π 一化透射率曲线的不对称。

结论 高斯分解方法和菲涅耳积分方法是薄样品 Z 扫描理论的不同分析方法, 各有所长。通常情况下, 当采用高斯光束进行 Z 扫描实验, 如果非线性相移或非线性吸收较小时, 我们采用由高斯分解所得的解析表达式来处理, 方便快捷; 如果非线性相移较大时, 两种方法都可以用, 计算上的快慢将依赖于数值解的算法设计; 如果实验中采用的光束为非高斯光束, 则只可采用菲涅耳积分方法。当然对该方法很多人进行了讨论, 如果光束是轴对称的, 通常可采用汉克尔变换^[6]; 如果是一般光束, 可以采用快速傅里叶变换进行求解^[3]。

参 考 文 献

- 1 Sheik-Bahae M, Said A A, Vanstryland E W. Sensitive measurement of optical nonlinearities using a single beam. *IEEE. J. Quant. Electron.*, 1990, **26**(4):760~769
- 2 Weaire D, Wherrett B S, Miller D A B *et al.*. Effect of low-power nonlinear refraction on laser beam propagation in InSb. *Opt. Lett.*, 1979, **4**(10):311~313
- 3 Hughes S, Bruzler J M, Spruce G *et al.*. Fast Fourier transform techniques for efficient simulation of Z-scan measurements. *J. Opt. Soc. Am (B)*, 1995, **12**(10): 1888~1893
- 4 Samad R E, Vieira N D, Jr. J. Analytical description of Z-scan on-axis intensity based on the Huygens Fresnel principle. *J. Opt. Soc. Am (B)*, 1998, **15**(11):2742~2747
- 5 Yao Baoli, Ren Liyong, Hou Xun. A new Z-scan theory based on diffraction model. *Acta Optica Sinica (光学学报)*, 2002, **22**(1):19~23 (in Chineses)
- 6 Gaskill J D. *Linear System, Fourier Transforms, and Optics*. New York: Wiley, 1978

Analysis of Z-Scan by Series Expansion

Zang Weiping Tian Jian'guo Liu Zhibo Cao Pijia Zhou Wenyuan
Zhang Chunping Zhang Guangyin

(*Photonics Center, College of Physics, Nankai University, Tianjin 300071*)

(Received 14 October 2002; revised 13 December 2002)

Abstract: Using series expansion, the Z-scan characteristics of thin optically nonlinear medium are analyzed. Through discussing series expansion and Fresnel intergral method, It is verified that Gaussian decomposition method is equivalent to Fresnel integral method for Z-scan measurements of a thin medium using a Gaussian light beam even for a large nonlinear phase shift, and clarify some misunderstandings. Meanwhile, the relationship of normalized transmittance with upper limiter of Fresnel integral is analyzed, the reason for the oscillation of series summation is given and a criterion for minimum summation number of series needed to eliminate the oscillation is suggested while using a Gaussian decomposition method. The situations that are suitable to be applied for Gaussian decomposition method and Fresnel intergral method are discussed. The conclusion given can be used to choose the appropriate and high efficient analytic method in experimental and theoretical analysis.

Key words: nonlinear optics; Z-scan; normalized transmittance; Gaussian decomposition; Fresnel diffraction

第 6 届全国光学前沿问题讨论会在福建武夷山市举行

由中国光学学会基础光学专业委员会和中国物理学会光物理专业委员会联合主办、中国科学院物理研究所承办的第 6 届全国光学前沿问题讨论会于 2003 年 11 月 16~20 日在福建武夷山市举行。来自国内从事光科学和技术研究的研究所、大学的 68 名代表参加了会议。

大会组织安排了 7 个特邀报告: 飞秒激光在光子晶体光纤中传输特性的研究(天津大学王清月)、时空高分辨飞秒近场光谱学(北京大学龚旗煌)、基于周期性极化铌酸锂晶体的 Solc 滤波器的研究(上海交通大学夏宇兴)、新型双光子吸收材料的超快动力学研究(复旦大学钱士雄)、千赫兹高功率飞秒激光放大及在微结构产生中的应用(中国科学院西安光机所赵卫)、分子 micromaser(清华大学张卫平)、光子晶体中的相变现象(中科院物理所张道中)。随后, 代表们分别就近场光学、量子光学、量子保密通信系统、超短脉冲尤其是飞秒激光脉冲、非线性光学、光子晶体、激光物理、激光生物学等专题进行了交流和讨论。会议学术气氛浓厚, 且开得紧凑高效。

学术交流结束后, 还特地安排了《中国激光》、《光学学报》、《量子电子学报》编辑部作相应学术期刊介绍, 与审稿专家、作者面对面交流, 受到了与会者的欢迎。

(莎 燕)