

文章编号: 0253-2239(2003)11-1325-5

# 基于平方根算符的 2 维广角有限差分波束传播法\*

陈 光 马卫东 王文敏 许远忠 杨 涛

(武汉邮电科学院光迅科技有限公司光波导设计组, 武汉 430074)

**摘要:** 有限差分波束传播法(FD-BPM)是模拟光在光波导器件中行为特性的重要数值方法,它的模拟精度决定于它的帕德(Padé)展开阶数以及计算步长,阶数越高或计算步长越小精度就越高,但是计算时间就越长。为了在比较低的阶数和适中的步长下获得较高的计算精度,从平方根算符出发,运用了一些试探性的展开方法对平方根算符进行处理,得到 3 种 2 阶广角波束传播法计算公式,数值计算表明这些公式比传统广角波束传播法的 2 阶计算公式具有更高的精度,而且可以将该试探性处理方法推广到更高阶的广角波束传播法。

**关键词:** 导波与纤维光学; 数值计算; 有限差分波束传播法; 平方根算符; 帕德展开

中图分类号: TN252 文献标识码: A

## 1 引 言

有限差分波束传播法(FD-BPM)是模拟光在光波导器件中行为特性的重要数值方法,它具有计算速度快、计算精度高以及占用计算机内存小等特点,因而成为使用最广泛的波束传播法<sup>[1~8]</sup>。目前许多的计算机辅助设计软件都是基于此数值方法实现的,如法国 Alcatel 公司的 Olympios 软件、加拿大 Optiwave 公司的 BPM\_CAD 软件、美国的 Rsoft 公司的 Rsoft 软件,等等。

为了获得较高的模拟精度,通常需要使用广角波束传播法,特别是那些对相位非常敏感的器件如耦合器、阵列波导光栅(AWG)等器件更需要使用广角波束传播法。从原则上讲,阶数越高的广角波束传播法模拟精度越高,但是从计算速度的角度考虑,实际的模拟中又不可能使用阶数较高的广角波束传播法,所以在较低的阶数下获得较高的计算精度是十分重要的,这样寻求系数精确的低阶广角波束传播法近似计算公式就成为必然。

本文从平方根算符出发,重新推导广角波束传播法计算公式,发现传统广角波束传播法是从平方根算符得到的近似结果之一。这里为了叙述的方便,将由 Hadely 发展的使用最广泛的广角波束传播法<sup>[9]</sup>称为传统广角波束传播法。从后面的分析可

以看到,在计算大角度的波导时,传统广角波束传播法需要非常小的计算步长,才能获得较高的计算精度。为了提高传统广角波束传播法低阶近似计算公式的精度,本文采用一些试探性的展开方法对平方根算符进行了处理,最后的模拟结果表明,由这些方法得到的计算公式都比同阶的传统广角波束传播法计算公式具有更高的精度。

## 2 平方根算符

在各向同性的媒质中,二维标量亥姆霍兹(Helmholtz)方程(也可以说是 TE 模的场方程)如下:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + n^2(x)k_0^2 = 0, \quad (1)$$

$n(x)$  为介质的折射率分布,  $k_0$  为真空波数,解此方程可得

$$\psi(z + \Delta z) = \exp(\pm iL\Delta z)\psi_0(z), \quad (2)$$

其中  $L = \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2(x)k_0^2}$ , 它就是平方根算符,在后面寻求系数更精确的低阶近似公式时,是对  $\exp(\pm iL\Delta z)$  进行各种展开处理,所以在以后的描述中,将  $\exp(\pm iL\Delta z)$  这个整体称为平方根算符。引入一个参量  $\beta$ , 令  $\beta = n_c k_0$ ,  $n_c$  为参考折射率,则有

$$\psi(z + \Delta z) = \exp(\pm i\sqrt{\beta^2 + P}\Delta z)\psi_0(z), \quad (3)$$

其中  $P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2(x)k_0^2 - n_c^2 k_0^2$ 。对于正向传播的波,

(2) 式中的正负号应取负号。

以上的推导是针对标量场(或 TE 模),对于

\* 国家高技术研究发展计划(863)(2001AA312020)、武汉科技计划(20021005130-06)基金资助课题。

E-mail: cgchen@wri.com.cn; cgcgcn@yaho.com.cn

收稿日期:2002-09-16

TM 模, 以上所有表达式中的  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  都应替换成  $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{n^2(x)} \frac{\partial [n^2(x)\psi]}{\partial x} \right\}$ , 公式的形式没有任何其它的变化。

(2) 式、(3) 式是(1) 式的严格解。所以从(2) 式、(3) 式出发, 可以获得精度不同的各种近似公式。对(2) 式、(3) 式进行展开处理后, 所得到的公式的一般形式为

$$\psi(z + \Delta z) = \exp(-i\beta\Delta z) \frac{a_n P^n + \dots + a_1 P + a_0}{a_n^* P^n + \dots + a_1^* P + a_0} \psi(z), \quad (4)$$

其中 \* 代表复数共轭, 利用 Hadely 发明的多步长方法<sup>[10]</sup>, 可以很容易地对此表达式进行处理。

### 3 平方根算符与传统广角波束传播法的关系

传统广角波束传播法中最主要的公式是文献[9]中的(6)式, 对此式中的表达式  $i(\sqrt{P+\beta^2}-\beta)$  进行帕德展开[Padé(*m*, *n*)], 就可以得到传统广角波束传播法所用的各种阶数的近似计算公式。

其实由平方根算符出发, 经过一系列的近似处理, 也可以得到文献[9]中的(6)式, 证明如下。

对(3)式两边同时乘以  $\exp[i\beta(z+\Delta z)]$ , 可得

$$\psi(z + \Delta z) \exp[i\beta(z + \Delta z)] = \exp[i(\beta - \sqrt{\beta^2 + P})\Delta z] \psi(z) \exp(i\beta\Delta z), \quad (5)$$

由传统广角波束传播法中的缓变包络近似可知,  $\psi(z) = \Phi(z) \exp(-i\beta z)$ , 所以(5) 式变为

$$\Phi(z + \Delta z) = \exp[i(\beta - \sqrt{\beta^2 + P})\Delta z] \Phi(z). \quad (6)$$

对(6) 式中的指数项  $\exp[i(\beta - \sqrt{\beta^2 + P})\Delta z]$  进行泰勒展开, 展开到一次项, 可得

$$\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = i(\sqrt{P + \beta^2} - \beta)\Phi(z), \quad (7)$$

这就是文献[9]中的(6)式。也就是说传统广角波束传播法的计算公式可以通过对平方根算符进行近似处理得到。

可见, 传统广角波束传播法是从平方根算符得到的近似结果。因此, 要获得比传统广角波束传播法精度更高的低阶近似公式, 需要从平方根算符出发。

### 4 对平方根算符的一些试探性处理方法

下面采用一些试探性的展开方法对平方根算符

$\exp(-i\lambda\Delta z)$  进行处理, 去寻求系数更精确的计算公式。在一般的计算中, 都是采用 2~4 阶近似, 所以以下的各种处理方法都只展开处理到算符 P 的 2 次项。如果需要更高阶的广角波束传播法近似计算公式, 可以仿照这里的方法进行类推处理, 只是展开后得到的系数将更复杂, 处理的步骤也更复杂。

#### 1) 方法 1

先将平方根算符改写为

$$\exp(-i\sqrt{\beta^2 + P}\Delta z) = \exp(-i\beta\Delta z) \exp(i\lambda\Delta z), \quad (8)$$

其中  $\lambda = \beta - \sqrt{\beta^2 + P}$ , 对  $\lambda$  中的算符 P 进行 Padé(2, 2) 展开, 得到

$$\lambda = \frac{-4\beta P^2 - 8\beta^3 P}{P^2 + 12\beta^2 P + 16\beta^4}, \quad (9)$$

对  $\exp(i\lambda\Delta z)$  进行 Padé(1, 1) 展开, 可得

$$\exp(i\lambda\Delta z) = \frac{1 + i\lambda\Delta z/2}{1 - i\lambda\Delta z/2}, \quad (10)$$

将(9)式代入(10)式, 对比(4)式, 可得系数

$$a_2 = 1 - 2i\beta\Delta z, \quad (11a)$$

$$a_1 = 12\beta^2 - 4i\beta^3\Delta z, \quad (11b)$$

$$a_0 = 16\beta^4. \quad (11c)$$

这里的结果与文献[11]中所得的结果一样, 也就是传统广角波束传播法<sup>[9]</sup>的结果。由此可知, 传统广角波束传播法是平方根算符的近似结果之一, 如果对平方根算符使用其它不同的展开方法, 应该可以得到系数更精确的近似计算公式。

#### 2) 方法 2

开始的步骤与方法 1 相同, 对  $\lambda$  中的算符 P 进行 Padé(2, 2) 展开, 可得(9) 式。然后对  $\exp(i\lambda\Delta z)$  进行 Padé(2, 2) 展开, 可得

$$\exp(i\lambda\Delta z) = \frac{1 + i\lambda\Delta z/2 + (i\lambda\Delta z)^2/12}{1 - i\lambda\Delta z/2 + (i\lambda\Delta z)^2/12}, \quad (12)$$

将(9)式代入(12)式后, 算符 P 的阶数是 4 阶, 要获得算符 P 的 2 阶近似公式, 需要进行一些处理。本文中的处理方法是在分子、分母上同时乘以  $(P^2 + 12\beta^2 P + 16\beta^4)$ , 然后再对分子、分母同时进行泰勒展开, 展开到算符 P 的 2 次项, 对比(4) 式, 可得系数

$$a_2 = 1 - 2i\beta\Delta z - \beta^2\Delta z^2/3, \quad (13a)$$

$$a_1 = 12\beta^2 - 4i\beta^3\Delta z, \quad (13b)$$

$$a_0 = 16\beta^4. \quad (13c)$$

与方法 1 的结果仔细对照, 可以发现两者的系数  $a_2$  不同。

#### 3) 方法 3

将  $\exp(-i\sqrt{\beta^2 + P}\Delta z)$  中的表达式  $\sqrt{\beta^2 + P}$

对 P 进行 Padé(2,2) 展开,可得

$$\sqrt{\beta^2 + P} = \beta \left( 1 + \sum_{k=1}^2 \frac{e_k P}{1 + f_k P} \right), \quad (14)$$

其中  $e_k = \frac{2\sin^2(k\pi/5)}{5\beta^2}, f_k = \frac{\cos^2(k\pi/5)}{\beta^2}$ , 在这里, 展开的表达式被写成求和的形式, 所以可得

$$\begin{aligned} \exp(-i\sqrt{\beta^2 + P}\Delta z) &= \\ \exp(-i\beta\Delta z) \prod_{k=1}^2 \exp(-i\beta\lambda_k\Delta z), \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\lambda_k = \frac{e_k P}{1 + f_k P}$ . 对  $\exp(-i\beta\lambda_k\Delta z)$  进行 Padé(1,1) 展开, 可得

$$\exp(-i\beta\lambda_k\Delta z) = \frac{1 - i\beta\lambda_k\Delta z/2}{1 + i\beta\lambda_k\Delta z/2}. \quad (16)$$

将  $\lambda_k, e_k, f_k (k = 1, 2)$  的表达式和 (16) 式代入 (15) 式, 对比 (4) 式, 可得系数

$$a_2 = 1 - 2i\beta\Delta z - \beta^2\Delta z^2/5, \quad (17a)$$

$$a_1 = 12\beta^2 - 4i\beta^3\Delta z, \quad (17b)$$

$$a_0 = 16\beta^4. \quad (17c)$$

与方法 1、2 的结果仔细对照, 也是系数  $a_2$  不同, 这是因为对于低阶近似, 系数的主要部分 (低阶成分) 都是相同的, 所以系数的精确程度是体现在那些在近似处理中有可能被忽略的高阶小量, 因此方法 2、3 所得系数中出现高阶量。

4) 方法 4

将表达式  $\exp(-i\sqrt{\beta^2 + P}\Delta z)$  对算符 P 直接进行 Padé(2,2) 展开, 对比 (4) 式, 可得系数

$$a_2 = 9 - 18i\beta\Delta z - 3\beta^2\Delta z^2 - 3i\beta^3\Delta z^3 - \beta^4\Delta z^4, \quad (18a)$$

$$a_1 = (108 - 36i\beta\Delta z + 24\beta^2\Delta z^2 - 12i\beta^3\Delta z^3)\beta^2, \quad (18b)$$

$$a_0 = (144 + 48\beta^2\Delta z^2)\beta^4. \quad (18c)$$

这里的系数比较复杂, 但是它的精度需要用实际的模拟结果来确定。

### 5 模拟结果

为了确定由上述 4 种方法所得的近似计算公式的精确程度, 本文对一根倾斜 45° 的直波导进行了模拟计算, 根据模拟的结果来确定所得近似公式的精度。用于模拟计算的直波导为一单模波导, 芯层折射率为 1.5, 包层折射率为 1.497, 波导宽度为 8 μm, 入射光的波长为 1.55 μm, x 方向 (波导横截面方向) 的计算步长为 0.1 μm。为了看到近似公式与计算步长的关系, z 方向 (计算的方向) 的计算步长

分别选为 0.1 μm、0.4 μm, 它们都比入射光波长 1.55 μm 小很多。

计算与方向 z 有一定角度的直波导, 初始的输入场为<sup>[7]</sup>

$$\Psi_i(x) = \phi_0(x)\exp(i\beta_0 x \sin \theta), \quad (19)$$

其中 θ 为直波导的倾斜角。场  $\phi_0(x)$  为基模场,  $\beta_0$  为波导中基模的传播常量。

本文中的计算结果用功率比表示, 表达式如下:

$$\eta = \int_0^i |\Psi_o(x)|^2 dx / \int_i^i |\Psi_i(x)|^2 dx, \quad (20)$$

$\Psi_i(x)$  为初始的输入场,  $\Psi_o(x)$  为波导中由模拟得到的最后的输出场。在计算直波导时, 在理想的情况下, 波束传播法计算得到的功率比应为 1, 但是由于数值计算的误差和广角波束传播法所用的计算公式是近似公式, 所以在实际计算中得到的功率比都小于 1。在实际的计算中, 功率比越接近于 1, 说明用于计算的近似公式越精确, 通过功率比可以看出由哪种方法得到的计算公式更精确。

在编程计算的过程中还采用了透明边界条件<sup>[12]</sup>, 以保证场在边界上不存在反射。

模拟的结果如图 1、图 2 所示, 图中的曲线是模拟标量场 (TE 模) 所得的结果, 对于 TM 模, 也有相似的曲线和相同的结论。

图 1 表示在 z 方向的计算步长为 0.1 μm 时, 功率比与 z 方向传播距离的关系。由图 1 可以看出, z 方向的计算步长较小时, 由这 4 种方法所得的近似计算公式的精度相差不大, 计算结果的精度都随距离的增加而减小。但是, 相对而言, 由方法 2、3、4 得到的近似公式的精度都比传统广角波束传播法的近似计算公式 (也就是由方法 1 得到的计算公式) 的精度有所提高。

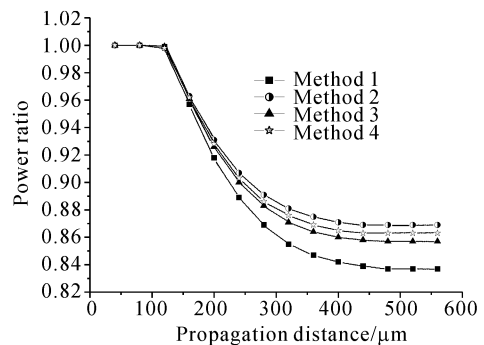


Fig. 1 Δz = 0.1 μm, power ratio vs propagation distance

图 2 表示在 z 方向的计算步长为 0.4 μm 时, 功

率比与  $z$  方向传播距离的关系。由图 2 可以看出, 当步长增大时, 传统广角波束传播法的近似计算公式会导致计算误差严重增大, 而由方法 2、3、4 的计算公式带来的计算误差变化比较小, 特别是由方法 2、4 所得的近似公式仍然保持了较高的准确性, 这说明由方法 2、4 所得的近似公式是比较精确的。

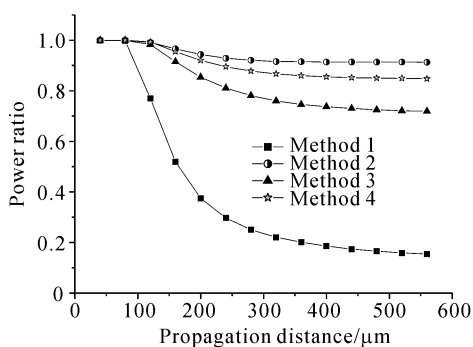


Fig. 2  $\Delta z=0.4 \mu\text{m}$ , power ratio vs propagation distance

由图 1 和图 2 对比可知, 要达到相同的精度, 传统广角波束传播法的计算步长需要选得非常小, 而本文中基于平方根算符改进的广角波束传播法即使计算步长选得较大, 也能达到相同的精度, 而计算步长的大小对应着计算时间的多少, 所以使用改进的近似计算公式在一定程度上可以节省模拟计算的时间(实际计算所需的时间是由计算机的计算速度、波导结构的复杂程度、算法的实现方法等因素决定的)。

由上面的数值结果可知, 在本文的 4 种探索方法中, 方法 2 的精度最高, 方法 4 的精度次之, 方法 3 的精度稍差, 原始方法的精度最差。其实仔细分析上述 4 种方法的近似处理过程可以发现, 方法 2 在推导近似公式时所用的展开方法都具有 2 阶的精度, 所以由方法 2 得到的计算公式的精度较高。方法 4 是对平方根算符进行直接展开, 所以由它得到的计算公式的精度也很高。而方法 1、3 在展开过程中使用了具有 1 阶精度的展开公式, 所以由方法 1、3 所得计算公式的精度比由方法 2、4 所得计算公式的精度要低。在对指数项  $\exp(i\lambda\Delta z)$  进行处理时, 方法 3 使用了 2 个一阶近似, 方法 1 使用了 1 个一阶近似, 所以由方法 3 所得公式的精度比由方法 1 所得公式的精度要高。这里的分析方法和展开方法可以推广到如何去获得 2 阶以上的广角波束传播法近似计算公式。

**结论** 本文从平方根算符出发, 重新推导广角波束

传播法计算公式, 发现传统广角波束传播法是从平方根算符得到的一个近似结果。为了获得精度更高的低阶近似计算公式, 本文对平方根算符进行了几种可能的展开处理, 获得了 3 种 2 阶的广角波束传播法近似计算公式, 这些公式比传统广角波束传播法的 2 阶近似计算公式具有更高的计算精度。本文中所用的处理方法可以推广到更高阶的广角波束传播法, 只是处理的过程更加复杂, 需要试验更多的展开方法, 才能获得一个较好的近似公式。

### 参 考 文 献

- 1 Yan Chaojun, Xu Zhengquan, Chen Yixin. Three dimension finite difference beam propagation method: allocation to Ti:LiNbO<sub>3</sub> directional coupler modeling. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1997, **17**(6):778~781 (in Chinese)
- 2 Huang W P, Liu C L. Simulation of three-dimensional optical waveguides by a full-vector beam propagation method. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1993, **29**(10):2639~2649
- 3 Chung Y, Dagli N. Assessment of finite difference beam propagation. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1990, **26**(8):1335~1339
- 4 Feit M D, Freck J A Jr. Light propagation in graded-index optical fibers. *Appl. Opt.*, 1979, **18**(16):2843~2851
- 5 Hermansson B, evick D. Propagating-beam method analysis of two-dimensional microlenses and three-dimensional taper structure. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1984, **1**(6):663~671
- 6 Hadley G R, Smith R E. Full-vector waveguide modeling using an iterative finite-difference method with transparent boundary conditions. *J. Lightwave Technol.*, 1995, **13**(3):465~469
- 7 Accornero R, Artiglia M, Coppa G *et al.*. Finite difference methods for the analysis of integrated optical waveguides. *Electron. Lett.*, 1990, **26**(23):1959~1960
- 8 Vincetti L, Cucinotta A, Selleri S. Three-dimensional finite-element beam propagation method: assessments and development. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 2000, **17**(6):1124~1131
- 9 Hadely G R. Wide-angle beam propagation using Padé approximant operators. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(20):1426~1428
- 10 Hadely G R. Multistep method for wide-angle beam propagation. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(24):1743~1745
- 11 Kawano K, Kitoh T. *Introduction to Optical Waveguide Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001. 204~213
- 12 Hadely G R. Transparent boundary condition for the beam propagation method. *J. Quant. Electron.*, 1992, **28**(1):363~370

## Two-Dimensional Wide-Angle Finite Difference Beam Propagation Method Based on the Square Root Operator

Chen Guang Ma Weidong Wang Wenmin Xu Yuanzhong Yang Tao  
(Accelink Technologies Co., Ltd., Wuhan Research Institute of Posts  
and Telecommunications, Wuhan 430074)  
(Received 16 September 2002)

**Abstract:** The finite difference beam propagation method (FD-BPM) is very powerful and has been widely used for optical waveguide design. The precision of the method is decided by the order of Padé approximation and the step of calculation, which means higher order and smaller step will introduce smaller error, but the calculation time will be longer. For the purpose to obtain higher precision and shorter calculation time, some trial methods are used, and some new second order formulas expanded from the square root operator for BPM are got, and the numerical simulations show that the coefficients of those new second order formulas are more precise than that of the conventional one. Furthermore, the analysis also indicates that those trial methods can be applied to the higher order formulas for the FD-BPM.

**Key words:** guided wave and fiber optics; numerical simulation; the finite difference beam propagation method (FD-BPM); square root operator; Padé approximation

\*\*\*\*\*

### 第 16 届全国激光学术会议在上海召开

由中国电子学会和中国光学学会联合主办、中国科学院上海光学精密机械研究所承办的第 16 届全国激光学术会议于 2003 年 10 月 19~22 日在上海举行。来自国内约 90 个从事激光科学和技术研究的研究所、大学和公司的 300 多名代表参加了会议。

大会组织安排了 11 个特邀报告：太赫兹科学技术的新进展(刘盛纲院士)、玻色-爱因斯坦凝聚研究及应用(王育竹院士)、量子通信保密系统(郭光灿教授)、超强激光及前沿应用(彭翰生研究员)、光电子技术与产业(刘颂豪院士)、激光定向能应用的物理与技术进展(苏毅研究员、杜祥琬院士)、快速发展的光纤激光器(王之江院士、楼祺洪研究员)、激光二极管抽运固体激光器新进展(周寿桓研究员)、激光全色显示(许祖彦院士)、深紫外非线性光学晶体和深紫外谐波光的产生(陈创天研究员)、固态照明技术与产业(陈良惠院士)。精彩的报告使得大会会场座无虚席,气氛热烈。

会议设有四个分会场,在为期两天的报告中,代表们分别就激光物理与激光器件、超短脉冲激光及非线性光学、激光应用、光束传输与控制、材料、薄膜及元器件等专题进行了交流和讨论。

全国激光学术会议是国内激光学术界的盛会,两年一次由中国电子学会和中国光学学会联合主办,轮流主持。此次会议参会人数众多,报告精彩,气氛热烈,取得了圆满的成功。本次会议为我国激光与光电子领域的新老学者提供了一个探讨新思路、交流新技术的平台,促进了学术领域的科技创新和科技成果的转化。

本次会议共录用论文 267 篇,将由《中国激光》以增刊形式出版。

(莎 燕)