

一种计算色度学三刺激值加权表的新方法*

李长军¹ 崔桂华² 赵达尊² M. Ronnier Luo³

1 中国科学院沈阳自动化研究所, 沈阳 110015
2 北京理工大学光电工程系颜色科学与工程国家重点实验室, 北京 100081
3 Colour & Imaging Institute, University of Derby, Derby DE22 3HL, UK

摘要: 三刺激值计算是求取各种色度量的基础。首先回顾了国际照明委员会三刺激值的基本定义及其数值计算方法;其次简单描述和分析了相关工业界常用的三种 ASTM 加权表及 Venable 最优加权表;最后,基于 Venable 的工作,从减小光谱反射比测量误差的影响出发,提出了一种在形式上不同于 Venable 的最优加权系数选择准则,给出了一种新的计算最优加权表的方法。该方法与现有的计算加权表方法相比,具有不需要通过迭代求解、易于程序设计从而比较简单且有可能作为标准方法予以推广应用等特点。数值仿真表明用此方法计算的加权表较 ASTM 三种加权表更准确。可以期望,给出的计算最优加权表的方法将会广泛应用于相关工业领域。

关键词: 色度学; 三刺激值计算; 加权表; 光谱反射比函数; 光谱功率分布

中图分类号: O432.3 文献标识码: A

1 引 言

国际照明委员会(CIE)的三刺激值是色度学的核心,它可以转换成工业实践中常用的各种色度学度量。根据国际照明委员会定义^[1],三刺激值由以下积分给出:

$$V = k \int_a^b E(\lambda) \bar{v}(\lambda) R(\lambda) d\lambda, \quad (1)$$

其中 $V = X, Y$ 或 Z ; $E(\lambda)$ 为光源的相对光谱功率分布; $\bar{v}(\lambda) = \bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda), \bar{z}(\lambda)$ 为 CIE1931(或 1964 补充)标准色度观察者光谱三刺激值; $R(\lambda)$ 为物体光谱反射比; (a, b) 为可见光谱范围, $a = 360 \text{ nm}, b = 830 \text{ nm}$; k 为比例因子,通常 $k = 100 \int_a^b E(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda$ 。

(1)式所涉及到的被积函数均无解析表达式,无法实际应用,因此国际照明委员会进一步推荐三刺激值的数值计算采用对波长间隔为 1 nm 的函数值的乘积进行求和^[2~4]:

$$V = k \sum_{\lambda=a}^b E(\lambda) \bar{v}(\lambda) R(\lambda) \Delta\lambda, \quad (2)$$

这里间隔 $\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$, $k = 100 / \sum_{\lambda=a}^b E(\lambda) \bar{y}(\lambda)$ 。

注意到计算公式(2),在光源相对光谱功率分布和标准色度观察者光谱三刺激值确定后,三刺激值 X, Y, Z 将随着物体光谱反射比函数 $R(\lambda)$ 的变化而变化。为了方便计算,人们常把不变量

$$W_V(\lambda) = kE(\lambda) \bar{v}(\lambda) \Delta\lambda, \quad (3)$$

$$\lambda = a, a + 1\Delta\lambda, \dots, b$$

先计算好,从而计算 X, Y, Z 就可方便地使用公式

$$V = \sum_{\lambda=a}^b W_V(\lambda) R(\lambda), \quad (4)$$

由(3)式计算出的量 $W_V(\lambda)$ 即 $W_X(\lambda), W_Y(\lambda), W_Z(\lambda)$ 称为加权系数,而那些由(3)式给出的加权系数的全体称为加权表。由于这些系数是在间隔为 1 nm 的波段上给出的,从而也常称为 1 nm 加权表。这样当 1 nm 间隔的加权表(3)式已知时,只需知道 1 nm 间隔的物体光谱反射比便可由(4)式计算出物体色的三刺激值 X, Y, Z 。鉴于实际应用中只能测得 10 nm 或 20 nm 间隔的 $R(\lambda)$ 值,国际照明委员会推荐采用三次多项式插值获得 1 nm 间隔的函数值 $R(\lambda)$ 。尽管如此,当前的工业应用实践中往往要求直接利用测得的物体光谱反射比

$$\tilde{R}_i = R(\lambda_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

及与之相对应的相同间隔的加权表

$$W_{X,i}, W_{Y,i}, W_{Z,i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

由下式直接计算物体色的三刺激值

* 国家自然科学基金(19871011)、中国科学院百人计划及教育部骨干教师基金资助课题。

E-mail: zhdz@bit.edu.cn

收稿日期:2002-08-02; 收到修改稿日期:2002-11-12

$$V = \sum_{i=0}^n W_{v,i} \tilde{R}_i, \quad (7)$$

这里 n 是一个正整数,

$$\lambda_i = a + i\Delta\lambda, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

及

$$\Delta\lambda = (b - a)/n, \quad (9)$$

通常 $\Delta\lambda = 10 \text{ nm}$ 或者 20 nm 。 $\Delta\lambda$ 间隔的加权表(6)式仅与 1 nm 间隔的加权表(3)式有关。因此在大量的工业应用中希望能提供相应(7)式中的 $\Delta\lambda$ 间隔的标准加权表(6)式。为了适应这种需要,并基于前人的工作^[5~8],美国测试与材料协会(ASTM)于1985年正式公布了美国测试与材料协会的 E308 标准加权表^[9],该表包含 9 种光源,分 10 nm 和 20 nm 两种间隔。

美国测试与材料协会的 E308 标准表的导出主要基于以下步骤:首先将测得间隔为 $\Delta\lambda$ 的物体光谱反射比 $\tilde{R}_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 使用三次多项式进行插值得 1 nm 间隔的物体光谱反射比函数 $R(\lambda) (\lambda = a, a+1\Delta\lambda, \dots, b)$;其次利用 1 nm 的加权表(3)式及插值得到的函数 $R(\lambda)$,由(4)式计算三刺激值 X, Y, Z ;最后,因 $R(\lambda) (\lambda = a, a+1\Delta\lambda, \dots, b)$ 依赖于 $\tilde{R}_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$,将(4)式重新按 \tilde{R}_i 项进行整理求和,则 \tilde{R}_i 前的系数将分别是所需的加权表(6)式。

考虑到测量带宽的影响,Venable^[10]提出了最优加权表的思想,并给出了计算方法^[11,12]。实践证明,他所提出的加权表的确提高了计算精度,但遗憾的是他采用迭代方法进行计算,因而在运用上受到限制。与此同时,Stearns 等考虑单独校正测量带宽的影响,而不是象 Venable 那样将这种影响的校正嵌入到加权表中。他们提出了著名的 Stearns & Stearns (SS)^[13]校正公式:

$$\begin{cases} R_0 = (1 + \alpha)\tilde{R}_0 - \alpha\tilde{R}_1, \\ R_i = -\alpha\tilde{R}_{i-1} + (1 + 2\alpha)\tilde{R}_i - \alpha\tilde{R}_{i+1}, \\ R_n = (1 + \alpha)\tilde{R}_n - \alpha\tilde{R}_{n-1}, \end{cases} \quad (10)$$

其中 α 为一实常量,Stearns 等^[13]最初建议 $\alpha = 0.1$,随后又建议 $\alpha = 0.09$,而 Venable^[10]则认为更为 $\alpha = 0.083$ 合理,因此目前采用 $\alpha = 0.083$ 。这样美国测试与材料协会的 E308 中的加权表应用和用 SS 校正公式(10)校正后的 $R(\lambda)$ 一起使用。

基于 Fairman^[11]的研究工作,美国测试与材料协会于 1995 年发布新的 E308 加权表^[14]。在新表中,对 20 nm 间隔的加权表不论是在什么光源下都应采用 Venable 方法进行计算;而对 10 nm 间隔的加权表,在连续光源下仍采用 Venable 方法,在荧光

光源下,则采用原 E308 表的计算方法,然后使用 SS 进行校正。新表称为美国测试与材料协会表 6 加权表。由于种种原因,原 E308-85 表仍保留,并称为美国测试与材料协会表 5 加权表。需要注意的是表 6 加权表应和测量的物体光谱反射比 \tilde{R}_i 一起使用,然而表 5 加权表应和采用 SS 校正公式(10)校正后的 R_i 一起使用。

美国测试与材料协会仅提供了几种标准光源下的标准加权表,但在实际工业应用中,往往光源不同于标准光源,因此工业应用要求可利用实际光源和国际照明委员会标准色度观察者的光谱三刺激值以及简单有效的计算方法计算出相应的加权表。为了适应这种需要,美国测试与材料协会于 2001 年的 E2022^[15]文件中给出了如何从实际光源(1 nm 间隔)及国际照明委员会标准色度观察者的光谱三刺激值计算出(类似于)美国测试与材料协会表 5 加权表的详细步骤,同时也给出了使用 SS 校正公式对表 5 加权表进行校正的校正加权表的计算步骤,供实际应用者使用。

从理论上讲,美国测试与材料协会表 5 加权表与 E2022 校正加权表具有相同的准确性。从 Fairman^[11]的研究结果可知它们的准确性都不如美国测试与材料协会表 6 加权表好。但由于表 6 加权表是以 Venable 最优加权表为主,而 Venable^[10]加权表是采用迭代方法计算,因此目前无法给出标准计算步骤。

综上所述,给出 Venable 最优加权表的简单计算方法具有重要实用与理论价值。这也是本文将要讨论的主题。

为了说明如何简单地计算 Venable 最优加权表,本文将在第二节简要论述大多数工业实际中是如何测量物体色的光谱反射比,这不仅为推导出简单计算方法做好了充分准备,也为在最后一节数值模拟提供了“理想测量仪器”。在第三节中将详细论述 Venable 最优加权表的思想,并最终给出简单计算方法。在最后一节中,将进行数值模拟计算,对本文所提出的计算方法计算出的加权表、美国测试与材料协会标准表 5、表 6 及 E2022 加权表进行了综合比较。结果表明新方法给出的加权表不论是对连续光源还是荧光光源,不论是对 10 nm 间隔还是对 20 nm 间隔都明显优于其它加权表。此外,新方法较任何其它计算加权表方法都有着计算简单、易于程序设计等优点。因此可以期望新的加权表计算方法将会广泛运用于工业应用实践。

2 物体光谱反射比的测量

由前所述,为了使用(3)式计算物体色的国际照明委员会三刺激值 X, Y, Z , 要知道在可见光谱范围内 1 nm 间隔的物体光谱反射比值 $R(\lambda)$ ($\lambda = a, a + 1\Delta\lambda, \dots, b$). 但在实际应用上, 这些 $R(\lambda)$ 值并不能直接获得. 目前测色的仪器有分光光度计和色度计等. 一般来说, 一个测光谱反射比的仪器, 在可见光谱范围内可测得一系列间隔为 10 nm 或 20 nm 的光谱反射比值 \tilde{R}_i . 这里的 \tilde{R}_i 仅涉及到一个很有限的光谱范围, 并且满足

$$\tilde{R}_i = \int_a^b P_i(\lambda) R(\lambda) d\lambda, \quad (11)$$

这里 $P_i(\lambda)$ 为测量仪器函数, 且满足

$$\int_a^b P_i(\lambda) d\lambda = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

目前, 对于大多数工业测量仪器, $P_i(\lambda)$ 具有三角形形状^[11,12] (如图 1 所示), 并关于 $\lambda = \lambda_i$ 对称, 考虑到 (12) 式后可写出

$$P_i(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda - \lambda_{i-1}}{(\Delta\lambda)^2}, & \lambda_{i-1} \leq \lambda \leq \lambda_i, \\ \frac{\lambda_{i+1} - \lambda}{(\Delta\lambda)^2}, & \lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{i+1}, \\ 0 & \lambda < \lambda_{i-1}, \quad \lambda > \lambda_{i+1}, \end{cases} \quad (13)$$

注意, 一般来说, 测得值 \tilde{R}_i 不同于 $R(\lambda_i)$, 除非光谱反射比函数在区间上是线性函数 $R(\lambda)$ 在区间 $[\lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}]$ 上是 λ 的线性函数.

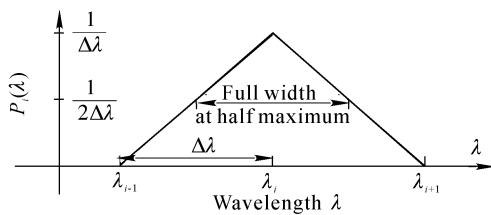


Fig. 1 Instrumental function $P_i(\lambda)$

事实上, 假定三个反射比函数 $R^{(k)}(\lambda)$ ($k = 0, 1, 2$) 由图 2 给出. $R^{(0)}(\lambda)$ 在区间 $[\lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}]$ 上是 λ 的线性函数, 而 $R^{(1)}(\lambda)$ 和 $R^{(2)}(\lambda)$ 则不然. 对应的测量值 $\tilde{R}_i^{(k)}$ 应满足

$$\tilde{R}_i^{(k)} = \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} P_i(\lambda) R^{(k)}(\lambda) d\lambda, \quad k = 0, 1, 2$$

图 3 给出了在区间 $[\lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}]$ 上的乘积函数 $P_i(\lambda)R^{(k)}(\lambda)$ ($k = 0, 1, 2$). 显然 $\tilde{R}_i^{(k)}$ 就是曲线 $P_i(\lambda)R^{(k)}(\lambda)$ 与横轴所围之面积, 由于 $R^{(0)}(\lambda)$ 是线

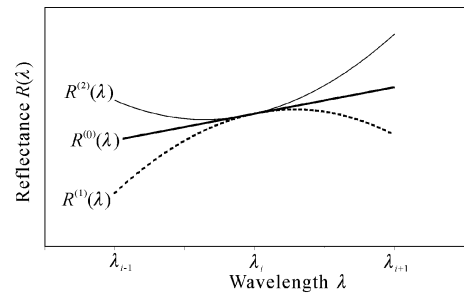


Fig. 2 Three reflectance curves between λ_{i-1} and λ_{i+1} . $R^{(0)}(\lambda)$, the thick full line, is a linear function of the wavelength in the interval, $R^{(1)}(\lambda)$ (the dot line), and $R^{(2)}(\lambda)$ (the fin full line) are not 性函数, 可以验证

$$\tilde{R}_i^{(0)} = \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} P_i(\lambda) R^{(0)}(\lambda) d\lambda = R^{(0)}(\lambda_i)$$

而由图 3 (或直接证明)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_i^{(1)} &< R^{(0)}(\lambda_i) = R^{(1)}(\lambda_i), \\ \tilde{R}_i^{(2)} &< R^{(0)}(\lambda_i) = R^{(2)}(\lambda_i), \end{aligned}$$

理论上讲, 测量误差 $\tilde{R}_i^{(k)} - R^{(k)}(\lambda_i)$ [对应图 3 中粗实线与横轴所围的面积与曲线 $P_i(\lambda)R^{(k)}(\lambda)$ ($k \neq 0$) 与横轴所围面积之差] 将随仪器测量带宽的变窄而减小, 但这又会引起新的问题, 即测量带宽的变窄会使探测元件所接受的光能量不足, 从而影响测量的准确性. 工业应用中常采用带宽为 10 nm 或 20 nm , 对 \tilde{R}_i 采用 SS 校正可尽量减小测量带宽对 $R(\lambda_i)$ 的影响, 本文则着重从计算最优加权表的角度来减小测量数据 \tilde{R}_i 的不准确性对计算三刺激值的影响.

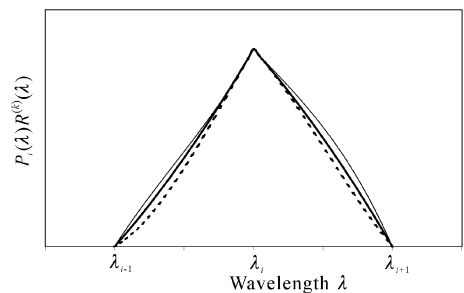


Fig. 3 The curves of the instrumental function $P_i(\lambda)$ times the three-reflectance curves respectively given in Fig. 2 between λ_{i-1} and λ_{i+1} . $P_i(\lambda)R^{(0)}(\lambda)$ is the thick full line, $P_i(\lambda)R^{(1)}(\lambda)$ the dot line, and $P_i(\lambda)R^{(2)}(\lambda)$ the thin full line

3 最优加权表及其计算方法

首先由三刺激值 X, Y, Z 的定义(1), 它们可以写成统一形式

$$V = \int_a^b W_V(\lambda) R(\lambda) d\lambda, \quad (14)$$

其中 $V = X, Y$ 或 Z , 相应的权函数 $W_V(\lambda)$ 为

$$W_V(\lambda) = kE(\lambda) \bar{v}(\lambda), \quad (15)$$

其中 $\bar{v}(\lambda) = \bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda)$ 或 $\bar{z}(\lambda)$ 。其次, 若对直接测量的 \tilde{R}_i 应用(7) 式计算三刺激值 X, Y, Z , 有

$$V' = \sum_{i=0}^n W_{V,i} \tilde{R}_i, \quad (16)$$

这里 $W_{V,i}$ 是相应的加权系数。 V' 是 V 的近似, 并且

$$V' - V = \sum_{i=0}^n W_{V,i} \tilde{R}_i - \int_a^b W_V(\lambda) R(\lambda) d\lambda = \int_a^b D_V(\lambda) R(\lambda) d\lambda, \quad (17)$$

其中 $D_V(\lambda) = \sum_{i=0}^n W_{V,i} P_i(\lambda) - W_V(\lambda), \quad (18)$

显然应选择加权系数 $W_{V,i}$ 使误差 $V' - V$ 尽可能地小。理想情况下, 是选择 $W_{V,i}$ 使得用(18) 式定义的函数 $D_V(\lambda) \equiv 0$ 。然而, 靠选取 $n + 1$ 个加权系数 $W_{V,i}$ 使 $D_V(\lambda)$ 在 (a, b) 恒等于零, 几乎是不可能的。但注意到

$$(V' - V)^2 = \left[\int_a^b D_V(\lambda) R(\lambda) d\lambda \right]^2 \leq \int_a^b D_V^2(\lambda) d\lambda \int_a^b R^2(\lambda) d\lambda, \quad (19)$$

又因为 $R^2(\lambda) \leq 1$, 故

$$(V' - V)^2 \leq (b - a) \int_a^b D_V^2(\lambda) d\lambda, \quad (20)$$

据此, 我们定义: 使 $\int_a^b D_V^2(\lambda) d\lambda$ 达到极小的加权系数

$W_{V,i} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 称为最优加权系数。

令

$$F = F(W_{V,0}, W_{V,1}, \dots, W_{V,n}) = \int_a^b D_V^2(\lambda) d\lambda, \quad (21)$$

则最优加权系数将是函数 F 的极小点。由微积分原理知, 最优加权系数应满足

$$\frac{\partial F}{\partial W_{V,i}} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

又因为

$$\frac{\partial F}{\partial W_{V,i}} = 2 \left[\sum_{j=0}^n W_{V,j} \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} P_i(\lambda) P_j(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} W_V(\lambda) P_i(\lambda) d\lambda \right],$$

所以由(22) 式, 最优加权系数 $W_{V,j}$ 应满足方程组

$$\sum_{j=0}^n a_{i,j} W_{V,j} = b_i(V), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} a_{i,j} = 6\Delta\lambda \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} P_i(\lambda) P_j(\lambda) d\lambda, \\ b_i(V) = 6\Delta\lambda \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} W_V(\lambda) P_i(\lambda) d\lambda, \end{cases} \quad (24)$$

注意到仪器函数 $P_i(\lambda)$ 表达式(13), 可以验证

$$\begin{cases} a_{i,j} = 0, & \text{若 } |i - j| \geq 2 \\ a_{j,j-1} = a_{j-1,j} = 1, & a_{j,j} = 4, \end{cases} \quad (25)$$

及

$$\sum_{i=0}^n b_i(V) = 6\Delta\lambda \int_a^b W_V(\lambda) \sum_{i=1}^n P_i(\lambda) d\lambda = 6 \int_a^b W_V(\lambda) d\lambda,$$

另一方面, 由(24)式

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n b_i(V) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{i,j} W_{V,j} = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^n a_{i,j} \right) W_{V,j} = \\ &= (a_{0,0} + a_{1,0}) W_{V,0} + \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j-1,j} + a_{j,j} + a_{j+1,j}) W_{V,j} + (a_{n-1,n} + a_{n,n}) W_{V,n}, \end{aligned} \quad (26)$$

一般来说, 加权系数 $W_{V,j}$ 应满足

$$\sum_{j=0}^n W_{V,j} = \int_a^b W_V(\lambda) d\lambda, \quad (27)$$

为使(27) 式得到满足, 从(26) 式及(25) 式, 则应对

方程组(23) 的系数 $a_{0,0}$ 及 $a_{n,n}$ 作如下调整:

$$a_{0,0} = 5, \quad a_{n,n} = 5. \quad (28)$$

综上, 最优加权系数 $W_{V,j}$ 满足方程组

$$A\mathbf{w}(V) = \mathbf{b}(V), \quad (V = X, Y, Z) \quad (29)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 5 & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(V) = \begin{bmatrix} W_{V,0} \\ W_{V,1} \\ \dots \\ W_{V,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(V) = \begin{bmatrix} b_0(V) \\ b_1(V) \\ \dots \\ b_n(V) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

由于系数矩阵 \mathbf{A} 是对称正定的,因此方程组(29)总是有唯一解。

需要说明的是为计算最优加权表,需要计算三次右端向量 $\mathbf{b}(V)$ ($V=X, Y, Z$),求解三次有相同系数矩阵的方程组。而 $\mathbf{b}(V)$ 的分量由(24)式的积分给出。为与国际照明委员会推荐一致,积分可用对间隔为 1 nm 的被积函数值进行求和替换。因此我们有如下计算最优加权表算法:

步骤 1

1) 计算

$$b_i(X) = 6\Delta\lambda \sum_{\lambda=\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} kE(\lambda) \bar{x}(\lambda) P_i(\lambda),$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

2) 求解方程组: $\mathbf{A}\mathbf{w}(X) = \mathbf{b}(X)$, 得加权系数:

$$W_{X,0}, W_{X,1}, \dots, W_{X,n}.$$

步骤 2

1) 计算

$$b_i(Y) = 6\Delta\lambda \sum_{\lambda=\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} kE(\lambda) \bar{y}(\lambda) P_i(\lambda),$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

2) 求解方程组: $\mathbf{A}\mathbf{w}(Y) = \mathbf{b}(Y)$, 得加权系数:

$$W_{Y,0}, W_{Y,1}, \dots, W_{Y,n}.$$

步骤 3

1) 计算

$$b_i(Z) = 6\Delta\lambda \sum_{\lambda=\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} kE(\lambda) \bar{z}(\lambda) P_i(\lambda),$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

2) 求解方程组: $\mathbf{A}\mathbf{w}(Z) = \mathbf{b}(Z)$, 得加权系数:

$$W_{Z,0}, W_{Z,1}, \dots, W_{Z,n}.$$

说明:

1) 因为 $\lambda_0 = a, \lambda_n = b, \lambda_i = \lambda_0 + i\Delta\lambda, \Delta\lambda = (b-a)/n$, 所以当计算 $b_0(V)$ 和 $b_n(V)$ 时将用到 λ_{-1} 和 λ_{n+1} 。它们都超出了定义范围 (a, b) 。当波长超出范围时相应的函数值为零。因此

$$b_0(X) = 6\Delta\lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} kE(\lambda) \bar{x}(\lambda) P_0(\lambda) d\lambda,$$

$$b_n(X) = 6\Delta\lambda \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} kE(\lambda) \bar{x}(\lambda) P_n(\lambda) d\lambda,$$

类似地处理 $b_0(Y), b_n(Y), b_0(Z), b_n(Z)$ 。

2) 上述算法 1) 中的求和步长为 1 nm。如

$$b_1(X) = 6\Delta\lambda [kE(\lambda_0) \bar{x}(\lambda_0) P_1(\lambda_0) + kE(\lambda_0 + 1) \bar{x}(\lambda_0 + 1) P_1(\lambda_0 + 1) + kE(\lambda_0 + 2) \bar{x}(\lambda_0 + 2) P_1(\lambda_0 + 2) + \dots + kE(\lambda_2) \bar{x}(\lambda_2) P_1(\lambda_2)],$$

3) 上述方法是基于 Venable^[10] 最优加权表的工作导出的,但计算方法上有本质不同。第一, Venable 是选择权函数 $t_i(\lambda)$ 使得最优加权系数 $W_{V,j}$ 满足

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_{i+1}} D_V(\lambda) t_i(\lambda) d\lambda = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (31)$$

其中 $t_i(\lambda)$ 是从 λ_{i-1} 时等于零,线性地增加到 $\lambda = \lambda_i$ 时等于 1,然后线性递减,并当 $\lambda = \lambda_{i+1}$ 时取值为 0。理论上讲,方程组(31)和(23)等价,但他并没有发现系数 $a_{i,j}$ 具有性质(25);第二, Venable 采用迭代方法求解(31);第三,方程组(31)的解不具有性质(27)。正是由于以上原因,特别是迭代求解限制了 Venable 方法的应用,难于成为标准方法。相比之下,本文给出的方法简单、适用。更重要的是下一节的数值模拟将表明,采用本文方法计算出的加权表能获得更准确的三刺激值。可以期望本文所给的方法将会得到广泛的工业应用。

4) $b-a, \Delta\lambda, n$ 应满足: $b-a = \Delta\lambda \cdot n$, 若 $\Delta\lambda$ 不能整除 $b-a$, 则在 (a, b) 范围内不能建立 $\Delta\lambda$ 间隔的加权表。美国测试与材料协会的 E2022 文件对此没有进行说明。然而美国测试与材料协会所提供的表 5 和表 6 都在 360 nm 到 780 nm 范围内给出的。这样还涉及如何处理 1 nm 加权表在 360 nm 到 780 nm 以外的信息。考虑到 $\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda), \bar{z}(\lambda)$ 在该范围之外几乎为零,而且产生的 1 nm 加权表在此范围之外也是如此,因此可以直接略去。本文在下节计算最优加权表时采用的就是这种方式。但在工业应用中往往采用 400 nm 到 700 nm 的加权表,这就涉及对 1 nm 加权表在 400 nm 到 700 nm 以外的信息如何

处理的问题,目前尚无统一标准。究竟如何处理更合适、误差会有多大等问题正在研究当中,结果将另文报道。

5) 上述算法中需要求解三次以对称正定三对角矩阵 A (30 式) 为系数矩阵的方程组。由于 A 的稀疏性,不宜先求逆 A^{-1} ,然后再作乘法 $A^{-1}b$ 。考虑到 A 的特殊性,可利用直接方法进行准确求解。最简单的方法是先对 A 进行 Cholesky^[16] 分解:

$$A = L^T, \quad (32)$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & & & & \\ c_2 & a_2 & 0 & & & \\ 0 & c_3 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} & 0 & \\ & & & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix},$$

$$a_1 = \sqrt{5}, \quad c_i = \frac{1}{a_{i-1}}, \quad a_i = \sqrt{4 - c_i^2},$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$c_n = \frac{1}{a_{n-1}}, \quad a_n = \sqrt{5 - c_n^2},$$

当完成上述分解(32)后,求解方程组 $aw = b$ 就变成求解

$$Ly = b, \quad L^T w = y,$$

这样有

$$y_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad y_i = \frac{b_i - c_i y_{i-1}}{a_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$w_n = \frac{y_n}{a_n}, \quad w_i = \frac{y_i - c_{i+1} w_{i+1}}{a_i}.$$

$$i = n-1, n-2, \dots, 1$$

4 数值仿真比较

本节将对美国测试与材料协会加权表:表 5 (T5)、表 6(T6)及 E2022 和用本文方法计算的最优加权表(Optimum T)进行数值仿真比较。

4.1 实验仿真准备

首先将已经测得的间隔为 10 nm 的 1560 个孟塞尔颜色样本的光谱反射比进行三次多项式插值,得到 1560 个间隔为 1 nm 的光谱反射比。由于测得的光谱反射比是在 400 nm 到 700 nm 范围内,所以插值得到的光谱反射比也在该范围内。然而,规定的标准色度观察者的光谱三刺激值及一些典型的光源是在 360 nm 到 830 nm 之间,因此,应将插值得到的光谱反射比进行延拓,延拓的办法是按国际照明委员会推荐,所有小于 400 nm 波长上的光谱反

射比都等于 400 nm 波长上的光谱反射比,而所有大于 700 nm 波长上的光谱反射比都等于 700 nm 上的光谱反射比。

这样我们定义这组 (1560 个) 间隔为 1 nm, 在 360 nm 到 830 nm 范围内的光谱反射比为一些(虚拟)物体色的标准光谱反射比。

有了标准的 1 nm 的物体色的光谱反射比值,则可以用第二节描述的理想测色仪器来测得间隔为 10 nm 和 20 nm 的物体色的光谱反射比值。使用间隔为 1 nm 的标准色度观察者的光谱三刺激值及间隔为 1 nm 的光源光谱相对功率分布函数,便可得到间隔为 1 nm 的标准加权表。使用 1 nm 的加权表及 1 nm 的物体色的光谱反射比,便可得到标准的国际照明委员会三刺激值 $(XYZ)_1$ 。

若用相应的 10 nm (或 20 nm) 的加权表及 10 nm (或 20 nm) 的物体色光谱反射比,便可计算出三刺激值 $(XYZ)_{10}$ [或 $(XYZ)_{20}$]。 $(XYZ)_{10}$ 或 $(XYZ)_{20}$ 都是 $(XYZ)_1$ 的近似。 $(XYZ)_{10}$ 与 $(XYZ)_1$ 及 $(XYZ)_{20}$ 与 $(XYZ)_1$ 的色差 ΔE_{10} 和 ΔE_{20} 可用来衡量所使用的 10 nm 加权表及 20 nm 加权表的好与坏。色差 ΔE_{10} 和 ΔE_{20} 越小,则说明相应的加权表越好。

本文使用 6 种光源: D65, D50, A, F2, F7, F11; 两种国际照明委员会标准色度观察者光谱三刺激值 (1931 和 1964) 及国际照明委员会 LAB 色差公式。

4.2 数值仿真结果

由于我们使用 1560 个“标准”物体色的光谱反射比和 6 种光源以及两种国际照明委员会标准观察者光谱三刺激值,所以对于每个 10 nm 间隔的加权表或 20 nm 间隔的加权表,都需要计算 $6 \times 2 \times 1560 = 18720$ 个色差。根据这 18720 个色差,使用四个统计量来比较哪一类加权表给出较准确的结果。它们分别是:最大色差 ΔE_{\max} , 算术平均色差 ΔE_{ave} , 中值色差 ΔE_{median} 和 80% 色差 $\Delta E_{0.8}$ 。中值色差 ΔE_{median} 表示有一半的色差值大于它,另有一半的色差值小于它。而 $\Delta E_{0.8}$ 则表示有 80% 的色差值小于它,而 20% 的色差值大于它。一般来说可以期望 ΔE_{median} 反映了使用相关加权表可能带来的误差。所有统计结果分别列于表 1 和表 2。表中的数字是相应的色差值,而数字后面括号里的数字是相应色差值与由本文给出的最优加权表对应的色差值之比。如美国测试与材料协会表 5 的 $\Delta E_{\max} = 0.2939$ (表 1 的第 2 行第 2 列),而由本文给出的最优加权表所对应的 $\Delta E_{\max} = 0.0449$ (表 1 中的第 5 行第 2 列),则它们的

比值为 $0.2939/0.0449=6.5$, 这一数字说明由美国测试与材料协会表 5 计算的三刺激值可能带来的最大误差是由本文最优加权表计算的三刺激值可能带来的最大误差的 6.5 倍。表 1 是有关 10 nm 间隔加

权表的比较, 而表 2 是有关 20 nm 间隔加权表的比较。从表 1 可以看出, 由本文给出的加权表从任何角度评价都是最好的。使用该加权表可能带来的平均误差为 0.0017 个 CIELAB 色差单位。

Table 1 The performance of 4 weighting tables with 10 nm intervals

Weighting tables	ΔE_{\max}	ΔE_{ave}	ΔE_{median}	$\Delta E_{0.8}$	Mean ratio
ASTM T5	0.2939(6.5)	0.0154(4.6)	0.0079(4.6)	0.0186(4.2)	(4.9)
ASTM T6	0.3223(7.2)	0.0173(5.2)	0.0055(3.2)	0.0263(5.9)	(5.4)
ASTM E2022	0.2873(6.4)	0.0142(4.2)	0.0069(4.0)	0.0168(3.8)	(4.6)
Optimum T	0.0449(1.0)	0.0034(1.0)	0.0017(1.0)	0.0045(1.0)	(1.0)

Note: The data in parentheses are ratios and others are in CIELAB units

Table 2 The performance of 4 weighting tables with 20 nm intervals

Weighting tables	ΔE_{\max}	ΔE_{ave}	ΔE_{median}	$\Delta E_{0.8}$	Mean ratio
ASTM T5	2.5816(1.8)	0.1482(2.4)	0.0933(5.2)	0.1840(2.6)	(3.0)
ASTM T6	1.3178(0.9)	0.0783(1.3)	0.0211(1.2)	0.1066(1.5)	(1.2)
ASTM E2022	2.5860(1.9)	0.1479(2.4)	0.0932(5.2)	0.1835(2.6)	(3.0)
Optimum T	1.3979(1.0)	0.0613(1.0)	0.0178(1.0)	0.0706(1.0)	(1.0)

Note: The data in parentheses are ratios and others are in CIELAB units

从表 2 可以看出, 使用 ΔE_{ave} , ΔE_{median} 和 $\Delta E_{0.8}$ 进行评估的话, 本文给出的加权表仍然最好, 但若按 ΔE_{\max} 进行评估的话, 美国测试与材料协会的 T6 为最好, 本文给出的加权表次之。使用本文给出的加权表可能带来的平均误差为 0.0178 个 CIELAB 色差单位。

从两表综合来看, 本文所给出的方法为最好。若取各加权表的四个度量的比值(括号内的数值)的平均值(最后一列)作为评价准则的话, 就 10 nm 间隔的加权表而言, 本文的加权表要分别比美国测试与材料协会表 5、表 6 和 E2022 表要好 3.9, 4.4 和 3.6 倍; 而就 20 nm 间隔的加权表, 本文所给出的加权表要分别比美国测试与材料协会表 5、表 6 和 E2022 表要好 2.0, 0.2 和 2.0 倍; 而美国测试与材料协会表 5 与 E2022 表的表现比较一致, 10 nm 间隔时稍优于美国测试与材料协会表 6, 而 20 nm 间隔时则误差远大于美国测试与材料协会表 6, 这与 Fairman 等的研究结果一致。另外还可以看出, 无论用四个加权表中的哪一个, 使用 20 nm 间隔的加权表比用 10 nm 间隔的加权表带来的误差要大。一般来说误差会大近 10 倍或更多。

结束语 尽管美国测试与材料协会给出了几种标准的计算三刺激值的加权表供工业界运用, 但这些标准表都基于一些典型的光源。从本文的数值仿真表明,

采用由本文方法计算出的加权表来计算三刺激值将会与国际照明委员会定义的标准有更好的一致性。

此外, 在工业实践中所采用的光源与标准光源有所不同或是非标准光源, 这样用户需要使用自己的数据(相对光谱功率分布)来计算出相应的加权表。目前只有美国测试与材料协会的 E2022 文件^[15]中给出了一种计算美国测试与材料协会表 5 加权表及对美国测试与材料协会表 5 加权表进行 SS 校正的加权表的详细计算步骤。但本文所给出的计算加权表方法更简单且易于程序设计, 尤其重要的是更准确。

不管是使用标准光源还是非标准光源, 采用由本文方法计算的加权表来计算三刺激值会更好些, 与国际照明委员会的三刺激值的定义有更好的一致性。可以期望本文所给出的计算方法将会得到广泛的应用。

参 考 文 献

- 1 CIE. Colorimetry. CIE Publ. No. 15(E-1.3.1). Paris: Bureau Central da la CIE; 1970
- 2 Billmeyer F W, Jr., Fairman H S. CIE Methods for calculating tristimulus values. *Color Res. & Appl.*, 1987, **12**(1):27~36
- 3 CIE. Colorimetry. CIE Publ. No. 15.2. Vienna: Central Bureau of the CIE; 1986
- 4 CIE. CIE standard on colorimetry. CIE Publ. No 68. Paris: Bureau Central da la CIE; 1986

- 5 Foster W H, Jr., Gans R, Sterns E I *et al.*. Weights for calculation of tristimulus values from sixteen reflectances. *Color Engng.*, 1970, **37**(1):35~47
- 6 Stearns E I. Weights for calculation of tristimulus values. *Chemson Review of Industrial Management & Textile Science*, 1975, **14**(1):79~113
- 7 Stearns E I. The determination of weights for use in calculating tristimulus values. *Color Res. Appl.*, 1981, **6**(3):210~212
- 8 Stearns E I, Stearns R E. Calculations of tristimulus weights by integration. *Color Res. Appl.*, 1981, **6**(3):207
- 9 ASTM. *Standard Method for Computing the Colors of Objects by Using the CIE System*. ASTM E308-85, Philadelphia; American Society for Testing and Materials; 1985
- 10 Venable W H. Accurate tristimulus values from spectral data. *Color Res. & Appl.*, 1989, **14**(5):260~267
- 11 Fairman H S. Results of the ASTM field test of tristimulus weighting functions. *Color Res. & Appl.*, 1995, **20**(1):44~49
- 12 Hunt R W G. *Measuring Colour*. 3rd ed. England: Fountain Press, 1998
- 13 Stearns E I, Stearns R E. An example of a method for correcting radiance data for bandpass error. *Color Res. & Appl.*, 1988, **13**(4):257~259
- 14 ASTM. *Standard Practice for Computing the Colors of Objects by Using the CIE System*. ASTM E308-95. Philadelphia; American Society for Testing and Materials; 1995
- 15 ASTM. Standard practice for calculation of weighting factors for tristimulus integration, In: *Annual Book of ASTM Standards*. ASTM E2022-99, 2001. Section Six, Volume 06.01:985~994
- 16 Golub G H, Van Loan C F. *Matrix Computation*. England: North Oxford Academic; 1986

A Simple Method for Computing Optimum Weighting Table for Colorimetric Tristimulus Integration

Li Changjun¹ Cui Guihua² Zhao Dazun² Luo M R³

$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ Shenyang Institute of Automation, The Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110015} \\ 2 \text{ National Key Laboratory of Colour Science and Engineering, Department of Photoelectronic} \\ \text{Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081} \\ 3 \text{ Colour \& Imaging Institute, University of Derby, Derby DE22 3HL, UK} \end{array} \right\}$

(Received 2 August 2002; revised 12 November 2002)

Abstract: The computation of tristimulus values is a basic step for obtaining various colourimetric quantities. Firstly, the definition of CIE tristimulus values and their numerical computation methods are reviewed. Secondly, three types of ASTM weighting tables used in industrial applications and Venable optimum weighting tables are briefly described and discussed. Finally, based on the work of Venable, a criterion different from that of Venable's in form for determining the optimum weighting factors to minimize the influence of errors in measurement of spectral reflectance is proposed, and a new and simple method for computing the optimum weighting table is given. The new method is simpler and easier to program and thus is possible to be used as a standard method, as compared with other existing weighting tables. Numerical simulation results show that the tristimulus values computed by using the method proposed are closest to the CIE definition compared with those computed by using the three types of ASTM weighting tables. Therefore, it is expected that the new method for computing weighting tables will find wide industrial applications.

Key words: colorimetry; computation of tristimulus values; weighting table; spectral reflectance function; spectral power distribution