

高斯场下形体影响因子的动态特征 以及微扰方程的修正

王亚伟 吴大建

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

摘要: 为解决微粒形体变化对微粒测量结果的影响,在半椭圆模型理论模型的基础上,对高斯分布散射场下任意形体微粒散射的影响因子进行了讨论。建立了影响因子与形体特征参量和微粒粒度之间的数学关系,并求得了其影响因子数值解的分布。基于对影响因子数值解分布动态特征的讨论,拟合得到了高斯分布散射场下任意形体微粒影响因子函数解的解析式,由此提出了对任意形体微粒特征分布概率函数微扰方程的修正。研究表明,该方法对于大粒度微粒形体变化对测量结果影响的修正效果尤佳。

关键词: 光学测量; 微粒形体; 数学修正; 光散射

中图分类号: O436.2 文献标识码: A

1 引 言

微粒粒度分布的测量是一个既古老又充满新意的科学研究课题,在国防、材料工程、环境工程、生命科学、医学诊断、信息技术产业、流体工程等领域有着极其重要的应用。将微粒看成球体是一种基本的测量模型,但是,在真实测量的场合,被测微粒往往不是理想的球体,研究表明^[1,2]:以球体为模型的反演结果因形体的影响与实际测量结果存在着较大的差异。为此,许多专家对各种形体模型的散射特性^[3~6]和数学处理方法^[7,8]展开了研究,亦已取得了一定的进展。其中微粒的光散射特征的微扰处理方法对提高测量结果的准确度取得了一定的效果^[3],该方法即是对任意形体的三维粒子引入等相位二维散射截面的概念,认为此具有任意形体的二维图像可以看成是由两个不同形体特征参量 η 的半椭圆组成,用形体概率分布函数 $P^\eta(\eta)$ 标志由任意形体粒子组成的粒子群的形体概率分布特征。以几何等效面积圆的半径 a 表示该粒子的粒子尺度(简称粒度),用球形粒度概率分布函数 $P^s(a)$ 标志该粒子群的粒度概率分布特征。用全概率分布函数 $P(a, \eta)$ 表示粒子群的尺度和形体的三维分布特征,基于粒子群散射能量谱积分反演的方法,建立其 $P(a, \eta)$ 的数学反演方程取代了原测量方法所依赖的球体

反演方程。该方法不仅有效地提出了解决微粒形体差异对微粒分布测量影响的处理方法,而且完善了颗粒物理特征分布的表述方法(即微粒的特征必须有粒度和形体这两个特征参量表示)。尽管如此,该方法中所表述的形体扰动因子函数的数学表示形式未能给出,在微扰方程的推导过程中认为形体分布的影响与微粒粒度的分布无关,修正效果未能从理论上进行讨论。对此,本文从理论上对高斯分布散射场下任意形体微粒散射的微扰影响因子的动态分布特征进行了详细讨论,通过对其影响因子数值解动态特征分布的研究结果进行拟合,建立了影响因子与其微粒形体特征参量和微粒粒度参量之间的数学关系式(解析式)。基于影响因子的解析解对任意形体微粒特征分布微扰方程进行修正,从而从理论上完善了微扰处理方法,为微粒特征分布测量技术的研究奠定了较好的研究基础。

2 半椭圆模型的微粒概率表述方法及其形体影响因子

对于任意形体的三维粒子从其散射效果来看均可以视为由一个等相位面(Equal phase section)所产生的散射。不同形体、不同取向、不同大小,对应有不同形体的等相位面,同时也产生了不同的散射结果,也即存在着不确定性。但是,对于大量粒子组成的系统存在着统计确定性。因此,可以将此面作为粒子形体的标志面,对任意形体的等相位面取

E-mail: zjwyw@public.zj.js.cn

收稿日期:2002-07-24; 收到修改稿日期:2002-10-08

其等效面积圆半径 a 作为粒子大小的量度(简称为粒度)。粒度为 a 的粒子数对所有粒数的比例表示了它的占有几率,并用 $P^s(a)$ 表示,称为该粒子群的粒度概率分布函数。用 η 表示微粒形体的特征参量($\eta=b/c$, b, c 分别为椭圆的长短轴,简称形体),对 N 个微粒组成的系统,设 η 具有不同值的个数为 M ,则称系统有 M 个形体态,显然有 $M \leq 2N$ 。形体参量为 η 的状态数 n 与 M 的比值表示了该形体对全形体态的占有几率,用 $P(\eta)$ 表示,称为形体概率分布函数。我们可以定义微粒群中出现粒度为 a ,形体参量为 η 的微粒特征概率分布函数为 $P(a, \eta)$, $P(a, \eta)$ 是 $P^s(a)$ 与 $P(\eta)$ 的联合概率有 $P(a, \eta) = P^s(a)P(\eta)$ 。根据任意形体微粒特征分布微扰处理方法的研究结果^[9] 有下诸式。

对于光电传感器输出的电压响应有

$$V = HI, \quad (1)$$

其中 H 为光电响应转换系数, I 为微粒光散射强度, V 为电压响应。

则对于整个微粒群其总电压响应为

$$V^0 = N \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV, \quad (2)$$

其中 $P(V)$ 为微粒群电压响应概率分布函数。

将微粒形体影响看成微扰动,则有

$$T(a, \eta) = \left[\int_0^{bb\sqrt{1-y^2/c^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right) dx dy - \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right) dx dy \right], \quad (8)$$

其中 R 为高斯光敏区半径, K 为常量因子项,可以求得形体影响因子分布函数为

$$T(a, \eta) = -\frac{1}{4a^2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k \eta^k a^{2k}}{R^{2k}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, 2+k, -\frac{a^2}{\eta R^2}\right) \frac{\Gamma(1/2+k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(2+k)} \right] - T'(a, 1), \quad (9)$$

其中 $T'(a, 1)$ 是(9)式中首项 $\eta = 1$ 形式的简记符。数值解结果表明 T 函数在通常情况是 η 的线性响应,从而可以表示为

$$T = k_2 \eta - k_2, \quad (10)$$

其中 $\eta \geq 1$, k_2 为 T 函数分布曲线的斜率表示了因形体变化对散射产生影响的变化速率。代入上各式得其微扰方程为

$$P(V) = P^s(V) + (\eta - 1)P(\eta). \quad (11)$$

3 微粒粒度对形体影响因子的动态影响

从上述(11)式可以看出微扰方程的修正项仅仅是与微粒形体有关,而与微粒粒度无关。这主要是

$$I(a, \eta) = I(a) + I'(\eta), \quad (3)$$

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} n(a, \eta) [I(a) + I'(\eta)] da d\eta. \quad (4)$$

因为

$$P(a, \eta) = \frac{n(a, \eta)}{NM}, \quad P^s(a) = \frac{n(a)}{N}, \quad P(\eta) = \frac{n(\eta)}{M},$$

由(4)式解得

$$P(V) = P^s(V) + HI'(\eta)P(\eta) \frac{d\eta}{dV}. \quad (5)$$

令

$$L(\eta) = \left[\frac{d \ln I(\eta)}{d\eta} \right]^{-1}, \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式得

$$P(V) = P^s(V) + L(\eta)P(\eta). \quad (7)$$

上述各式中, $I(a)$ 为粒度为 a 的球体散射光强, $I'(\eta)$ 为微粒形体参量为 η 时对球体散射光强的修正量(即为微扰量), $n(a)$ 为粒度为 a 时的微粒数, $n(\eta)$ 为微粒形体参量为 η 时的状态数, $n(a, \eta)$ 为粒度为 a 形体参量为 η 时的状态数。在半椭圆模型和高斯散射场的假设下, $I'(\eta)$ 推导如下^[10]:

$$\eta = b/c, \quad \pi a^2 = \pi bc, \quad I'(\eta) = kT,$$

式中 K 为转换系数, T 为影响因子。

依据(9)式,当粒度 a 为常量时, T 的分布曲线为直线,其斜率为 k_2 , 所以有(10)式成立。

本文对此开展进一步的研究,发现 T 对微粒形体参量 η 的响应虽然呈直线,但是其斜率与微粒粒度有关,微粒粒度 a 愈大其斜率变化愈大,不呈线性关系。图1为微粒粒度 $a = 10$ 时的 T 与 η 的响应分布为线性,图2为微粒形体参量 $\eta = 1.5$ 时 T 与 a 的响应分布为曲线。

从上两图可以看出: T 分别是 η 和 a 的线性和非线性响应。图3与图4分别是 T 与 a 和 η 的一组动态响应曲线。

从图3与图4可以分别看出:微粒形体影响因子 T 与微粒形体参量 η 的响应与微粒粒度 a 有关,粒度

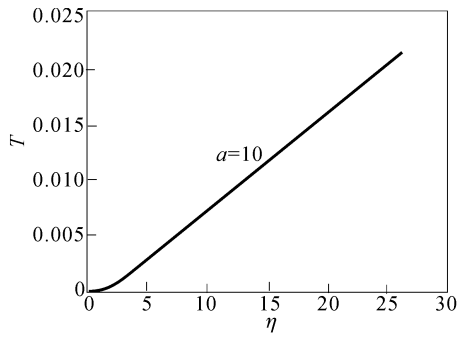


Fig. 1 The influence factor T vs. η

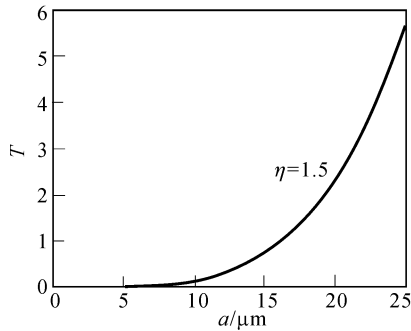


Fig. 2 The influence factor T vs. a

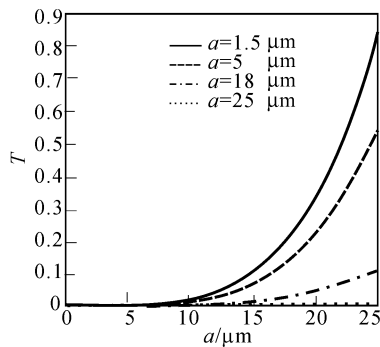


Fig. 3 The influence factor T vs. η under different a

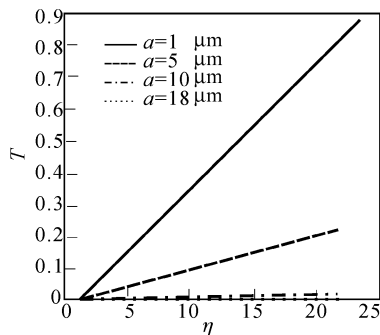


Fig. 4 The influence factor T vs. a under different η

愈大影响因子 T 变化愈大,且为非线性变化;微粒形体影响因子 T 与微粒粒度 a 的响应又与微粒形体参量 η 有关,形体参量 η 愈大,影响因子 T 变化愈大,且为线性变化。

3 高斯场下形体影响因子的三维拟合解及其微扰方程的修正

上述研究的结果表明:微粒形体影响因子 T 是微粒粒度 a 和微粒形体参量 η 的双变量函数,因此,在对任意形体微粒特征分布测量反演方法进行修正时不能只考虑形体,也即是说在进行形体修正时,不能由(6)式、(7)式、(10)式代入(5)式直接得到微扰方程(11)式。因为考虑到形体修正微扰项与微粒粒度有关。所以必须对方程(5)和散射微扰结果(9)式进行讨论。图5是微粒形体影响因子 T 与微粒粒度 a 和微粒形体参量 η 关系的三维分布图。

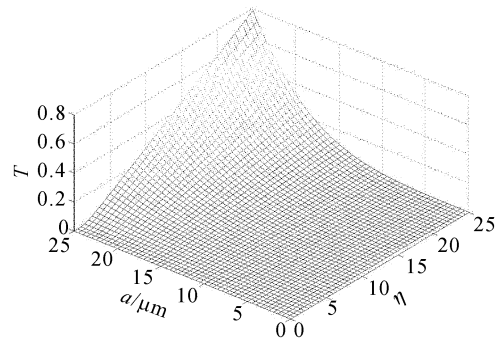


Fig. 5 The influence factor T vs. a and η in 3-D

根据上述微粒形体影响因子 T 的数值解的三维分布图,对该数值解进行拟合得到其解的近似表达式为

$$T = 2.65[(0.0007a^2 - 0.0378a + 0.3085)\eta - (0.0015a^2 - 0.0079a + 0.635)], \quad (12)$$

$$\frac{dT}{d\eta} = 2.65(0.0007a^2 - 0.0378a + 0.3085), \quad (13)$$

从而得到拟合解的三维分布,如图6所示。

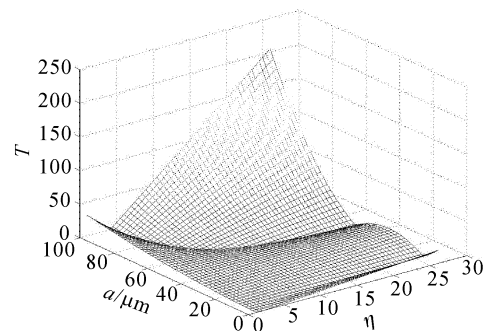


Fig. 6 The influence factor T vs. a and η in 3-D after drafting

对比图5与图6可以看出:当微粒粒度分布在 $0 \sim 30 \mu\text{m}$ 区间时其拟合效果不佳,而当微粒粒度分

布在大粒度区间时其拟合效果很好,产生的原因主要是因为微粒形体影响因子 T 与微粒形体参量 η 的响应与微粒粒度 a 有关,该变化为非线性变化,由(13)式看出当粒度在 $a = 5 \mu\text{m}$ 以下出现了拐点,所以影响了拟合效果。但是,从图 5 和图 6 中可以看出:小粒度分布的微粒其形体的变化对测量结果影响甚少,只有当微粒粒度分布在大粒度区间时,其形体的变化才必需考虑,而在大粒度区间本拟合效果很好,所以本拟合结果仍然具有较好的应用性。

基于(12)式的结果,考虑到微粒形体影响因子 T 与微粒形体参量 η 和微粒粒度 a 的关系,从微扰方程(3)开始作用如下的修正推导。

N 个颗粒总散射光强为

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} n(a, \eta) [I(a) + I'(a, \eta)] da d\eta. \quad (14)$$

对应的光电响应值 V 有式

$$I = \frac{1}{H} \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV = \frac{1}{H} \int_{a_1}^{a_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} V(a, \eta) P(a, \eta) da d\eta. \quad (15)$$

由(1)式、(14)式、(15)式和 P 函数的定义可得到下式:

$$\int_{V_1}^{V_2} P(V) dV = \iiint V(a, \eta) P^s(a) P(\eta) da d\eta = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} V(a) P^s(a) P(\eta) da d\eta + \int_{a_1}^{a_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} V'(a, \eta) P^s(a) P(\eta) da d\eta, \quad (16)$$

式中 $P^s(a)$ 为等效球体微粒粒度概率分布函数, $P(\eta)$ 为微粒形体概率分布函数, $V'(a, \eta)$ 为形体微扰电压响应分布函数, $V(a)$ 为等效球体微粒散射电压响应分布函数,其他各符号定义见参考文献[3, 4]。当在(16)式中第一项只考虑球体时, $P(\eta)$ 分布函数为 δ 函数,又因为

$$\int_{a_1}^{a_2} V(a) P^s(a) da = \int_{V_1}^{V_2} P^s(V) dV, \quad V = k_1 T,$$

式中 k_1 为转换系数。

其中 k_1 为常量,(16)式即为

$$\int_{V_1}^{V_2} P(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} P^s(V) dV +$$

$$k_1 \int_{a_1}^{a_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} T(a, \eta) P^s(a) P(\eta) da d\eta, \quad (17)$$

$$\int_{V_1}^{V_2} P(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} P^s(V) dV + \int_{V_1}^{V_2} P^s(V) dV \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{T(a, \eta)}{T(a)} P(\eta) d\eta, \quad (18)$$

由(18)式可解得

$$P(V) = P^s(V) [1 + P(\eta) F(a, \eta)], \quad (19)$$

(19)式称为任意形体微粒特征概率分布函数修正后的微扰方程,(19)式与修正前的(11)式微扰方程相比较可以看出:当考虑到微粒形体影响因子不仅与形体分布有关而且与微粒粒度分布有关后,其微扰方程得到了改进。(19)式中 F 函数的定义为

$$F(a, \eta) = \frac{1}{k_1 T(a)} \left[\frac{d \ln T(a, \eta)}{d \eta} \right]^{-1}, \quad (20)$$

在本文高斯分布散射场的假设下,(20)式可以表示为

$$F(a, \eta) = \frac{1}{k_1} \left(\frac{\eta}{0.0015a^2 - 0.0079a + 0.635} - \frac{1}{0.0007a^2 - 0.0378a + 0.3085} \right).$$

结论 本文的理论研究结果表明:

1) 在微粒特征概率分布函数的测量中,必须进行微粒形体影响的修正,而微粒形体修正中尤其是对于大粒度分布的微粒群,微粒粒度的变化对其微粒形体影响修正的效果有着较大的影响。

2) 微粒形体的修正项(即微粒形体影响因子)与微粒粒度呈非线性关系,拟合结果证明其关系与微粒粒度的二次项有关。

3) 本文对形体影响因子函数研究的结果和对微粒特征概率分布函数微扰方程的修正方法的研究结果为微粒特征概率分布函数的准确测量提供了技术依据。

参 考 文 献

- 1 Lock J A, Todges J T. Far-field scattering of axis-symmetric laser beam of arbitrary profile by an on-axis spherical particles. *Appl. Opt.*, 1996, **35** (21): 4283 ~ 4290
- 2 Gouesbet G. Scattering of higher-order Gaussian beams of an infinite cylinder. *J. Opt.*, 1997, **28**(1): 45 ~ 65
- 3 Adler C L, Lock J A, Stone B R. Rainbow scattering by a cylinder with a nearly elliptical crosssection. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(9): 1540 ~ 1550

- 4 Hollomd A C, Gagne G. The scattering of polarized light by polydisperse systems of irregular particles. *Appl. Opt.*, 1970, **9**(5):1113~1121
- 5 Videen G, Pinnick R G, Ngo D *et al.*. Asymmetry parameter and aggregate particles. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(6):1104~1109
- 6 Hirst E, Kaye P H, Guppy J R. Light scattering from nonspherical airborne particles: experimental and theoretical comparisons. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(30):7180~7186
- 7 Baton J P. Electromagnetic field calculations for a sphere illuminated by a higher-order Gaussian beam. II. Far-field scattering. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(15):3339~3344
- 8 Tsang L, Ding K H, SHin S E *et al.*. Scattering of electromagnetic waves from dense distributions of spherical particles based on Monte Carlo simulations. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1998, **15**(10):2660~2669
- 9 Wang Yawei, He Anzhi, Liu Xiaoran. Probability characterization methods of arbitrary particles distribution and its measurement. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2002, **22**(3):363~368 (in Chinese)
- 10 Wang Yawei. Study to the measurement of the distribution function of particles' size and shape in the theory and experiment. *Chinese J. Computational Physics* (计算物理), 2002, **19**(4):339~343

Dynamical Characteristics of the Shape Influence Factor in Gauss Scattering Field and Improvement of Perturbation Equation

Wang Yawei Wu Dajian

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang, 212013)

(Received 24 July 2002; revised 8 October 2002)

Abstract: In order to settle the influence of measuring results of particles with its shape-variety, the shape-influence factor of arbitrary particles in Gauss scattering field is discussed based on the half-ellipse model, the mathematic relation between the shape-influence factor and size and shape of particles is rebuilt, and the distribution of numerical-solution of the influence factor is obtained. The analytical formula solution of the influence factor is fitted in Gauss scattering field based on the studying of the dynamical characteristics of it. Then the perturbation equation about the probability distribution characterized-function of arbitrary particles is improved. It shows that this method is very useful for particles with large diameter in the shape-modifying.

Key words: optical measurement; particles' shape; mathematical modification; light scattering

告《光学学报》投稿者书

今年以来,《光学学报》来稿量翻番,而发表容量基本不变,造成《光学学报》的发表周期过长。为了尽快缩短发表周期,提升《光学学报》的学术质量,从现在开始,大幅度提高录用水准,把《光学学报》办成刊登优质学术论文的品牌期刊。

录用的具体要求如下:

- 1) 创新性明显: 物理思想新或所用方法新,结果新;
- 2) 可信性强: 研究背景交代清楚,引用相应文献完整;
- 3) 实验数据丰富完整,详实可靠;理论分析参量、假设条件已清楚列出;
- 4) 理论分析详尽,深入透彻;并曾从多方面加以考虑、验证过;研究内容足以证明结论;
- 5) 研究结果具有足够的学术价值和普遍意义,在本分支学科或光学领域将会有一定影响;
- 6) 论文撰写条理清楚,重点突出,语言简洁,篇幅适中,摘要、关键词、字符、公式书写、图表、参考文献等均符合《光学学报》征稿简则中所载明的 10 项要求。

《光学学报》编辑部
2003 年 9 月 20 日