

文章编号: 0253-2239(2003)10-1245-5

基于离散泊松方程解的相位展开方法*

惠 梅¹ 王东生¹ 李庆祥¹ 邓年茂² 徐毓娴¹

(¹ 清华大学精密仪器与机械学系精密测试技术与仪器国家重点实验室, 北京 100084)
(² 中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068)

摘要: 提出了基于离散泊松方程解的相位展开方法, 针对被测件表面疵病(阴影、断裂、孔洞、噪声等)奇异点所产生的相位跳变和截断, 建立了相位展开算法模型; 引入离散余弦变换求解具有诺埃曼边界条件的离散泊松方程, 得到最小二乘意义下的展开相位解。经实验证明, 该方法能够消除干涉图奇异点相位跳变, 消除传统相位展开法所产生的“跳序”和“拉线”现象, 恢复真实相位。

关键词: 物理光学; 相位展开; 泊松方程; 离散余弦变换
中图分类号: O436 文献标识码: A

1 引 言

应用相移干涉术测量物体表面微观形貌时, 所提取的相位值是由反正切函数的形式表示的, 其相位值被截断、或者说被包裹(phase wrapped)在 $(-\pi, \pi)$ 的主值区域中, 从而呈现阶跃的不连续的相位分布图样, 使测量得到的表面形貌产生失真现象^[1]。为得到表面形貌的实际值, 必须将主值相位恢复为绝对相位, 这个过程称为相位展开(phase unwrapping)。

对于简单且完善的相移干涉图形, 若对干涉图的处理满足奈奎斯特(Nyquist)采样定理(任意两个相邻采样点之间的非截断相位变化小于 $\pm\pi$)的要求时, 用逐行逐列扫描并加减 2π 倍数的传统相位展开法就可以得到连续的二维相位分布函数^[2]。但对于十分复杂的相移干涉图形, 例如, 图形中存在由被测件表面疵病(阴影、断裂、孔洞、噪声等)引入的奇异点, 则有效像素被断开而不连续, 会出现有的区域得不到主值相位, 或得到的主值相位不可靠, 这些都会给相位展开带来困难。并且, 任何一点的相位展开错误都会沿着展开路径传播下去, 形成“跳序”(order jumping)和“拉线”(wire drawing)现象^[3]。

为得到真实连续的波前相位图, 除了需要移去由反三角函数的计算而导致的 2π 相位间断点外, 最主要的是要正确地去掉由奇异点产生的相位截断。本文研究三维形貌测量中, 干涉图存在奇异点时, 所

产生的相位跳变的恢复问题。

2 方法原理

在包裹相位图中, 相位跳变的边缘是相位展开的判据。由于实际测试时, 阴影、盲点和噪声点具有相位跳变特征(非正常跳变), 因此必须有相应的识别方法区别这些边缘, 才能避免误差沿路径的传播, 得到正确的展开相位。常用的调制度阈值法^[4]判定阴影区和盲点, 以调制度的大小作为阈值的高低。但实际应用时, 确定一个合适的阈值较为困难, 过高的阈值使计算局限于图像的一小部分, 许多有效像素不能参与计算, 不能充分利用干涉图的所有信息, 太少的像素使三维重构图出现大量孔洞。若阈值过低, 会出现误差沿展开方向扩张, 形成浪花般随机误差^[5]。

本文提出了基于离散泊松方程解的相位展开方法, 不需要对干涉图进行阈值掩模, 它借助快速离散余弦变换求解 $M \times N$ 矩形网格(像素点)上具有诺埃曼(Neumann)边界条件的离散泊松方程, 得到最小二乘意义下的解, 进而得到展开的相位分布。

2.1 算法模型

假定 ϕ_{ij} 为二维离散点 (i, j) 上的展开相位, φ_{ij} 为测量到的主值相位, 则有

$$\phi_{ij} = \varphi_{ij} + n(i, j) + 2\pi k(i, j), \quad (1)$$

k 为整数, $-\pi \leq \varphi_{ij} \leq \pi$, $n(i, j)$ 表示测量中的噪声, $k(i, j)$ 是整数值函数。相位展开的任务是要从主值相位 φ_{ij} 中估计适当的 $k(i, j)$, 并去除噪声 $n(i, j)$, 从而得到真实连续的相位场 ϕ_{ij} 。

理论上, 展开相位差值应当等于包裹相位差值。

* 国家自然科学基金(59975052)资助课题。

E-mail: huimei9119@163.com

收稿日期: 2002-07-08; 收到修改稿日期: 2002-10-18

但是,由于奇异点的存在,应用(1)式展开相位时,干涉图中受影响区域不可能得到正确的 $k(i, j)$ 值。由于相位展开过程中后一点的 $k(i, j)$ 总是在前一点的基础上计算的,当遇有奇异点时,其所产生的相位展开误差会叠加在后续的点上,使误差沿去包裹方向扩展,从而出现误差条带,即“跳序”或“拉线”现象,这使得展开相位差值与包裹相位差值间将有差值存在。

本算法的原理如下:寻找已展开的相邻像素点间展开相位差值与该相邻像素点间包裹相位差值之差的最小二乘解,得到最小二乘意义下的展开相位。

首先定义包裹算子 W ,有

$$W(\phi_{ij}) = \varphi_{ij}, \quad (2)$$

定义包裹相位差

$$\Delta_{ij}^x = \varphi_{(i+1)j} - \varphi_{ij}, \quad (3)$$

$$\Delta_{ij}^y = \varphi_{i(j+1)} - \varphi_{ij}, \quad (4)$$

其中上标 x, y 分别指行像素相位差及列像素相位差。

在 $M \times N$ 矩形像素网络上作最小二乘:

$$S = \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} (\phi_{(i+1)j} - \phi_{ij} - \Delta_{ij}^x)^2 + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-2} (\phi_{i(j+1)} - \phi_{ij} - \Delta_{ij}^y)^2, \quad (5)$$

求解 S 最小二乘意义下的解 ϕ_{ij} , 即可获得相位展开的解。

2.2 泊松方程

Hunt^[6] 的矩阵公式给出了上述最小二乘矩阵的法方程,即

离散余弦变换(DCT)正变换

$$\phi_{(i+1)j} + \phi_{(i-1)j} + \phi_{i(j+1)} + \phi_{i(j-1)} - 4\phi_{ij} = \Delta_{ij}^x - \Delta_{(i-1)j}^x + \Delta_{ij}^y - \Delta_{i(j-1)}^y, \quad (6)$$

该式为包裹相位差与展开相位差的关系式。对其作简单恒等变换,得

$$[\phi_{(i+1)j} - 2\phi_{ij} + \phi_{(i-1)j}] + [\phi_{i(j+1)} - 2\phi_{ij} + \phi_{i(j-1)}] = \rho_{ij}, \quad (7)$$

其中

$$\rho_{ij} = [\Delta_{ij}^x - \Delta_{(i-1)j}^x] + [\Delta_{ij}^y - \Delta_{i(j-1)}^y], \quad (8)$$

实际上,(7)式是 $M \times N$ 矩形网格上的离散泊松方程:

$$\frac{\Delta^2}{\Delta x^2} \phi(x, y) + \frac{\Delta^2}{\Delta y^2} \phi(x, y) = \rho(x, y), \quad (9)$$

上式对所有矩形网格点 $i = 0, \dots, M-1; j = 0, \dots, N-1$ 都是有效的,并且被用于计算 $\rho_{i,j}$ 的相位差仅在网络区域内是非零的^[7]。这个限制源自于最小二乘公式^[8],因此,可以直接得出离散泊松方程的诺埃曼边界条件:

$$\Delta_{(-1)j}^x = 0, \quad \Delta_{(M-1)j}^x = 0, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (10)$$

$$\Delta_{i(-1)}^y = 0, \quad \Delta_{i(N-1)}^y = 0, \quad i = 0, \dots, M-1 \quad (11)$$

由此得出结论:展开相位差值与包裹相位差值之差的最小二乘解在数学上等于 $M \times N$ 矩形网络上具有诺埃曼边界条件的离散泊松方程的解。

2.3 离散余弦变换求解泊松方程

下面引入离散余弦变换来解(7)式。二维离散余弦变换对如下:

$$C_{mn} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} 4x_{ij} \cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right] \cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right], & 0 \leq m \leq M-1; \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & m \geq 0, m \geq M-1; \quad n \geq 0, n \geq N-1 \end{cases} \quad (12)$$

离散余弦变换反变换

$$x_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} W_1(m)W_2(n)C_{m,n} \cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right] \cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right], & 0 \leq i \leq M-1; \\ & 0 \leq j \leq N-1 \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} W_1(m) = 1/2, & m = 0 \\ W_2(n) = 1/2, & n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} W_1(m) = 1, & 1 \leq m \leq M-1 \\ W_2(n) = 1, & 1 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (14)$$

$C_{m,n}$ 为像素点 x_{ij} 的二维离散余弦变换谱值,即在离散余弦变换域的精确解。由(12)式可见,(13)式的

余弦展开自动地加有诺埃曼边界条件, $\nabla \phi \cdot n = 0$ 。以(13)式的形式展开 $\phi_{i,j}$,得

$$\phi_{ij} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} W_1(m) W_2(n) \hat{\phi}_{m,n} \times \cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right] \cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right], \quad (15)$$

将(15)式代入(7)式,并在(7)式右边作类似的展开,化简整理后,即得展开相位 $\phi_{i,j}$ 在离散余弦变换域的精确解:

$$\hat{\phi}_{ij} = \frac{\hat{\rho}_{ij}}{2[\cos(\pi i/M) + \cos(\pi j/N) - 2]}, \quad (16)$$

对该式进行离散余弦变换反变换即可得到相位展开后的相位值 $\phi_{i,j}$ 。(16)式自动地加有诺埃曼边界条件:

$$\begin{cases} \phi_{0j} - \phi_{(-1)j} = 0, & \phi_{Mj} - \phi_{(M-1)j} = 0, \\ j = 0, \dots, N-1 \\ \phi_{i0} - \phi_{i(-1)} = 0, & \phi_{iN} - \phi_{i(N-1)} = 0, \\ i = 0, \dots, M-1 \end{cases} \quad (17)$$

下面将基于离散泊松方程解的相位展开算法归结如下:

1) 对由(8)式计算得到的阵列 $\rho_{i,j}$,进行(12)式的二维离散余弦变换正变换,产生二维离散余弦变换谱值 $\hat{\rho}_{ij}$;

2) 由(16)式计算得到 $\hat{\phi}_{ij}$;

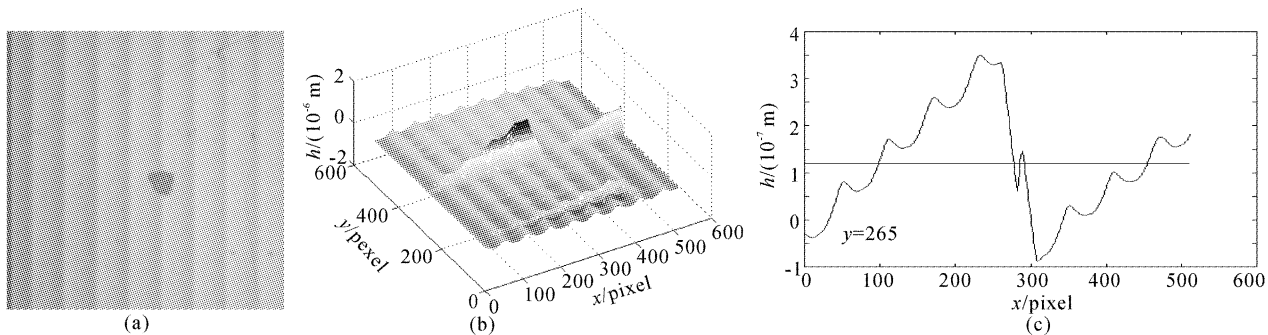


Fig. 1 (a) Interference image; (b) Three-dimensional surface topography with phase wrapping (coordinate of x, y : pixel, coordinate of h : m); (c) Profile curve at phase jumping (coordinate of x : pixel, coordinate of y : m)

形貌测量原理是以相位图沿 x 轴的积分形式表示的,所以相位展开也沿 x 轴进行^[9]。首先判断奇异点区域。假定在干涉图中,至少存在一条可用(1)式的相位展开算法正确去包裹的水平线,在该条线上,所有的像素点均为“好点”。以此线为基准,若相邻直线与该基准线所构成的任意正方形四像素点满足包裹相位差之和为零的条件,则对等于对该相邻直线上的点作相位去包裹是正确的,并可以该线为基准线继续下一相邻直线的去包裹。如果基准线与相邻直线构成的任意正方形像素点不满足包裹相

3) 作 $\hat{\phi}_{ij}$ 的二维离散余弦变换反变换,得到最小二乘意义下的展开相位 ϕ_{ij} 。

应当注意,在 $i=0$ 和 $j=0$ 处,(16)式的分母为零,这意味着 $\hat{\phi}_{00}$ 是不确定值,因为对常数偏置无法解得泊松方程。在实际计算中,设 $\hat{\phi}_{00} = \hat{\rho}_{00}$,以使该偏置保持不变。

3 实验及结果

本算法对干涉图中的奇异点构成具有诺埃曼边界条件的离散泊松方程并求其最小二乘解,以得到正确的展开相位。

下面对本文的相位展开算法作实验验证。实验样品为 Ra 0.09 μm 标准粗糙度样块,图像尺寸为 512 像素 \times 512 像素。

图 1(a)为粗糙度样块干涉图像(在我们自行研制的移相式微分干涉相衬表面微观形貌测量系统上获得),在图像中间有一较大的会引起相位跳变的黑点,为奇异点区域;图 1(b)为相位展开前的样块三维形貌,从形貌图中可以看出奇异点导致的大的轮廓跳变;图 1(c)为相位跳变线的二维轮廓。

位差之和为零的条件,则认为该像素点连线上存在着奇异点,此时,应用上节的基于离散泊松方程解的相位展开算法,求解最小二乘意义下的展开相位。为减少计算量,对奇异点跳变轮廓处设置矩形小区域,尺寸为 100 像素 \times 100 像素,按照前述相位展开算法步骤编程计算,进行相位展开。

图 2 为奇异点区域一条轮廓线($y=265$)的二维离散余弦变换谱值 $\hat{\rho}_{ij}$ 。对所有奇异点轮廓线做计算得到 $\hat{\phi}_{ij}$,作 $\hat{\phi}_{ij}$ 的二维离散余弦变换反变换,就可以得到最小二乘意义下的展开相位 ϕ_{ij} 。

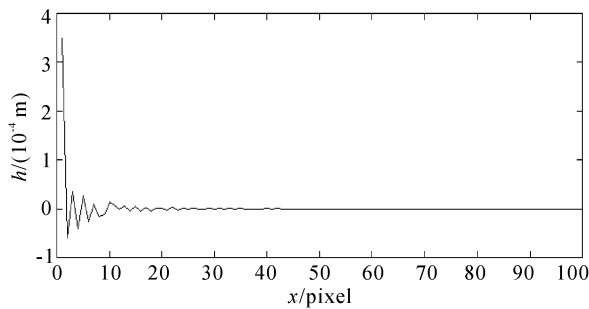
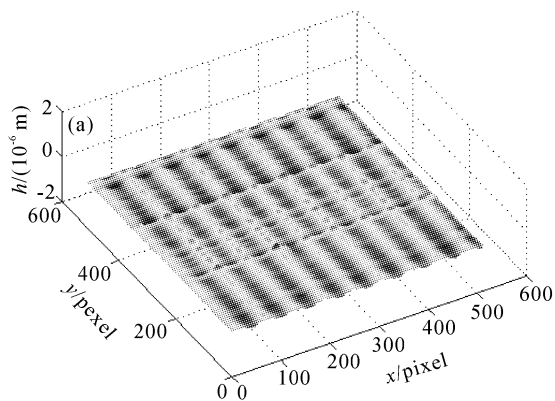


Fig. 2 DCT spectrum $\hat{\rho}$ at oddity points ($y = 265$) (coordinate of x : pixel, coordinate of y : DCT spectrum)

图 3(a)为用基于泊松方程解的相位展开算法



进行相位展开后的三维形貌。图 3(b)为相位展开后奇异点处沿 x 轴方向($y=265$)的二维轮廓曲线,可以看出,奇异点引起的相位跳变已被去除,得到了正确的展开相位,恢复了真实的表面形貌。

将(1)式的二维数学模型编制相位去包裹程序,将相位图展开。通过对包裹主值差的求和运算实现相位去包裹,得到连续的相位分布并得到重构的粗糙度样块三维形貌,如图 4(a)所示,图 4(b)为相位跳变处的二维轮廓。从图中可以看出奇异点导致的大的轮廓跳变并没有消除,只是改变了轮廓跳变形状;并且,在奇异点的相位错误沿展开路径传播,形成了相位展开时的“跳序”和“拉线”现象。

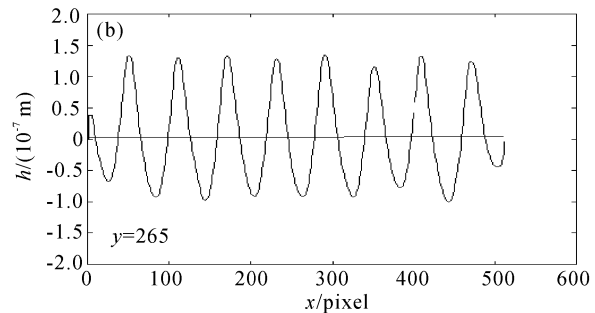


Fig. 3 (a) Three-dimensional surface topography after DCT phase unwrapping at all oddity points; (b) Profile curve after phase unwrapping of $y=265$

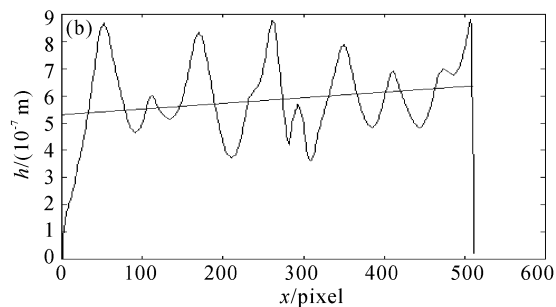
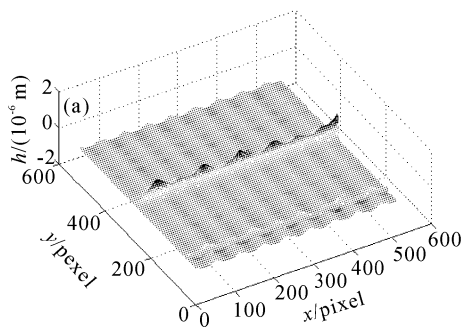


Fig. 4 (a) Three-dimensional surface topography after phase unwrapping with Eq. (1); (b) Profile curve after phase unwrapping of $y=265$

结论 本文针对干涉图存在奇异点时所产生的相位截断和突跳,建立了相位展开算法模型,引入离散余弦变换求解具有诺埃曼边界条件的离散泊松方程,得到了最小二乘意义下的展开相位。

理论分析及试验结果显示,本文提出的基于离散泊松方程解的相位展开方法,对相位图中存在噪声、断点、孔洞及阴影等奇异点所产生的相位跳变提

供了一种有效的处理方法,成功地应用于我们自行研制的相移干涉表面微观形貌测量系统中,恢复了物体真实的表面形貌分布。

参 考 文 献

- 1 Fornaro G, Franceschetti G, Lanari R *et al.*. Robust phase-unwrapping techniques; a comparison. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(11):2355~2366
- 2 Song S M H, Napel S, Pele N J *et al.*. Phase unwrapping

- of MR phase images using Poisson equation. *IEEE Trans. Image Process.*, 1995, **4**(1):667~676
- 3 Ge Aiming, Chen Lei, Chen Jinbang *et al.*. Digitalisation processing technique for interference pattern with obstruct. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2000, **20**(6): 775~780 (in Chinese)
- 4 Su X Y. Phase unwrapping techniques for 3-D shape measurement. *Proc. SPIE*, 1996, **2866**:460~465
- 5 Strand J, Taxt T. Performance evaluation of two-dimensional phase unwrapping algorithms. *Appl. Opt.*, 1999, **38**(20):4333~4344
- 6 Hunt B R. Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences. *J. Opt. Soc. Am.* (A), 1979, **69**(3):393~399
- 7 Kerr D, Kaufmann G H, Galizzi G E. Unwrapping of interferometric phase-fringe maps by the discrete cosine transform. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(5):810~816
- 8 Ghiglia D C, Romero L A. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods. *J. Opt. Soc. Am.* (A), 1994, **11**(1):107~117
- 9 Xu Yi, Xu Yuxian, Cai Xin *et al.*. Quantitative surface topography determination by differential interference contrast microscopy. *Chinese J. Optics and Precision Engineering* (光学精密工程), 2001, **9**(3):226~229 (in Chinese)

Phase Unwrapping Method Based on the Solution of Discrete Poisson Equation

Hui Mei¹ Wang Dongsheng¹ Li Qingxiang¹ Deng Nianmao² Xu Yuxian¹

(¹ Department of Precision Instrument and Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084
² Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710068)

(Received 8 July 2002; revised 18 October 2002)

Abstract: A phase unwrapping algorithm based on the solution of discrete Poisson equation is presented to retrieve the true phase of the object from wrapped phase. Algorithm model is constructed aiming at phase discontinuous and jumping caused by oddity points in interference pattern. Discrete cosine transform (DCT) is introduced to solve discrete Poisson equation which has Neumann boundary condition. Phase unwrapping results are obtained under least-squares method meaning. In comparison with the traditional algorithm, this method can effectively remove the discontinuous influence of shadow, blind spots, holes and noises, remove order jumping and wire drawing and resume true phase at the same time. Preferable experimental results are obtained in phase-shifting interference measurement.

Key words: physical optics; phase unwrapping; Poisson equation; discrete cosine transform