

文章编号: 0253-2239(2003)01-22-04

平面波经小圆孔衍射的轴上光强特性

周国泉^{1,2} 赵道木¹ 王绍民¹

1 浙江大学物理系, 杭州 310028
2 浙江林学院基础部, 临安 311300

摘要: 基于精确的衍射场公式和横截面上光强的精确表述, 分析讨论了单色平面光波经小圆孔衍射后, 其衍射光束轴上光强的最大值以及轴上光强极值的数目和小圆孔半径的关系; 并且由此考察了一般的菲涅耳数计算公式的使用条件。

关键词: 物理光学; 轴上光强; 衍射; 小圆孔; 菲涅耳数

中图分类号: O436.1 文献标识码: A

1 引 言

小圆孔衍射是一个典型的衍射现象, 常用基尔霍夫衍射理论来处理^[1]。但基尔霍夫衍射公式受小孔孔径和观察点到屏距离的限制, 不适用于半径接近于波长的小圆孔和近场。这时, 可利用画波阵面图来分析平面波或球面波经小孔的衍射行为^[2]。由于单色平面光波具有绕传输轴旋转对称的特性, 在它正入射小圆孔(含微小圆孔)时, 精确的衍射场公式可通过不同的方法获得^[3,4]。由于该公式在推导过程中未对任何参量作限制, 所以它不受任何条件的限制, 可作为近场光学的理论。另一方面, 当小圆孔的孔径小到一定程度时, 其衍射光束不再是傍轴光束^[4], 此时衍射光束的光强必须采用非傍轴光束光强的表述即横截面上光强的精确表述^[5,6]。精确表述的横截面上光强在傍轴条件下就近似等于一般的光强表述即复振幅模的平方。

本文基于精确的衍射场公式和精确的横截面上光强表述, 分析探讨了单色平面光波经小圆孔衍射后其衍射光束轴上光强的特性。

2 轴上光强特性

一沿 z 轴传播、波长为 λ 的单色平面光波

$$U_i = \exp[i2\pi z / \lambda]$$

正入射一半径为 R 的小圆孔, 经衍射后在自由空间传输不含时的光场分布为 $U(x, y, z)$ 。若选取小圆孔所在平面为 x - y 面, 圆孔圆心为坐标原点, 则通过解标量波动方程和边界条件可得^[3,4]

$$U(r, z) = k_0 R \int_0^\infty J_1(k_0 \alpha R) \exp(ik_0 \nu z) J_0(k_0 \alpha r) d\alpha, \quad (1)$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\nu = \sqrt{1 - \alpha^2}$, $k_0 = 2\pi/\lambda$, J_0 和 J_1 分别为第一类零阶和一阶贝塞尔函数。 $\alpha < 1$ 的值对应于和 z 轴成角 $\arcsin \alpha$ 传输的均匀波, 而 $\alpha > 1$ 的值对应于倏逝波。显然, (1) 式不受圆孔孔径大小和观察点到屏距离的限制。

轴上的衍射场分布 $U(0, z)$ 为

$$U(0, z) = k_0 R \int_0^\infty J_1(k_0 \alpha R) \exp(ik_0 \nu z) d\alpha. \quad (2)$$

当圆孔较小时, 单色平面波经小圆孔衍射的光束是非傍轴光束。此时衍射光束的光强必须采用非傍轴光束光强的表述^[5,6]:

$$I(r, z) = \operatorname{Re} \left[-i \frac{U^*(r, z)}{k_0} \frac{\partial U(r, z)}{\partial z} \right], \quad (3)$$

式中, Re 表示取实部, 星号表示复共轭。当 z 大于几个波长时, 即倏逝波效应可忽略时, (3) 式可表示为按波长 λ 或 k_0^{-1} 的级数展开^[6]

$$I(r, z) = |U(r, z)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} D^{(n)}, \quad (4)$$

其中

$$D^{(n)} = \operatorname{Re} \left[\frac{(-1)^{n+1} (2n-3)!!}{k_0^{2n} (2n)!!} U^*(r, z) \times \right]$$

* 国家自然科学基金(19974038、60276035 和 10276034)资助课题。

E-mail: optics@zju.edu.cn

收稿日期: 2001-08-22; 收到修改稿日期: 2001-12-06

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^n U(r, z). \quad (5)$$

由(4)式和(5)式可得,在傍轴条件下,由于波长 λ 较小,

$$|U(r, z)|^2 \gg D^{(1)},$$

所以

$$I(r, z) = |U(r, z)|^2 + D^{(1)} \cong |U(r, z)|^2,$$

这就是一般的光强表述即复振幅模的平方。对于非傍轴光束,积分 $P_1(z) = \iint |U(r, z)|^2 dx dy$ 根本不是一个守恒量,并且光束携带的功率不是 $P_1(z)$ 而是

$$P = \operatorname{Re} \iint \left[-i \frac{U^*(r, z)}{k_0} \frac{\partial U(r, z)}{\partial z} \right] dx dy^{[7]},$$

因此衍射光束的轴上光强 $I(z)$ 为

$$I(z) = \operatorname{Re} \left[-i \frac{U^*(0, z)}{k_0} \frac{\partial U(0, z)}{\partial z} \right]. \quad (6)$$

衍射光束轴上光强的极值可由

$$\frac{dI(z)}{dz} = 0 \quad (7)$$

求得极值的位置,再由(6)式确定轴上光强极值的大小和极值的数目。其中光强极值最大的一个即为光强的最大值。

2.1 轴上光强的最大值和小圆孔半径的关系

对于一半径 R 给定的小圆孔,其衍射光束的轴上光强存在一个相应的最大值 I_{\max} 。图1给出了轴上光强的最大值 I_{\max} 和小圆孔半径 R 的变化关系。当小圆孔半径 R 小于 3λ 时,衍射光束轴上光强的最大值 I_{\max} 随小圆孔半径 R 的增大而快速增大。而当小圆孔半径 R 大于 3λ 时, I_{\max} 随 R 的增大而趋向于最大值4。在 $R = 18\lambda$ 时, $I_{\max} = 4.00$ 。

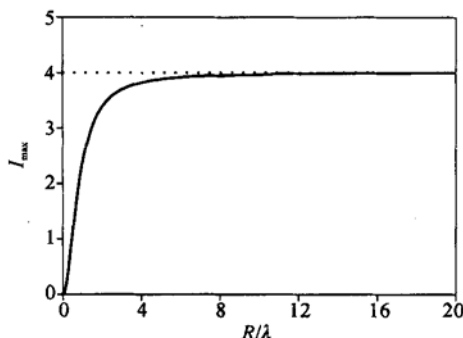


Fig. 1 Variation curve of the maximum axial light intensity I_{\max} versus the radius of small circular aperture, R . The dotted curve is depicted for comparison

2.2 轴上光强极值的数目和小圆孔半径的关系

通过大量的数值计算,发现衍射光束轴上光强的极值数目 n 存在一定的规律。当小圆孔半径 R 小

于1个波长时,衍射光束轴上光强只存在一个唯一的极大值即最大值。当小圆孔半径 R 比1个波长大时,衍射光束轴上光强的极值数目 n 由小圆孔孔径 $2R$ 与单色平面波波长 λ 的比值所决定。若定义 $m = 2R/\lambda$,则衍射光束轴上光强的极值数目 n 可表示为

$$n = \begin{cases} 1, & m \leq 2 \\ m - 1, & m \text{ 为大于 } 2 \text{ 的整数} \\ \operatorname{Int}[m], & m \text{ 为大于 } 2 \text{ 的非整数} \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\operatorname{Int}[m]$ 表示对 m 取整数部分。若 m 为大于2的非整数,则轴上光强的第一个极值(从坐标原点处数过来,下同)的峰是否明显取决于 m 的小数部分,小数部分越大,峰越明显。若轴上光强的极值数目 n 为偶数,则第一个极值为极小值,且极大值的个数和极小值的个数各占一半。若轴上光强的极值数目 n 为奇数,则第一个极值是极大值,且极大值的个数比极小值多一个。

图2给出了小圆孔孔径 $2R$ 分别为 1.5λ 、 16λ 、 3.4λ 和 3.8λ 时轴上光强 I 与轴上距离 z 的变化关系。为了便于看清楚第一个极值点,图2(b)、图2(c)和图2(d)中轴上距离 z 只画到最后一个极值点出现的位置略过一点。从图2可以看出,小圆孔孔径 $2R = 1.5\lambda$ 的轴上光强的极值数为1,并且是最大值;而孔径 $2R = 16\lambda$ 的轴上光强的极值数为15,其中8个是极大值,7个是极小值。孔径分别为 3.4λ 和 3.8λ 的轴上光强的极值数虽都为3,但孔径为 3.8λ 的轴上光强的第一个极值的峰较明显,而孔径为 3.4λ 的峰却不明显。

以上有关轴上光强极值的数目和小圆孔半径的关系即(8)式,当 $m > 1$ 时可用菲涅耳半波带法解释。若对于轴上点 $(0, z_0)$,平面波与小圆孔相接触的波面能分成 k 个菲涅耳半波带,则以下几何关系成立:

$$\sqrt{(z_0 + k\lambda/2)^2 - z_0^2} = R, \quad (9a)$$

即

$$z_0 k \lambda + \frac{k^2 \lambda^2}{4} = R^2. \quad (9b)$$

当 $z_0 = 0$, k 取极值 $2R/\lambda$ 。所以 $m = 2R/\lambda$ 在物理上表示是平面波与小圆孔相接触的波面所能分成半波带的极限。让轴上点 $(0, z_0)$ 自无穷远处向小圆孔所在处移动, k 为奇数的点对应的光强为极大值; k 为偶数的点对应的光强为极小值。当 m 为大于2的整数时, k 的取值范围为从1到 $m - 1$ 的整数,共 $m - 1$ 个。当 m 为大于2的非整数时, k 的取值范围为

从 1 到 $\text{Int}[m]$ 的整数, 一共 $\text{Int}[m]$ 个。当 $1 \leq m \leq 2$ 时, k 只能取值 1。至于 $m \leq 1$ 时的情形, 不能用菲

涅耳半波带法解释。

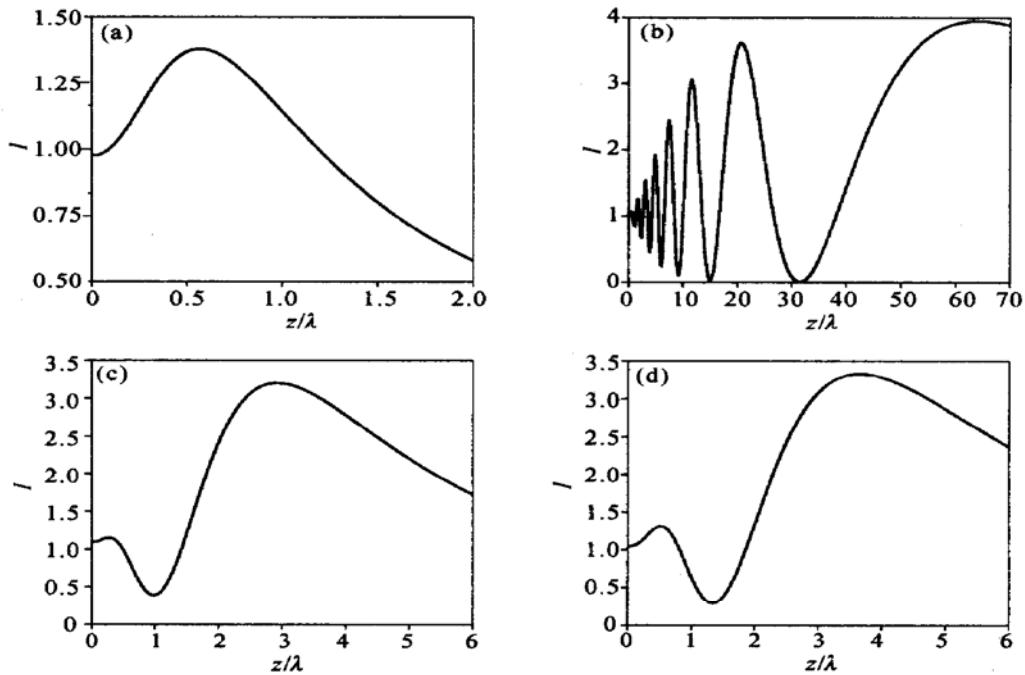


Fig. 2 Variation curves of the axial light intensity I of small circular apertures with $2R = 1.5\lambda$ (a), 16λ (b), 3.4λ (c) and 3.8λ (d), respectively, versus the axial distance z

2.3 一般的菲涅耳数计算公式的使用条件

平面波正入射时菲涅耳数的计算公式为 $N = R^2/\lambda z$, 其使用条件是 $R \gg \lambda$ 和 $z \gg R^2/\lambda$ 。由于菲涅耳数的奇数由小到大依次对应于从轴上距离无穷远处数过来的各个极大值, 而偶数由小到大对应于从轴上距离无穷远处数过来的各个极小值, 因此可由 (7) 式定量考察菲涅耳数计算公式 $N = R^2/\lambda z$ 的使用条件。表 1 列出了由公式 $N = R^2/\lambda z$ 计算得到的菲涅耳数整数和实际标定的菲涅耳数整数。对于这两者间偏差实在太大的没有列于表 1 中。表 1 显示, 对于 $R \gg \lambda$ 的小圆孔, 由菲涅耳数计算公式确定轴

上光强最大值的位置是很精确的。

对于 $R < \lambda$ 的微小圆孔, 由于轴上光强只有唯一的最大值, 虽用菲涅耳数计算公式确定其位置是较精确的, 但不能由此就推断菲涅耳数计算公式也适用于 $R < \lambda$ 的微小圆孔。由表 1 可推知, 对于 $z \geq 1.5R$, 由公式计算得到的菲涅耳数和实际标定的菲涅耳数间的相对偏差在 10% 左右; 而对于 $z \geq 2R$, 两者间相对偏差在 5% 左右。由此可得, 平面波经小圆孔衍射时菲涅耳数计算公式 $N = R^2/\lambda z$ 在 $R \geq \lambda$ 和 $z \geq 2R$ 这两条件下使用可以认为是恰当的。

Table 1 The Fresnel number calculated by formula $N = R^2/\lambda z$ and the demarcated Fresnel number

$N = R^2/\lambda z$	N_{cal}	N_{cal}						
		1	2	3	4	5	6	7
R								
1λ	1.00							
2λ	1.00		2.67					
3λ	0.99		2.25					
4λ	0.98		2.13	3.40				
5λ	1.00		2.08	3.24	4.54			
6λ	0.99		2.05	3.16	4.50			
7λ	0.99		2.04	3.12	4.33	5.69		
8λ	1.00		2.03	3.08	4.26	5.56	6.91	
9λ	0.99		2.02	3.07	4.22	5.40	6.75	
10λ	1.00		2.02	3.06	4.17	5.32	6.58	7.93

结论 采用横截面上光强的精确表述, 分析讨论了单色平面光波经小圆孔衍射后其衍射光束轴上光强的特性。给出了轴上光强的最大值和小圆孔半径的变化关系曲线, 从而可由孔径的大小确定轴上光强的最大值; 而轴上光强的极值数目 n 由比值 $m = 2R/\lambda$ 所决定。同时还定量考察了一般的菲涅耳数计算公式的使用条件。

参考文献

- 1 Born M, Wolf E. *Principles of Optics* (光学原理). Translated by Yang Jiasun. Beijing: Science Press, 1979, 182 ~ 190 (in Chinese)
- 2 Wang Shaomin, Lin Qiang, Chen Qiansong *et al.*. Diffraction of aperture analyzed by wavefront diagram with π phase jump. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1999, **A26**(4): 347~ 350 (in Chinese)
- 3 Guo Jihua, Guo Feng, Zhu Zhaoming. Diffraction of a small aperture near field optics theory. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1998, **18**(10): 1395~ 1398 (in Chinese)
- 4 Zhou Guoquan, Zhao Daomu, Wang Shaomin. Propagation characteristics of planar wave diffracted by small circular aperture. *Acta Photonica Sinica* (光子学报), 2002, **31**(7): 874~ 876 (in Chinese)
- 5 Cao Qing, Deng Ximing, Guo Hong. Accurate expression of light intensity at transverse plane. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1996, **16**(7): 897~ 902 (in Chinese)
- 6 Cao Qing, Deng Ximing. Power carried by scalar light beams. *Opt. Commun.*, 1998, **151**: 212~ 216
- 7 Vassallo C. Limitations of the wide-angle beam propagation method in nonuniform systems. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(4): 761~ 770
- 8 Wang Shaomin, Zhao Daomu. *Matrix Optics*. Beijing: CHEP-Springer, 2000, 19~ 22

Characteristics of Axial Light Intensity of Planar Wave Diffracted by Small Circular Aperture

Zhou Guoquan^{1,2} Zhao Daomu¹ Wang Shaomin¹

[¹ Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310028

[² Department of Basic Science, Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300

(Received 22 August 2001; revised 6 December 2001)

Abstract: Based on the accurate diffraction formula and the accurate expression of light intensity on the transverse plane, the characteristics of axial light intensity of planar wave diffracted by small circular aperture are investigated. Variation relations of the maximum axial light intensity and the numbers of light extremum versus the radius of small circular aperture are given. The application condition of general Fresnel number formula is also studied.

Key words: physical optics; axial light intensity; diffraction; small circular aperture; Fresnel number