

文章编号: 0253-2239(2003)01-95-06

二维各向异性浮雕型光栅的矢量衍射分析

曾阳素^{1,2} 唐雄贵^{1,2} 傅克祥² 王植恒²

1 邵阳学院物理系, 邵阳 422000
2 四川大学物理系, 成都 610064

摘要: 利用严格模式理论对二维电磁各向异性浮雕型介质光栅的衍射特性进行了理论分析, 并对其退化情形进行讨论。文中采用反射-透射系数矩阵算法和校正傅里叶展开规则以提高数值计算的稳定性、收敛性和计算效率。通过对光栅进行数值计算表明, 该方法在可靠性、稳定性和收敛性方面是令人满意的。

关键词: 应用光学; 二维各向异性介质浮雕型光栅; 模式理论; 反射-透射系数矩阵算法; 校正傅里叶展开
中图分类号: O436.1 文献标识码: A

1 引 言

相对于传统光学元件, 衍射光学元件具有独特的光学性能和重量轻、体积小、易复制等优点, 在光束阵列发生器、光学滤波、偏振分离等方面得到了广泛的应用。近年来, 有关各向同性介质光栅衍射特性的理论和实验方面的研究成了国内外的热点, 目前已提出很多矢量衍射理论(主要有积分法、微分法^[1-5]和坐标变换法^[6,7])和多种算法[主要有反射-透射系数矩阵(RTCM)算法^[1,2]、增强透射矩阵算法、R-矩阵算法、S-矩阵算法]来解决各种具体光栅的衍射问题。光在各向异性介质中传播不仅依赖于其偏振状态, 而且与波矢方向有关, 因而各向异性介质光栅具有更为独特的光学特性, 例如利用它来实现偏振完全分离^[8]。对于一维各向异性介质光栅, 很多作者利用矢量衍射理论对其的衍射特性进行了分析^[9,10]。最近 Li 在文献[4, 10]的基础上对特殊情形的二维电磁各向异性正交光栅进行了富有成效的研究^[11], 但在光栅区高低折射率比值较大时数值计算收敛性不太理想。另外 Popov 等^[12]利用快速傅里叶因式分解法对普遍情形的光栅进行一些分析, 并在此基础上对各种具体的各向同性或异性光栅作一些讨论, 但其实际处理和计算较繁杂。

本文在一维各向异性介质光栅的研究基础上^[9,10], 利用严格模式理论和反射-透射系数矩阵算法^[2]对任意二维电磁各向异性介质浮雕型光栅的衍射特性进行了理论分析, 并对其退化情形进行了

讨论。该方法物理概念清晰, 算法简洁, 数值计算稳定性和收敛性好, 计算效率高。因此对于计算复杂、计算量大的二维电磁各向异性介质浮雕型光栅, 该方法是一个非常有效的方法。

利用本文的方法进行数值计算, 其数值计算的稳定性和收敛性令人满意。对特殊情形的二维各向同性介质光栅进行计算, 其结果与文献[4, 5]结果完全一致, 间接证明了该方法结果的可靠性。

2 基本理论

2.1 物理模型的建立

二维电磁各向异性介质浮雕型光栅的一个周期单元结构如图 1(a) 所示, 沿 x 和 z 方向的周期分别为 T_x 和 T_z , 浮雕面形总深度为 H , 现在对二维电磁各向异性介质浮雕型光栅进行分层, 第 n 层厚度为 h_n 。为简化讨论, 认为同一层中 I、II 两区域[分别为图 1(b) 中非阴影和阴影部分, 其分界线用 $\Gamma_n(x, z)$ 表示]的相对电容率张量和相对磁导率张量分别为 ϵ_{I} 、 μ_{I} 和 ϵ_{II} 、 μ_{II} , 其电容率张量和磁导率张量统一用 ϵ_n 和 μ_n 表示, 则根据光栅的周期性有

$$\begin{aligned}\epsilon_n(x, z) &= \epsilon_n(x + T_x, z) = \\ &= \epsilon_n(x, z + T_z) = \\ &= \epsilon_n(x + T_x, z + T_z),\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\mu_n(x, z) &= \mu_n(x + T_x, z) = \\ &= \mu_n(x, z + T_z) = \\ &= \mu_n(x + T_x, z + T_z).\end{aligned}\quad (2)$$

在每一层的电容率张量 ϵ_n 和磁导率张量 μ_n 统一用矩阵^[9,10](为对称矩阵)表示为

E-mail: yangsz@sohu.com

收稿日期: 2001-11-15; 收到修改稿日期: 2002-03-11

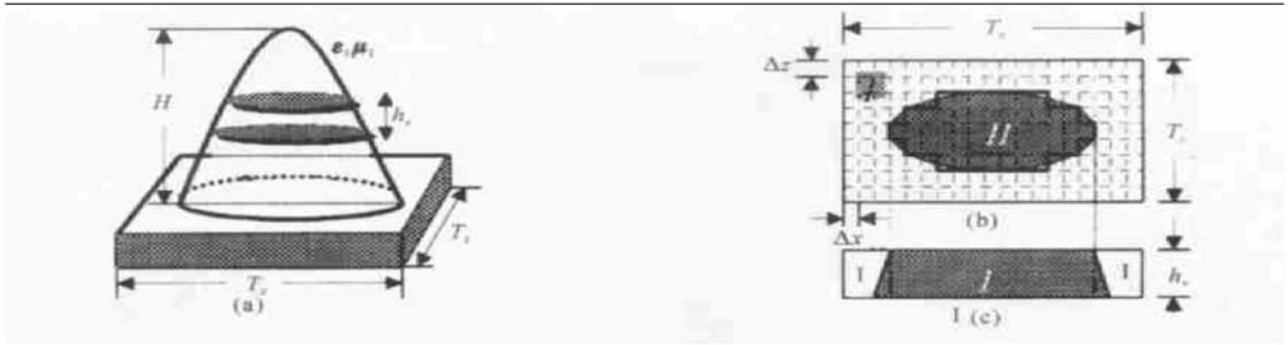


Fig. 1 Diagrammatic structure of surface relief bigratings. (a) A basic period cell; (b) Top view of layer n ; (c) Side view of layer n

$$\epsilon_n = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \mu_n = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

设入射面与 x 轴的夹角为 ϕ , 入射光与 y 轴的夹角为 θ , 电场矢量与入射面的夹角为 ψ , 入射层为各向同性介质), 则对入射线偏振光有^[9]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (4)$$

其中,

$$\sigma = (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2}, \quad \mathbf{k} = k_0(\alpha_0\mathbf{x} + \beta_0\mathbf{y} + \gamma_0\mathbf{z}), \quad \mathbf{E} = E_x\mathbf{x} + E_y\mathbf{y} + E_z\mathbf{z},$$

$$\mathbf{H} = H_x\mathbf{x} + H_y\mathbf{y} + H_z\mathbf{z}, \quad \alpha_0 = \sin\theta\cos\phi, \quad \beta_0 = \cos\theta, \quad \gamma_0 = \sin\theta\sin\phi,$$

α_0, β_0 和 γ_0 分别表征 x, y, z 方向的波矢分量, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 表示入射电磁场振幅矢量。

2.2 本征矩阵方程的推导

在各分层中(层号省略)电磁场的解必须满足麦克斯韦方程, 用分量形式表示为

$$\begin{cases} \partial_y E_z - \partial_z E_y = ik_0 \sigma^{-1} (\mu_{11} H_x + \mu_{12} H_y + \mu_{13} H_z), \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z = ik_0 \sigma^{-1} (\mu_{21} H_x + \mu_{22} H_y + \mu_{23} H_z), \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = ik_0 \sigma^{-1} (\mu_{31} H_x + \mu_{32} H_y + \mu_{33} H_z), \\ \partial_y H_z - \partial_z H_y = ik_0 \sigma^{-1} (\epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y + \epsilon_{13} E_z), \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z = ik_0 \sigma^{-1} (\epsilon_{21} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z), \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = ik_0 \sigma^{-1} (\epsilon_{31} E_x + \epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z), \end{cases} \quad (5)$$

式中, 符号 $\partial_x \rightarrow \partial/\partial x, \partial_y \rightarrow \partial/\partial y, \partial_z \rightarrow \partial/\partial z$. 将第 n 层中电磁基本模式场用傅里叶模级数展开为

$$[\mathbf{E}; \mathbf{H}]^T = [e_{xij}, e_{yij}, e_{zij}, -h_{xij}, h_{yij}, h_{zij}]^T \exp\{ik_0[\alpha_i x + \beta(y - y_n) + \gamma_j z] - i\omega t\}, \quad (6)$$

因子 $\exp(-i\omega t)$ 并不影响问题的求解, 故在以下省略. 其中上标 T 表示列矢量的转置, y_n 表示第 n 层和第 $n+1$ 层的分界面, i 和 j 代表傅里叶模编号:

$$\alpha_i = \alpha_0 + i\lambda/T_x, \quad \gamma_j = \gamma_0 + j\lambda/T_z,$$

$$(i, j) \in (0, \pm 1, \pm 2 \dots \pm M),$$

β 为待求未知量, 表征波矢量 y 分量. 傅里叶模展开法^[5] 是直接将各分层的 $\epsilon_n(x, z)$ 和 $\mu_n(x, z)$ 作傅里叶级数展开, 其收敛性差^[10]; 校正傅里叶展开规则^[13] 充分考虑了每一层中横向界面处 $\Gamma_n(x, z)$ 边界条件的连续性, 从而提高了数值计算的收敛速度.

先将光栅进行水平分层, 对每一分层侧视图中

两介质面形作近似处理[即将图 1(c) 中的阴影梯形以矩形替代], 然后在俯视图对分界线 $\Gamma_n(x, z)$ 作近似处理[即将图 1(b) 划分成长宽分为 $\Delta x, \Delta z$ 的许多相同的小长方形, 以长方形区域内何种介质所占比例的多少来决定属于何种介质, 用相邻边互相垂直的多边形 $\Gamma'_n(x, z)$ 来近似拟合其分界线 $\Gamma_n(x, z)$, 小长方形越小, 则多边形 $\Gamma'_n(x, z)$ 对原分界线 $\Gamma_n(x, z)$ 越逼近]. 将相对电容率张量元和相对磁导率张量元在 x 方向按校正傅里叶展开规则^[10, 13] 展开[具体推导类似于文献^[10](31) 式的推导], 用矩阵表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\partial_y E_z - \partial_z E_y) &= ik_0(P_{11}H_x + P_{12}H_y + P_{13}H_z), \\ \sigma(\partial_z E_x - \partial_x E_z) &= ik_0(P_{21}H_x + P_{22}H_y + P_{23}H_z), \\ \sigma(\partial_x E_y - \partial_y E_x) &= ik_0(P_{31}H_x + P_{32}H_y + P_{33}H_z), \\ \partial_y H_z - \partial_z H_y &= -ik_0\sigma(Q_{11}E_x + Q_{12}E_y + Q_{13}E_z), \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z &= -ik_0\sigma(Q_{21}E_x + Q_{22}E_y + Q_{23}E_z), \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x &= -ik_0\sigma(Q_{31}E_x + Q_{32}E_y + Q_{33}E_z), \end{aligned} \right\} (7)$$

式中

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mu_{11} \end{bmatrix}^{-1} & \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mu_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mu_{11} \end{bmatrix}^{-1} & \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mu_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{22} - \frac{\mu_{12}\mu_{12}}{\mu_{11}} & \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mu_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{23} - \frac{\mu_{12}\mu_{13}}{\mu_{11}} \\ \mu_{23} - \frac{\mu_{12}\mu_{13}}{\mu_{11}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mu_{11} \end{bmatrix}^{-1} & \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mu_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{23} - \frac{\mu_{12}\mu_{13}}{\mu_{11}} & \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mu_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{33} - \frac{\mu_{13}\mu_{13}}{\mu_{11}} \\ \mu_{33} - \frac{\mu_{13}\mu_{13}}{\mu_{11}} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$[\mu]_{xip}(z) = (T_x)^{-1} \int \mu(x, z) \exp[-i2\pi(i-p)x/T_x] dx$, 在 \mathbf{P} 矩阵中对 \mathbf{P}_{rs} 分块矩阵作替代 $\mu_{rs} \rightarrow \epsilon_{rs}$, 得到 \mathbf{Q}_{rs} 分块矩阵, $(r, s) \in (1, 2, 3)$ 。同理, 利用校正傅里叶展开规则对(7)式在 z 方向展开及将其电磁场分量按(6)式展开, 并将 e_y 与 h_y 分量消去, 并进一步整理得到其本征方程:

$$\mathbf{W}\Psi = \Psi\beta, \quad (8)$$

式中, $\Psi = [e_x, e_z, h_z, h_x]^T$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -\alpha B_{22}^{-1} B_{21} - A_{32} A_{22}^{-1} \gamma & A_{32} A_{22}^{-1} \alpha - \alpha B_{22}^{-1} B_{23} & \alpha B_{22}^{-1} \alpha + A_{32} A_{22}^{-1} A_{23} - A_{33} & \alpha B_{22}^{-1} \gamma - A_{32} A_{22}^{-1} A_{21} + A_{31} \\ A_{12} A_{22}^{-1} \gamma - \gamma B_{22}^{-1} B_{21} & -\gamma B_{22}^{-1} B_{23} - A_{12} A_{22}^{-1} \alpha & \gamma B_{22}^{-1} \alpha - A_{12} A_{22}^{-1} A_{23} + A_{13} & \gamma B_{22}^{-1} \gamma + A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} - A_{11} \\ \gamma A_{22}^{-1} \gamma + B_{12} B_{22}^{-1} B_{21} - B_{11} & B_{12} B_{22}^{-1} B_{23} - B_{13} - \gamma A_{22}^{-1} \alpha & -B_{12} B_{22}^{-1} \alpha - \gamma A_{22}^{-1} A_{23} & \gamma A_{22}^{-1} A_{21} - B_{12} B_{22}^{-1} \gamma \\ B_{32} B_{22}^{-1} B_{21} - B_{31} - \alpha A_{22}^{-1} \gamma & \alpha A_{22}^{-1} \alpha + B_{32} B_{22}^{-1} B_{23} - B_{33} & \alpha A_{22}^{-1} A_{23} - B_{32} B_{22}^{-1} \alpha & B_{32} B_{22}^{-1} \gamma - \alpha A_{22}^{-1} A_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= [P_{11} - P_{13} P_{33}^{-1} P_{31}]_z + \\ &\quad [P_{13} P_{33}^{-1}]_z [P_{33}^{-1}]_z^{-1} [P_{33}^{-1} P_{31}]_z, \\ A_{12} &= [P_{12} - P_{13} P_{33}^{-1} P_{32}]_z + \\ &\quad [P_{13} P_{33}^{-1}]_z [P_{33}^{-1}]_z^{-1} [P_{33}^{-1} P_{32}]_z, \\ A_{13} &= [P_{13} P_{33}^{-1}]_z [P_{33}^{-1}]_z^{-1}, \\ A_{21} &= [P_{21} - P_{23} P_{33}^{-1} P_{31}]_z + \\ &\quad [P_{23} P_{33}^{-1}]_z [P_{33}^{-1}]_z^{-1} [P_{33}^{-1} P_{31}]_z, \\ A_{22} &= [P_{22} - P_{23} P_{33}^{-1} P_{32}]_z + \\ &\quad [P_{23} P_{33}^{-1}]_z [P_{33}^{-1}]_z^{-1} [P_{33}^{-1} P_{32}]_z, \\ A_{23} &= [P_{23} P_{33}^{-1}]_z [P_{33}^{-1}]_z^{-1}, \\ A_{31} &= [P_{33}^{-1}]_z^{-1} [P_{33}^{-1} P_{31}]_z, \\ A_{32} &= [P_{33}^{-1}]_z^{-1} [P_{33}^{-1} P_{32}]_z, \\ A_{33} &= [P_{33}^{-1}]_z^{-1}, \end{aligned}$$

$$[P_{rs}]_{zij, pq} = (T_z)^{-1} \int [P_{rs}]_{xip}(z) \times \exp[-i2\pi(j-q)z/T_z] dz,$$

上标“ -1 ”表示对应矩阵的逆矩阵, $(i, j, p, q) \in (0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M)$ 。对 \mathbf{A}_{rs} 矩阵作 $\mathbf{P}_{rs} \rightarrow \mathbf{Q}_{rs}$ 替代, 得到 \mathbf{B}_{rs} 矩阵, $(r, s) \in (1, 2, 3)$ 。取 $L = 2M +$

1, 则 Ψ 是 $4L^2$ 维列矢量, \mathbf{W} 为 $4L^2 \times 4L^2$ 维方阵, α 和 γ 为对角阵, 矩阵 $[\mathbf{A}_{rs}]$ 和 $[\mathbf{B}_{rs}]$ 及其逆矩阵均为 $L^2 \times L^2$ 维方阵。 $[\alpha]_{ij, pq} = \alpha_i \delta_{ip} \delta_{jq}$, $[\gamma]_{ij, pq} = \gamma_j \delta_{ip} \delta_{jq}$, α , β 和 γ 表征第 n 层中对不同级次的波矢量的 x 、 t 、 z 方向的分量。通过对本征矩阵方程(8)进行求解从而得到其本征值 β_+^n 、 β_-^n 和本征矢矩阵:

$$\mathbf{V}^n = \begin{bmatrix} V_{eu}^n & V_{ed}^n \\ V_{hu}^n & V_{hd}^n \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中 β_+^n 、 β_-^n 分别对应于上行波、下行波波矢量的 y 分量, 各有 $2L^2$ 个。 \mathbf{V}^n 是模式场傅里叶展开系数的 $4L^2 \times 4L^2$ 维本征矢矩阵。电磁场的通解是这些模式场解的线性叠加, 表示为

$$\begin{bmatrix} e_s^n \\ h_s^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp[ik_0(\alpha x + \gamma z - \omega t)] \\ \exp[ik_0(\alpha x + \gamma z - \omega t)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{eu}^n & V_{ed}^n \\ V_{hu}^n & V_{hd}^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \exp[ik_0 \beta_+^n (y - y_n) u_+^n] \\ \exp[ik_0 \beta_-^n (y - y_n) d_+^n] \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式中 $e_s^n = [e_x^n, e_z^n]^T$, $h_s^n = [h_x^n, h_z^n]^T$, u_+^n 和 d_+^n 分别表示模式场的上行波、下行波在第 n 层上界面 y_n 处的振幅系数, 由边界条件匹配确定。电磁场在第 n 层上

界面 y_n 处边界条件:

$$\begin{bmatrix} e_s^n \\ h_s^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s^{n+1} \\ h_s^{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{在 } y = y_n \text{ 处}). \quad (11)$$

2.3 利用反射-透射系数矩阵算法进行求解

在图 1 所示的浮雕型光栅中,先得到各分层的通解(10)式后,利用边界条件(11)式来确定各层的振幅系数 u_+^n 和 d_+^n 。由于反射-透射系数矩阵算法具有快速稳定的优点,所以本文采用反射-透射系数矩阵算法递推算法来求解反射和透射振幅系数,其具体过程与文献[1,2]相似, d_+^n 、 d_-^n 、 u_+^n 、 u_-^n 、 R_+^n 、 R_-^n 和 T^n 之间的关系式类似文献[2]中的表达式(此处不再详述其过程)。最后得到矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} V_{eu}^{n+1} + V_{ed}^{n+1} \cdot R_+^{n+1} & - V_{ed}^{n+1} \\ V_{hu}^{n+1} + V_{hd}^{n+1} \cdot R_+^{n+1} & - V_{hd}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^n \\ R_+^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{eu}^n \\ V_{hu}^n \end{bmatrix}, \quad (12)$$

由于在最后一层透射区中 $R_-^N = 0$,利用(12)式可求出 T^{N-1} 和 R_+^{N+1} ,再利用 R_-^n 、 R_+^n 之间的关系式求出 R_-^{N-1} ,反复利用(12)式和 R_-^n 、 R_+^n 之间的关系式可以求出各分层的反射透射系数阵。由于入射波 u_+^1 已给出,又各分层的反射透射系数阵已求出,所以最后光栅的反射-透射振幅系数阵已完全确定。根据反射率和透射率的定义得到其反射率和透射率的表达式:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{ij}^R &= \frac{\text{Re}[e_{xij}^R(h_{zij}^R)^* + e_{zij}^R(h_{xij}^R)^*] I}{\sqrt{\epsilon_1} |\mathbf{u}|^2 \cos \theta}; \\ \eta_{ij}^T &= \frac{\text{Re}[e_{xij}^T(h_{zij}^T)^* + e_{zij}^T(h_{xij}^T)^*] I}{\sqrt{\epsilon_1} |\mathbf{u}|^2 \cdot \cos \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中反射区相对电容率为 ϵ_1 ,反射区与透射区相对磁导率为 1, e^R 、 e^T 分别表示入射层的反射场和透射区的透射场,“*”表示其共轭复数, h^R 和 h^T 类似。

2.4 退化情形的讨论

在 2.3 节中讨论的是坐标轴与各向异性介质的主轴成任意方位关系的一般情形。当电容率张量和磁导率张量的各主轴分别对应与坐标系方向一致的退化情形时,则其电容率张量和磁导率张量的非对角张量元为零,方程(5)式变为

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\partial_y E_z - \partial_z E_y) &= ik_0 \mu_{11} H_x, \\ \sigma(\partial_z E_x - \partial_x E_z) &= ik_0 \mu_{22} H_y, \\ \sigma(\partial_x E_y - \partial_y E_x) &= ik_0 \mu_{33} H_z, \\ (\partial_y H_z - \partial_z H_y) &= -ik_0 \sigma \epsilon_{11} E_x, \\ (\partial_z H_x - \partial_x H_z) &= -ik_0 \sigma \epsilon_{22} E_y, \\ (\partial_x H_y - \partial_y H_x) &= -ik_0 \sigma \epsilon_{33} E_z. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由(8)式知,方矩阵 \mathbf{W} 中的 \mathbf{W}_{11} 、 \mathbf{W}_{12} 、 \mathbf{W}_{21} 、 \mathbf{W}_{22} 、

\mathbf{W}_{33} 、 \mathbf{W}_{34} 、 \mathbf{W}_{43} 和 \mathbf{W}_{44} 均为零矩阵,其它矩阵的表达式也大为简化。因而该退化情形下的本征方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W}_E \mathbf{E} &= \mathbf{H} \beta; \\ \mathbf{W}_H \mathbf{H} &= \mathbf{E} \beta; \\ \mathbf{W}_H \mathbf{W}_E \mathbf{E} &= \mathbf{E} \beta^2, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [e_{xij}, e_{zij}]^T, \\ \mathbf{H} &= [h_{zij}, h_{xij}]^T, \\ \mathbf{W}_E &= \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} A_{22}^{-1} \gamma - B_{11} & -\sqrt{\alpha} A_{22}^{-1} \alpha \\ -\alpha A_{22}^{-1} \gamma & \alpha A_{22}^{-1} \alpha - B_{33} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}_H &= \begin{bmatrix} \alpha B_{22}^{-1} \alpha - A_{33} & \alpha B_{22}^{-1} \gamma \\ \sqrt{\beta} B_{22}^{-1} \alpha & \sqrt{\beta} B_{22}^{-1} \gamma - A_{11} \end{bmatrix}, \\ A_{11} &= [[\mu_{11}^{-1}]_x^{-1}]_z, \\ A_{22}^{-1} &= [[\mu_{22}]_x]_z^{-1}, \\ A_{33} &= [[\mu_{33}]_x^{-1}]_z^{-1} = [[\mu_{33}^{-1}]_z]_x, \end{aligned}$$

对 \mathbf{A}_{11} 、 \mathbf{A}_{22} 和 \mathbf{A}_{33} 矩阵作 $\mu_{rr} \rightarrow \epsilon_{rr}$ 替代,得到 \mathbf{B}_{11} 、 \mathbf{B}_{22} 和 \mathbf{B}_{33} 矩阵, \mathbf{A}_{33} 矩阵的变换在物理意义上是等价的,在数值计算上为了减少矩阵求逆, $[[\mu_{33}^{-1}]_z]_x$ 表示 μ_{33}^{-1} 在 z 方向上的傅里叶展开的逆矩阵,再在 x 方向作傅里叶展开, α 、 γ 与 2.3 节的一致。该本征方程的维数是(8)式的二分之一,其计算量将大大减少。下面通解的求解和反射-透射系数矩阵算法与文献[2]类似,此处不再详述。

同样,对于退化情形二维各向同性浮雕型介质光栅,则有相对电容率和相对磁导率张量元 $\epsilon_{rs} = \epsilon \delta_{rs}$ 和 $\mu_{rs} = \mu \delta_{rs}$,将(15)式中的 A_{rr} 和 B_{rr} 矩阵进一步简化为

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = A_{33} = \mathbf{I} \quad (\mathbf{I} \text{ 为单位矩阵}), \\ B_{11} &= [[\epsilon^{-1}]_x]_z, \\ B_{22}^{-1} &= [[\epsilon]_x]_z^{-1}, \\ B_{33} &= [[\epsilon_{33}^{-1}]_z]_x \end{aligned}$$

3 数值计算

利用该方法进行了数值计算,以考察其数值计算的稳定性、收敛性和可靠性。首先对退化情形二维正交浮雕各向同性光栅^[4,5]进行了计算。具体参量:周期 $T_x = T_z = 2.5 \lambda$, $H = \lambda$, $\theta = \varphi = \psi = 0$, $\epsilon_1 = 2.25$ 、 $\epsilon_{11} = 1$ 。计算表明,不仅计算结果与文献[4]中表 1、文献[5]中图 3(a)完全吻合,而且其数

值计算的收敛速度很快,要优于文献[5]所用的傅里叶模展开法,这间接证明了该方法结果的可靠性,如图2所示,其中 M 表示子波数。

现在进一步在图2的正交光栅基础上,计算电容率张量主轴与坐标轴方向一致的退化情形,入射透射区均为空气,光栅区相对电容率张量分别为 $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_{11} = (5.271, 4.875, 5.271)$ (LiNbO_3), $\mu_1 = \mu_{11} = 1$, 周期 $T_x = T_z = 0.55\lambda$, $\lambda = 1.06\mu\text{m}$, 其它参量与图2相同。

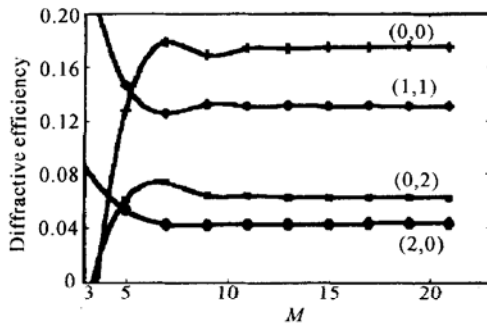


Fig. 2 Calculation results of crossed grating

图3表示总衍射效率和(0,0)级透射效率随子波数的变化关系,由图可以看出,其数值计算的稳定性和收敛性令人满意的。

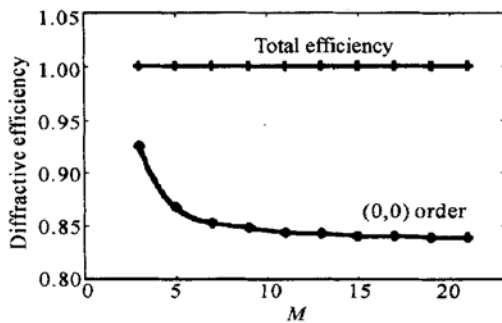


Fig. 3 Diffraction efficiency results of anisotropic crossed grating

为了考察在一般情况下数值计算的稳定性和收敛性,本文对三台阶锥形二维各向异性光栅进行了计算(以文献[3]中图3(b)为模型图),参量为:波长 $\lambda = 632.8\text{ nm}$, 周期 $T_x = T_z = 0.66\lambda$, $h_n = H/N$, H 和 N 分别为总深度与分层数,填充系数 $f_{nx} = f_{nz} = n/4$, n 为层号,电容率张量主轴相对坐标轴转动的欧拉角为 $\Phi = 30^\circ$, $\Theta = 45^\circ$, $\Psi = 18^\circ$, 入射角 $\theta = 30^\circ$, $\phi = 45^\circ$, $\psi = 45^\circ$, $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_{11} = (2.408, 2.502, 2.521)$ (以云母为例,欧拉角的定义与文献[10]一致), $\mu_1 = \mu_{11} = 1.0$, 反射区和透射区均为空气。图4(a)表示(0,0)级反射率随总深度的变化关系,图4(b)表

示总深度 $H = 0.2\lambda$ 时总衍射效率和(0,0)级透射率随子波数的收敛关系。由图可看出其数值计算的稳定性和收敛性是令人满意的。该方法的数值计算表明,只要选取的子波数包括所有的传播波和部分消逝波,其计算总是稳定和收敛的。以上考虑的实例是正交或锥形光栅,对于任意浮雕面形二维电磁各向异性光栅,采用前面介绍的近似多分层进行处理,考虑到篇幅问题,此处不再举例说明。

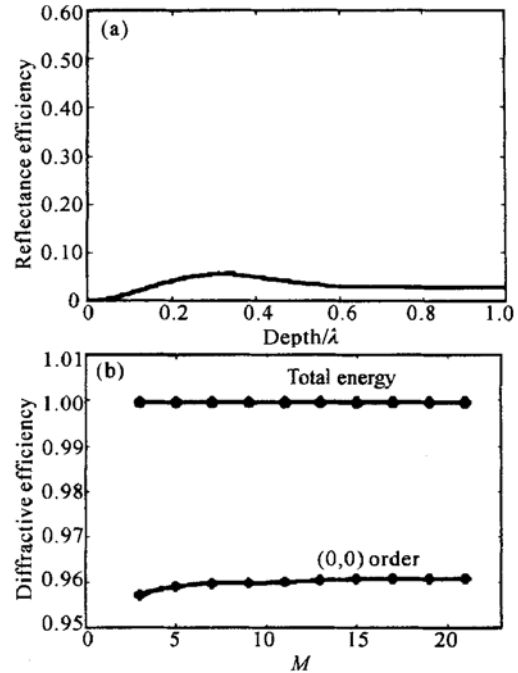


Fig. 4 (a) Relation between reflectance power of (0,0)th order and total depth. (b) Convergence of total energy and (0,0)th transmitted order

总结 利用严格模式理论对二维各向异性浮雕型介质光栅进行了矢量衍射分析,并对其退化情形进行了讨论。该方法物理概念清晰,算法简洁。通过数值计算表明,该方法的数值计算结果可靠,其稳定性和收敛性好,计算效率高,是一种非常有效的方法。其对于实际的二维各向异性浮雕型介质光栅的数值计算模拟和参量优化设计是很有用的。

参 考 文 献

- 1 Fu Kexiang, Wang Zhiheng, Zhang Dayue *et al.*. A model theory and recursion RTCM algorithm for gratings of deep grooves and arbitrary profile. *Science in China (Series A)*, 1999, **42**(6): 636~ 645
- 2 Fu Kexiang, Wang Zhiheng, Zhang Jing *et al.*. Fast processing of Fourier modal method for perpendicularly crossed surface relief binary-period gratings. *Acta Optica Sinica (光学学报)*, 2001, **21**(2): 236~ 241 (in Chinese)
- 3 Yu Weixing, Lu Zhenwu, Wang Peng *et al.*. Vector

- diffracted characteristic of tapered profile two-dimensional subwavelength surface-relief structure. *Acta Photonica Sinica* (光子学报), 2001, **30**(3): 331~ 335 (in Chinese)
- 4 Li Lifeng. New formulation of the Fourier modal method for crossed surface-relief gratings. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1997, **14**(10): 2758~ 2767
- 5 Noponen E, Turunen J. Eigenmode method for electromagnetic synthesis of diffractive elements with three-dimensional profile. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(9): 2494~ 2502
- 6 Harris J B, Preist T W, Sambles J R *et al.*. Optical response of bigratings. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(10): 2041~ 2049
- 7 Granet G. Analysis of diffraction by surface-relief crossed gratings with use of the Chandezon method: Application to multiplayer crossed gratings. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1998, **15**(5): 1121~ 1131
- 8 Liu Shangqing, Chen Yansong. Multilevel binary phase grating polarization device with a birefringent substrate. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(17): 1832~ 1834
- 9 Tang Xionggui, Fu Kexiang, Wang Zhiheng *et al.*. Analysis of rigorous modal theory for arbitrary dielectric gratings made with anisotropic materials. *Acta Optic Sinica* (光学学报), 2002, **22**(7): 774~ 779 (in Chinese)
- 10 Li Lifeng. Reformulation of Fourier modal method for surface-relief gratings made with anisotropic materials. *J. Mod. Opt.*, 1998, **45**(7): 1313~ 1334
- 11 Li Lifeng. Fourier modal method for crossed anisotropic grating. *Proc. SPIE*, 2001, **4438**: 132~ 142
- 12 Popov E, Neviere M. Maxwell equation in Fourier space: Fast-converging formulation for diffraction by arbitrary shaped, periodic, anisotropic media. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 2001, **18**(11): 2886~ 2894
- 13 Li Lifeng. Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structure. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(9): 1870~ 1876

Vector Diffractive Analysis for Two-Dimensional Relief Gratings Made with Anisotropic Medium

Zeng Yangsu^{1,2} Tang Xionggui^{1,2} Fu Kexiang² Wang Zhiheng²

1 Department of Physics, Shaoyang Institute, Shaoyang 422000

2 Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064

(Received 15 November 2001; revised 11 March 2002)

Abstract: Diffractive properties of two-dimensional relief gratings made with electromagnetic anisotropic medium are theoretically analysed by using rigorous modal theory, and the degradation is discussed. Reflection-transmission coefficient matrix (RTCM) algorithm and correct Fourier factorization rules are adopted to improve stability, convergence and calculation efficiency of numerical computation. Numerical computation on gratings shows that the method is satisfying in credibility, stability and convergence.

Key words: applied optics; two-dimensional relief gratings made with anisotropic medium; modal theory, algorithm of reflection-transmission coefficient matrix; correct Fourier factorization