

文章编号 : 0253-2239(2002)09-1051-04

部分相干光束通过硬边光阑的推广光束传输 M^2 因子

楚晓亮 张 彬

(四川大学电子信息学院, 成都 610064)

摘要: 给出部分相干光通过硬边光阑后的强度二阶矩的计算公式, 由此可得到部分相干光通过硬边光阑后的推广光束传输 M^2 因子。以部分相干高斯-谢尔模型光束为例, 推导出相应的 M^2 因子, 并作了数值计算和分析讨论。

关键词: 部分相干光束; 推广 M^2 因子; 硬边光阑; 高斯-谢尔模型(GSM)光束

中图分类号: TN012 文献标识码: A

1 引 言

激光的光束质量一直是人们重视和关心的问题, 已有的研究表明, M^2 因子是一个重要的光束参量, 它可在某些应用中作为判断光束质量优劣的重要参量之一, 具有较高的应用价值。

在实际的工作中, 激光束或多或少的会受到激光元件有限尺寸的限制, 因此, 对截断光束的研究具有更为普遍和实用性意义。然而, 由于截断光束在空间频率域中的强度二阶矩为无穷大, 因此, 由 Siegman^[1]提出的一般的 M^2 因子的定义不再适宜用于截断光束。Herrero 等^[2, 3]又进一步对 M^2 因子概念进行了推广, 重新给出了空间和空间-频率域的强度二阶矩及交叉矩, 使之能够广泛地适用于截断光束。另一方面, 由于许多高功率激光器输出的激光是多模结构, 且具有部分相干性, 这也引起了人们对部分相干光束的 M^2 因子的研究兴趣, Gori 等^[4, 5]对无穷大空间中部分相干光束的 M^2 因子进行了研究。

本文在前人工作基础上, 给出了用交叉谱密度函数表示的部分相干光通过硬边光阑的强度二阶矩, 由此可推导出对非截断和截断光束均适用的推广 M^2 因子, 并以典型的高斯-谢尔模型光束为例, 对其作了分析和数值计算。

2 部分相干光束通过硬边光阑的推广光束传输 M^2 因子

设具有交叉谱密度为 $W(x_1, x_2)$ 的部分相干光束通过大小为 $[-D, D]$ 的硬边光阑, 在此区域以外, $W(x_1, x_2) = 0$ 。为了简单, 选择二维的直角坐标系, 并令空间一阶矩 x 和空间频域一阶矩 u 都为零(这可以通过移动坐标轴做到), 在文献 4, 5 对无穷大空间中部分相干光 M^2 因子的研究基础上, 借鉴文献 2, 3 对完全相干光通过硬边光阑的推广 M^2 因子的处理方法, 可将部分相干光束通过硬边光阑的二阶矩表示成

$$x^2 = \frac{1}{I} \int_{-D}^D x^2 W(x, x) dx, \quad (1)$$

$$u^2 = \frac{1}{k^2 I} \int_{-D}^D \left. \frac{\partial^2 W(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{x_1=x_2=x} dx + \frac{4W(D, D)}{k^2 ID} + \frac{4W(-D, -D)}{k^2 ID}, \quad (2)$$

$$xu = \frac{1}{2ikI} \int_{-D}^D \left[x_1 \frac{\partial W(x_1, x_2)}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial W(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right]_{x_1=x_2=x} dx, \quad (3)$$

式中 k 为波矢, I 为光束总的能量, 可表示为

$$I = \int_{-D}^D W(x, x) dx, \quad (4)$$

* 国家自然科学基金(基金号)资助课题。

E-mail: chu-xiaoliang@sohu.com

收稿日期 2001-10-15

由此可得到部分相干光束通过硬边光阑后的推广 M^2 因子为^[3]

$$M^2 = 2k(x^2 + u^2 - xu)^{1/2}, \quad (5)$$

当 $D \rightarrow \infty$ 时,由(1)式、(2)式可得

$$x^2 = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x, x) dx, \quad (6)$$

$$u^2 = \frac{1}{k^2 I} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 W(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=x} dx. \quad (7)$$

(6)式和(7)式与 Gori 等在文献[4]中给出的部分相干光束在自由空间中的强度二阶矩公式是一致的。

对于完全相干光来说,交叉谱密度函数可表示为

$$W(x_1, x_2) = |E(x_1)E^*(x_2)|, \quad (8)$$

将(8)式代入(1)式~(4)式,可以约化为 Herrero 等人给出的相干光束通过硬边光阑后的强度二阶矩公式

$$x^2 = \frac{1}{I} \int_{-D}^D x^2 |E(x)|^2 dx, \quad (9)$$

$$u^2 = \frac{1}{k^2 I} \int_{-D}^D \left| \frac{\partial E(x)}{\partial x} \right|^2 dx + \frac{4|E(D)|^2}{k^2 ID} + \frac{4|E(-D)|^2}{k^2 ID}, \quad (10)$$

$$xu = \frac{1}{2ikI} \int_{-D}^D \left\{ x \left[\frac{\partial E(x)}{\partial x} \right]^* E(x) - x \frac{\partial E(x)}{\partial x} E^*(x) \right\} dx, \quad (11)$$

$$I = \int_{-D}^D |E(x)|^2 dx. \quad (12)$$

进一步,结合部分相干光通过一阶 ABCD 光学系统传输所满足的广义惠更斯-菲涅尔衍射积分公式^[6],可以证明,本文给出的部分相干光通过硬边光阑后的强度二阶矩公式所满足传输方程与熟知的在无光阑限制时强度二阶矩所满足的传输方程完全相同,从而说明由本文给出的强度二阶矩公式来计算部分相干光束通过硬边光阑的推广光束传输 M^2 因子是合理的。

3 截断高斯-谢尔模型光束的推广 M^2 因子

在直角坐标系下,在 $z = 0$ 处(即高斯-谢尔模型光束的束腰在光阑入射面处),高斯-谢尔模型光束的交叉谱密度函数为^[7]

$$W(x_1, x_2) = I_0 \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{w_0^2}\right) \exp\left[-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_0^2}\right], \quad (13)$$

式中 I_0 为一常数, w_0 、 σ_0 分别为高斯-谢尔模型光束的束腰宽度和相干长度。将(13)式代入(1)式~(4)式可得到高斯-谢尔模型光束通过 $[-D, D]$ 的硬边光阑的空间和空间频域二阶矩及交叉矩为

$$x^2 = w_0^2 \left(\frac{1}{4} - E\delta \right), \quad (14)$$

$$u^2 = \frac{1}{(kw_0)^2} \left[\frac{1}{\beta^2} + 4E\delta \left(\frac{4}{\delta^2} - 1 \right) \right], \quad (15)$$

$$xu = 0, \quad (16)$$

其中 $\beta = (1 + w_0^2/\sigma_0^2)^{1/2}$ 为光束相干参量, $\delta = D/w_0$ 为光束截断参量, $E = \exp(-2\delta^2) \sqrt{2\pi} \text{erf}(\sqrt{2}\delta)$ erf 为误差函数。在计算中运用了误差函数的定义公式^[8]

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad (17)$$

由(5)式、(14)式、(15)式和(16)式可得截断高斯-谢尔模型光束的推广 M^2 因子

$$M^2 = 2 \left[\frac{1}{4\beta^2} + \left(\frac{4}{\delta^2} - \frac{1}{\beta^2} - 1 \right) E\delta - 4E^2 \delta^2 \left(\frac{4}{\delta^2} - 1 \right)^{1/2} \right]. \quad (18)$$

分析(18)式可知,高斯-谢尔模型光束通过硬边光阑的推广 M^2 因子不仅与光束相干参量 β 有关,还与光束截断参量 δ 有关。对(18)式考虑两种极限情况:

$$1) \delta \rightarrow \infty \text{ 时, } M^2 = 1/\beta.$$

$$2) \beta = 1 \text{ 时,}$$

$$M^2 = 2 \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{4}{\delta^2} - 2 \right) E\delta - 4E^2 \delta^2 \left(\frac{4}{\delta^2} - 1 \right)^{1/2} \right].$$

这两个结果分别与文献[5]给出的自由空间中

高斯-谢尔模型光束的 M^2 因子和文献 [3] 中给出的基模高斯光束在束腰处通过硬边光阑所求得的 M^2 因子的结果是完全一致的。

4 数值计算及结果分析

利用 (18) 式做了大量的数值计算, 典型结果如图 1、图 2 所示。图 1 给出高斯-谢尔模型光束的推广 M^2 因子随光束截断参量 δ 的变化曲线。图 2 给出了高斯-谢尔模型光束的推广 M^2 因子随光束相干参量 β 的变化曲线。

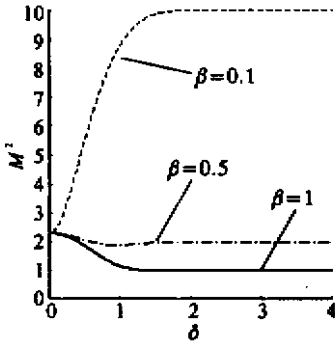


Fig. 1 The M^2 -factor of the GSM beams varies as a function of the beam truncation parameter δ

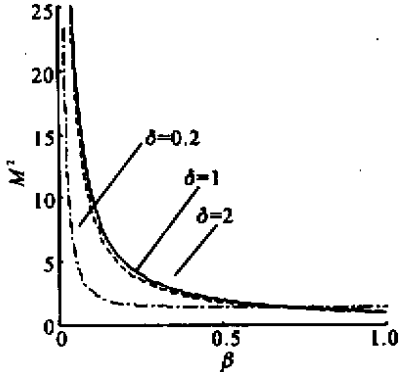


Fig. 2 The M^2 -factor of the GSM beams varies as a function of the coherent parameter β

由图 1 可以看出, 当光束截断参量 $\delta \ll 1$ 时, 即光阑尺寸远小于光束宽度时, 高斯-谢尔模型光束的推广 M^2 因子的数值差别不大。对于光束相干性很差的情况(如 $\beta = 0.1$), M^2 因子的值随着光束截断参量 δ 的增大而增加, 且当 $\delta > 2$ 时, M^2 的值不再变化, 这是由于当高斯-谢尔模型光束相干性很差时, 对于光束截断参量 δ 很小的情况, 光阑只截取光束的很小一部分, 这一部分光束的相干性相对来说比较好, 因此其 M^2 因子的值就小。当光阑孔径变大时, 通过光阑所截取光束的相干性越来越差, M^2 因子将随着光束截断参量 δ 的增大而增大。当 δ 增大到可以认为光阑对光束传输特性的影响可以忽略不

计时(如 $\delta > 2$) 其 M^2 因子就保持不变。而对于光束相干性较好的情况(如 $\beta = 1$), M^2 因子将随 δ 的增加而减小, 当 $\delta > 2$ 时, M^2 因子不再变化。分析图 2 可知, 当光束截断参量 δ 给定时, M^2 因子随光束相干参量 β 增大而明显减小, 这表明相干性越好光束质量就越好。比较 $\delta = 1$ 和 $\delta = 2$ 的情况, 可以看出, 此时 M^2 因子随相干参量 β 的变化曲线差别不太大, 说明当光阑尺寸与光束宽度差不多时, 光阑对光束的影响不大。值得注意的是, 当 δ 较小时(如 $\delta = 0.2$), M^2 因子随 β 的变化曲线与 δ 较大时(如 $\delta = 2$) 的曲线存在明显的交点。其原因是: 一方面, 对于不同的光束截断参量, 高斯-谢尔模型光束的 M^2 因子均随光束相干参量 β 增大而减小, 另一方面, 当光束相干性很差时, M^2 因子随 δ 的增大而增大(如图 1 所示), 而当高斯-谢尔模型光束的相干性比较好时, M^2 因子随 δ 的增大又呈下降趋势, 所以, 两条曲线会存在交叉点。

结论 本文给出了部分相干光通过硬边光阑后的强度二阶矩的计算公式, 由此可得到部分相干光通过硬边光阑后的推广光束传输 M^2 因子。在此基础上, 推导出了高斯-谢尔模型光束通过硬边光阑的推广 M^2 因子的解析表达式。研究结果表明, 高斯-谢尔模型光束的推广 M^2 因子与光束截断参量和光束相干参量有关。一般来说, 对于不同的光束截断参量, 高斯-谢尔模型光束的推广 M^2 因子随相干参量 β 的增大而减小, 对于相干性较差的情况, 高斯-谢尔模型光束的推广 M^2 因子将随光束截断参量的增大而增大, 而对于相干性较好的情况, 高斯-谢尔模型光束的推广 M^2 因子将随光束截断参量的增大而减小。当光束截断参量和相干参量取极限情况时, 本文给出的结果与文献给出的结果相一致。

参 考 文 献

- [1] Sigeman A E. New developments in laser resonators. *Proc. SPIE*, 1990, **1224**: 6~9
- [2] Martinez-Herrero R, Mejias P M. Second-order spatial characterization of hard-edge diffracted beams. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(19):1669~1671
- [3] Martine-Herrero R, Mejias P M, Arias M. Parametric characterization of coherent, lowest-order Gaussian beams propagation through hard-edged apertures. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(2):124~126
- [4] Gori F, Santarsiero M. The change of width of a partially coherent beam on paraxial propagation. *Opt. Commun.*, 1991, **82**(3~4):197~203
- [5] Santarsiero M, Gori F. Spreading properties of beams

radiated by partially coherent Schell-model sources. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1999, **16**(1):106 ~ 112

- [6] Shirai T , Asakura T. Spatial coherence of light generated from a partially coherent source and its control using a source filter. *Optik* ,1993 ,**94**(1):1 ~ 15
- [7] Starikov A , Wolf E. Coherent-mode representation of

Gaussian Schell-model sources and their radiation fields. *J. Opt. Soc. Am. (A)* ,1982 ,**72** :923 ~ 928

- [8] Wang Zuxi , Guo Dunren. *Introduction to Specific Function* (特殊函数概论). Beijing : Science Press ,1979. 367 (in Chinese)

Generalized M^2 -Factor of Partially Coherent Beams Propagating Through Hard-Edged Apertures

Chu Xiaoliang Zhang Bin

(College of Electronics Information , Sichuan University , ChengDu 610064)

(Received 15 October 2001)

Abstract : The formulae of second - order intensity moments of partially coherent beams passing through hard-edged apertures were given. The generalized propagation parameter M^2 -factor of partially coherent beams was obtained. By taking a Gaussian Schell-model (GSM) beam as an example of partially coherent beam , the corresponding generalized M^2 -factor was derived and the numerical calculation and analysis were made.

Key words : partially coherent beams ; generalized M^2 -factor ; hard-edged aperture ; Gaussian Schell-model beams