

文章编号 : 0253-2239(2002)09-1025-07

激光场中两维色噪声的近似计算*

何 英 凌寅生 朱士群

(苏州大学理学院物理系 , 苏州 215006)

摘要 : 从色散型介质中三次激光模型出发 , 通过泛函导数 , 应用小 τ 近似计算两维色噪声 , 得到激光场定态强度分布 , 研究了定态强度分布的极值点随抽运参量和强度噪声相关时间的变化情况。应用平移 $1/N$ 展开方法 , 得到激光场瞬态解 , 即本征值随抽运参量的变化情况。研究结果表明 , 抽运参量和噪声相关时间是激光系统出现一级相变类比的关键因素 , 相位噪声相关时间对强度谱分布中的线宽影响较大。

关键词 : 泛函导数 ; 定态强度分布 ; 一级相变类比 ; 瞬态解 ; 本征值

中图分类号 : O431.2 : O414.22 文献标识码 : A

1 引 言

激光系统中由于抽运涨落引起的反常统计性质受到人们的高度重视。在染料激光和加入抽运噪声的氦氖激光等激光系统中 , 人们观察到强度涨落的加强^[1~4]。人们认识到要对抽运涨落建立正确的模型 , 必须考虑色噪声 , 也就是有一定相关时间的噪声。实际激光系统中存在许多噪声相关时间较长而不能作白噪声处理的系统 , 所以研究噪声相关时间对随机系统各种物理性质的影响 , 是近年来国际学术界十分活跃的课题之一^[5~7]。色散型介质中的激光方程的自发辐射噪声的强度之间和相位之间均存在关联时间。对色噪声 , 常用的处理方法是引进新变量 , 把低维空间中的色噪声转化成高维空间中的白噪声来加以处理^[8]。随着空间维数的增大 , 与朗之万 (Langevin) 方程相应的福克 - 普朗克 (Fokker-Planck) 方程的计算工作量大为增加。应用泛函导数 , 可以不增加随机变量的维数 , 近似处理有色噪声的问题^[9]。因此 , 这种方法引起了人们的极大兴趣。

在以往的一些工作中仅处理一维有色噪声的问题^[2,9]。本文从色散型介质中含有三阶非线性项的三次激光模型出发 , 应用泛函导数 , 对两维色噪声进行小 τ 近似 , 得到激光场定态强度分布 , 分析了一级相变在物理区域发生的条件 , 研究了定态强度分布的极值点随抽运参量和强度噪声相关时间的变化情况。理论计算表明 , 色散型介质三次激光模型中 , 噪声的有色性会使得一级相变类比的现象更为丰富多彩。近年来 , 从实验上和理论上分析非平衡相变成为人们研究的重点之一^[5~7]。色散型介质三次激光模型是两维色噪声的小 τ 近似计算的应用实例之一 , 也是人们进行实验观察非平衡相变的激光系统之一。本文进一步应用平移 $1/N$ 展开方法 , 得到激光场瞬态解 , 即本征值随抽运参量的变化情况 , 发现相位噪声相关时间对强度谱分布中的线宽影响较大。

2 两维色噪声的小 τ 近似

考虑下列两维色噪声问题

$$\dot{X}_i(t) = h_i[X(t)] + g_i[X(t)]\xi_i(t) \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

其中 $\xi_i(t)$ 为高斯型色噪声 , 它的一次矩和二次矩为

$$\xi_i(t) = 0; \quad \xi_i(t)\xi_j(t') = \frac{D_i}{\tau_i}\delta_{ij}\delta(t-t') \quad (i, j = 1, 2), \quad (2)$$

式中 D_i 为噪声强度 , τ_i 为关联时间。

同随机方程 (1) 相对应的密度函数为

$$Q(X, t) = \delta[X(t) - X] = \delta[X_1(t) - X_1] \delta[X_2(t) - X_2], \quad (3)$$

其中 $X(t)$ 为随机变量 , X 为相空间中点的坐标。密度函

* 国家自然科学基金 (19874046) 资助课题。

E-mail : szhu@suda.edu.cn

收稿日期 2001-08-13 ; 收到修改稿日期 2002-01-14

数 $Q(\mathbf{X}, t)$ 满足下列运动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\mathbf{X}, t)}{\partial t} &= \sum_i \{h_i[\mathbf{X}(t)] + g_i[\mathbf{X}(t)]\xi_i(t)\} \frac{\partial \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}]}{\partial X_i(t)} = \\ &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} [h_i(\mathbf{X}) + g_i(\mathbf{X})\xi_i(t)] \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}] = \\ &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} h_i(\mathbf{X}) Q(\mathbf{X}, t) - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} g_i(\mathbf{X}) \xi_i(t) \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}]. \end{aligned} \quad (4)$$

应用 Novikov 公式^[9], 可得 $\xi_i(t) \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}] = \int \partial t' \xi_i(t) \xi_i(t') \frac{\delta \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}]}{\delta \xi_i(t')}$, (5)

式中泛函导数为

$$\frac{\delta \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}]}{\delta \xi_i(t')} = \sum_j \frac{\partial \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}]}{\partial X_j(t)} \frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} = - \sum_j \frac{\partial \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}]}{\partial X_j} \frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')}, \quad (6)$$

所以 $\frac{\partial Q(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} h_i(\mathbf{X}) Q(\mathbf{X}, t) + \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} g_i(\mathbf{X}) \sum_j \frac{\partial}{\partial X_j} \int dt' \xi_i(t) \xi_i(t') \frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}]$, (7)

在小 τ 近似下^[10]: $\xi_i(t) \xi_i(t') \approx 2D_i[\delta(t - t') + \tau_i \frac{d}{dt'} \delta(t - t')]$, (8)

由此可得 $\frac{\partial Q(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} h_i(\mathbf{X}) Q(\mathbf{X}, t) + \sum_i D_i \frac{\partial}{\partial X_i} g_i(\mathbf{X}) \sum_j \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} \Big|_{t'=t} - \tau_i \frac{d}{dt'} \frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} \Big|_{t'=t} \right] \mathfrak{F}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}]$. (9)

由随机微分方程(1)可得积分方程

$$X_j(t) = X_j(0) + \int_0^t ds \{h_j[\mathbf{X}(s)] + g_j[\mathbf{X}(s)]\xi_j(s)\}, \quad (10)$$

由此可得 $\frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} = \delta_{ij} g_i[\mathbf{X}(t')] + \int_0^t ds \sum_k \frac{\partial}{\partial X_k(s)} \{h_j[\mathbf{X}(s)] + g_j[\mathbf{X}(s)]\xi_j(s)\} \frac{\delta X_k(s)}{\delta \xi_i(t')}$; (11)

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} = \sum_k \frac{\partial}{\partial X_k(t)} \{h_j[\mathbf{X}(t)] + g_j[\mathbf{X}(t)]\xi_j(t)\} \frac{\delta X_k(t)}{\delta \xi_i(t')}. \quad (12)$$

(12) 式是变系数的耦合线性微分方程组, 作退耦近似:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} - \frac{\partial}{\partial X_j(t)} \{h_j[\mathbf{X}(t)] + g_j[\mathbf{X}(t)]\xi_j(t)\} \frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} \approx \\ \frac{\partial}{\partial X_k(t)} \{h_j[\mathbf{X}(t)] + g_j[\mathbf{X}(t)]\xi_j(t)\} \left[\frac{\delta X_k(t)}{\delta \xi_i(t')} \right]_{t=t'} \quad (k \neq j), \end{aligned} \quad (13)$$

由(11)式可知 $\frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} \Big|_{t=t'} = \delta_{ij} g_i[\mathbf{X}(t)]$, (14)

由此可以解出变分导数 $\frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')}$, 进而可以求出 $\frac{d}{dt'} \frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} \Big|_{t'=t}$. 在 $\frac{d}{dt'} \frac{\delta X_j(t)}{\delta \xi_i(t')} \Big|_{t'=t}$ 中包含 $\xi_k(t)$ 的项, 如果忽略 $Q(\mathbf{X}, t)$ 的高阶偏导数, 即作最佳福克-普朗克近似, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\mathbf{X}, t)}{\partial t} &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} h_i(\mathbf{X}) Q(\mathbf{X}, t) + \sum_i D_i \frac{\partial}{\partial X_i} g_i(\mathbf{X}) \frac{\partial}{\partial X_i} H_i(\mathbf{X}) Q(\mathbf{X}, t) + \\ &= D_1 \tau_2 \frac{\partial}{\partial X_1} g_1(\mathbf{X}) \frac{\partial}{\partial X_2} g_1(\mathbf{X}) \frac{\partial h_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} Q(\mathbf{X}, t) + D_2 \tau_1 \frac{\partial}{\partial X_2} g_2(\mathbf{X}) \frac{\partial}{\partial X_1} g_2(\mathbf{X}) \frac{\partial h_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} Q(\mathbf{X}, t), \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $H_i(\mathbf{X}) = g_i(\mathbf{X}) + \tau_i \left[g_i^2(\mathbf{X}) \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{h_i(\mathbf{X})}{g_i(\mathbf{X})} - h_j(\mathbf{X}) \frac{\partial g_i(\mathbf{X})}{\partial X_j} \right] \quad (j \neq i)$. (16)

3 小 τ 近似在激光方程中的应用

色散型介质中的激光方程,可用三次型方程描述^[11]

$$\dot{E}_i = (a - |E|^2)E_i + \Gamma_i \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

其中 $E = E_1 + iE_2$ 为光场的复振幅, $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$ 为自发辐射噪声。如果 Γ 为白噪声,有

$$\begin{aligned} \Gamma_i(t)\Gamma_j(t') &= 2\delta_{ij}\chi(t-t') \\ \Gamma_i(t) &= 0. \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (18)$$

式中 a 为抽运参量,噪声强度已重整化为 1。 $a < 0$ 表明激光在低于阈值条件下工作,光腔内仅有热光场; $a = 0$ 表明激光处于阈值; $a > 0$ 表明激光在高于阈值条件下工作,系统有激光输出。

用强度 $I = E_1^2 + E_2^2$ 与相位 $\varphi = \arctan(E_2/E_1)$ 作为变量(17)式可改写为^[8]

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \chi(a - I)I + 2 + 2\sqrt{I}\Gamma_I, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{1}{\sqrt{I}}\Gamma_\varphi, \end{aligned} \quad (19)$$

其中随机变量 Γ_I 、 Γ_φ 分别表示强度和相位噪声,它们满足

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_I(t) &= \Gamma_\varphi(t) = 0, \\ \Gamma_I(t)\Gamma_I(t') &= \Gamma_\varphi(t)\Gamma_\varphi(t') = \\ &2\chi(t-t'), \\ \Gamma_I(t)\Gamma_\varphi(t') &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

显然(18)式和(20)式描述的是白噪声,它只是关联时间很短时真实噪声的近似。如果考虑关联时间对激光统计性质的影响,则需要考虑色噪声:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_I(t)\Gamma_I(t') &= \frac{1}{\tau_1}\exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right), \\ \Gamma_\varphi(t)\Gamma_\varphi(t') &= \frac{1}{\tau_2}\exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中 τ_1 、 τ_2 分别表示强度和相位噪声的相关时间。对于(19)式的激光方程,有

$$\left. \begin{aligned} h_1(I, \varphi) &= \chi(a - I)I + 2, \\ g_1(I, \varphi) &= 2\sqrt{I}, \\ h_2(I, \varphi) &= 0, \\ g_2(I, \varphi) &= -1/\sqrt{I}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将(21)式中的关联时间分别写成 τ_1 、 τ_2 , 则从(16)式可得

$$\left. \begin{aligned} H_1(I, \varphi) &= 2I^{1/2} + 2\tau_1(aI^{1/2} - 3I^{3/2} - I^{-1/2}), \\ H_2(I, \varphi) &= -I^{-1/2} - \tau_2(aI^{-1/2} - I^{1/2} + I^{-3/2}). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

相应的福克-普朗克方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(I, \varphi, t)}{\partial t} &= -2\frac{\partial}{\partial I}\left[2 + aI - I^2 + \tau_1\left(a - 3I - \frac{1}{I}\right)\right]Q(I, \varphi, t) + \\ &4\frac{\partial^2}{\partial I^2}\left[I + \tau_1(aI - 3I^2 - 1)\right]Q(I, \varphi, t) + \left[\frac{1}{I} + \tau_2\left(\frac{a}{I} - 1 + \frac{1}{I^2}\right)\right]\frac{\partial^2 Q(I, \varphi, t)}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

3.1 稳态解

与 φ 和 t 无关的稳态解 $Q_{st}(I)$ 可从下列一阶方程求出

$$\frac{d}{dI}\left[I + \tau_1(aI - 3I^2 - 1)\right]Q_{st}(X) = \frac{1}{2}\left[2 + aI - I^2 + \tau_1\left(a - 3I - \frac{1}{I}\right)\right]Q_{st}(X). \quad (25)$$

准确到 τ_1 的一阶项,稳态解 $Q_{st}(X)$ 可表示为

$$Q_{st}(X) = N\exp\left[-\frac{1}{4}(I - a)^2\right]\left\{1 + \tau_1\left[\frac{1}{2I} - \frac{1}{2}(a^2 - 8)I + aI^2 - \frac{1}{2}I^3\right]\right\}. \quad (26)$$

如果将稳态解写成下列指数形式,则便于对相变情况进行解析分析^[9]

$$Q_{st}(X) = N\exp[-\Phi(x)], \quad \Phi(x) = \frac{1}{4}(I - a)^2 - \tau_1\left[\frac{1}{2I} - \frac{1}{2}(a^2 - 8)I + aI^2 - \frac{1}{2}I^3\right]. \quad (27)$$

小 τ 展开中的一个最大问题是在扩散系数为负的区域中会出现非物理解。在(24)式中,扩散系数为

$$D_{II}(I) = 4\left[I + \tau_1(aI - 3I^2 - 1)\right]. \quad (28)$$

$D_{II}(I) > 0$ 的区域为

$$\frac{1 + a\tau_1 - \sqrt{(1 + a\tau_1)^2 - 12\tau_1^2}}{6\tau_1} < I < \frac{1 + a\tau_1 + \sqrt{(1 + a\tau_1)^2 - 12\tau_1^2}}{6\tau_1}, \quad (29)$$

当 $|\tau_1| \ll 1$ 时, 上式可近似化成

$$\tau_1 < I < \frac{1}{3\tau_1} + \frac{a}{3} - \tau_1, \quad (30)$$

它可足够精确地代替 $(0, +\infty)$ 区间, 但计算(27)式中的归一化系数 N 时, 只能用(29)式或(30)式的区间。在 τ_1 - a 平面上, $Q_{st}(I)$ 的最可几强度 I_{MP} 突变(第一类相变)的分界线可由以下方程

$$d\Phi/dI = 0, \quad (31a)$$

$$d^2\Phi/dI^2 = 0 \quad (31b)$$

确定^[12,13]。由(31a)得

$$I^4 + \frac{1-4a\tau_1}{3\tau_1}I^3 - \frac{a+(8-a^2)\tau_1}{3\tau_1}I^2 + \frac{1}{3} = 0. \quad (32a)$$

令 $\alpha = \frac{1-4a\tau_1}{24\tau_1}$, $\beta = \frac{a+(8-a^2)\tau_1}{12\tau_1}$, 则上式可改写为

$$I^4 + 8\alpha I^3 - 4\beta I^2 + \frac{1}{3} = 0. \quad (32b)$$

由(31)式可得

$$I^2 + 6\alpha I - 2\beta = 0. \quad (33)$$

由此可以求出 α - β 平面上 $Q_{st}(I)$ 的最可几强度 I_{MP} 发生突变的分界线

$$\alpha = \frac{1}{12I^3} - \frac{I}{4}, \quad \beta = \frac{1}{4I^2} - \frac{1}{4}I^2. \quad (34)$$

图1作出了上述曲线, 用字母 c 表示。容易求出抽运参量 a 、关联时间 τ_1 与 α 、 β 的关系为

$$\left. \begin{aligned} a &= -4\alpha \pm 2\sqrt{4\alpha^2 + \beta - \frac{2}{3}}, \\ \frac{1}{\tau_1} &= 8\alpha \pm 8\sqrt{4\alpha^2 + \beta - \frac{2}{3}}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

因此, 当 $\alpha > 0$ 时, α - β 平面上的物理区域为 $\beta \geq 2/3 - 4\alpha^2$, 曲线 $\beta = 2/3 - 4\alpha^2$ 用字母 d 表示;

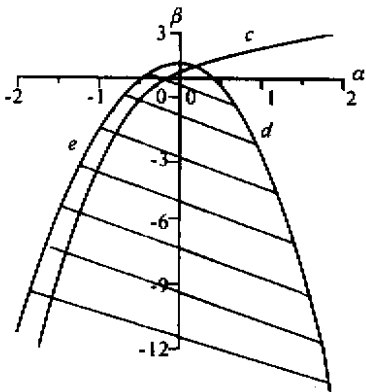


Fig. 1 Parameter plane (β - α) of the first-order-like transition

$a < 0$ 时, α - β 平面上的物理区域为 $\beta > 2/3 - 3\alpha^2$, 曲线 $\beta = 2/3 - 3\alpha^2$ 用字母 e 表示。图中曲线 d 、 e 是物理区域与非物理区域的分界线, 曲线上方是物理区域, 曲线下方即划斜线区域是非物理区域。曲线 c 是相变临界线, 当参量在曲线上方物理区域取值时, 定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 在 $I > 0$ 处有两个极值, 一相对极大与一相对极小; 当参量在曲线下方物理区域取值时, 定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 随着强度 I 单调递减。这是色噪声引起的一级相变。

图2作出了 $\alpha > 0$ 时相变曲线以及相变图中 M 、 N 、 P 和 R 点定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 的曲线。图 $\chi(a)$ 中, 曲线 c 为第一象限一级相变临界线, 曲线 d 为物理区域与非物理区域分界线, $N(8.33, 90.25)$ 为相变曲线 c 上方物理区域内一点, 相应的抽运参量 $a = 5$, 对应在高于阈值条件下工作的激光, 强度噪声的关联时间 $\tau_1 = 0.0046$, 定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 在 $I > 0$ 处有一相对极大与一相对极小, 如图 $\chi(b)$ 中 n 曲线所示; $M(10, -93.08)$ 为相变曲线下方物理区域内一点, 相应的抽运参量 $a = -5$, 对应在低于阈值条件下工作的激光, 强度噪声的关联时间 $\tau_1 = 0.0046$, 这时, 定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 随着 I 增大而单调减小, 如图 $\chi(b)$ 中 m 曲线所示。结果说明, 在抽运参量 a 和噪声相关时间 τ_1 的共同控制下, 激光参量区域出现相变临界曲线, 当 τ_1 较小时, 图 $\chi(b)$ 清楚显示 $Q_{st}(I)$ 峰值点位置经历了从 $I = 0$ 跳跃到 $I \neq 0$ 的相变过程。

在图 $\chi(a)$ 中, $P(0.072, 7.64)$ 和 $R(1.74, -10.47)$ 为相变曲线 c 上方和下方物理区域内的一点, 相应的抽运参量分别为 $a = 5$ 和 $a = -5$, 对应在高于阈值和低于阈值条件下工作的激光, 它们的强度噪声的关联时间为 $\tau_1 = 0.046$, 都是 N 点和 M 点的噪声关联时间的 10 倍。同 R 点和 M 点处参量相对应的定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 以及 $\tau_1 = 0$ 时的 $Q_{st}(I)$ 均画在图 $\chi(c)$ 中。从图 $\chi(c)$ 可见, 定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 的峰出现在 $I = 0$ 处, $Q_{st}(I)$ 随着 I 的增大而单调减小, 但是, 随着 τ_1 从 0 增加到 0.046, $Q_{st}(I)$ 峰的顶部也从非常平坦变得非常锐利, 显然, 噪声的有色性使得 $Q_{st}(I)$ 更集中在 $I = 0$ 处。同 P 点和 N 点处参量相对应的定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 以及 $\tau_1 = 0$ 时的 $Q_{st}(I)$ 均画在图 $\chi(d)$ 中。从图 $\chi(d)$ 可见, 当强度噪声为白噪声时, $\tau_1 = 0$, 定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 在 $I > 0$ 处有一极大。但是, 当强度噪声为

色噪声时, $\tau_1 \neq 0$, 定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 中出现两个相对极大与一个相对极小, 其中一个极大出现在 $I = 0$ 处, 另一个极大出现在 $I > 0$ 处, 而且, 随着 τ_1

的增加, $Q_{st}(I)$ 中 $I > 0$ 处峰的高度降低, $I = 0$ 处峰的高度迅速增加。由此可见, 噪声的有色性使激光场发生的一级相变类比现象更加复杂。

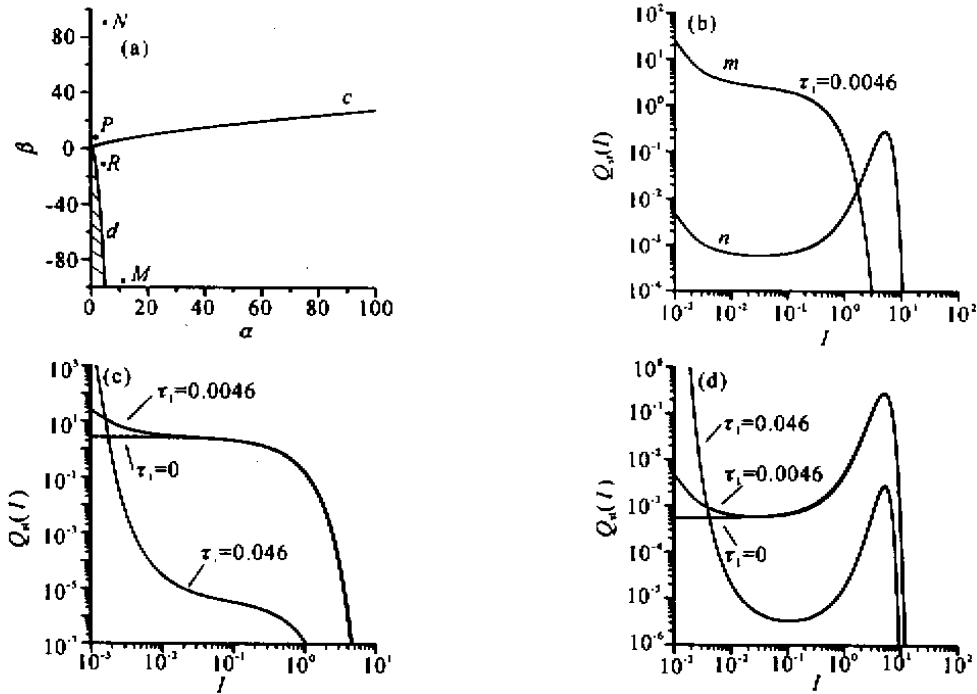


Fig. 2 (a) Parameter plane (β, α) of the first-order-like transition for $\alpha > 0$; (b) Stationary intensity distribution function $Q_{st}(I)$ for different pump parameter a when intensity noise correlation time $\tau_1 = 0.0046$, $m : a = -5$, $n : a = 5$; (c) Stationary intensity distribution function $Q_{st}(I)$ for different intensity noise correlation time τ_1 when pump parameter $a = -5$; (d) Stationary intensity distribution function $Q_{st}(I)$ for different intensity noise correlation time τ_1 when pump parameter $a = 5$

3.2 瞬态解

从稳态解的讨论中可以知道, 相位噪声关联时间 τ_2 对稳态解没有影响。为了讨论相位噪声关联时

间 τ_2 的影响, 必须考虑瞬态解。为了清楚显示 τ_2 的影响, 在下面的讨论中, 假定强度噪声的关联时间 $\tau_1 = 0$ 。这时福克-普朗克方程 (24) 变成

$$\frac{\partial Q(I, \varphi, t)}{\partial t} = -2 \frac{\partial}{\partial I} (2 + aI - I^2) Q(I, \varphi, t) + 4 \frac{\partial^2}{\partial I^2} I Q(I, \varphi, t) + \left[\frac{1}{I} + \tau_2 \left(\frac{a}{I} - 1 + \frac{1}{I^2} \right) \right] \frac{\partial^2 Q(I, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} \quad (36)$$

如果令 $I = r^2$, $W(r, \varphi, t) = Q(I, \varphi, t) \frac{dI}{dr} = 2rQ(I, \varphi, t)$, 则 $W(r, \varphi, t)$ 满足

$$\frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[(a - r^2)r + \frac{1}{r} \right] W(r, \varphi, t) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} W(r, \varphi, t) + \left[\frac{1}{r^2} + \tau_2 \left(\frac{a}{r^2} - 1 + \frac{1}{r^4} \right) \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \quad (37)$$

设福克-普朗克方程 (37) 的特解为

$$W_k(r, \varphi, t) = P_k(r, t) \exp(ik\varphi), \quad (38)$$

则 $P_k(r, t)$ 满足

$$\frac{\partial P_k(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[(a - r^2)r + \frac{1}{r} \right] P_k(r, t) - k^2 \left[\frac{1}{r^2} + \tau_2 \left(\frac{a}{r^2} - 1 + \frac{1}{r^4} \right) \right] P_k(r, t), \quad (39)$$

同 (37) 式对应的稳态解为

$$W_{st}(r) = N r \exp\left(\frac{ar^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right) = N \exp\left[-\left(\frac{r^4}{4} - \frac{ar^2}{2} - \ln r\right)\right], \quad (40)$$

由 Van Kampen 方法^[8]可知

$$P_k(r, t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r^4}{4} - \frac{ar^2}{2} - \ln r\right)\right] \sum_{n=0}^{+\infty} C_{kn} \psi_{kn}(r) \exp(-\lambda_{kn} t), \quad (41)$$

式中 $\psi_{kn}(r)$ 是满足下列薛定谔方程的解,

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \left[\frac{k^2 - 1/4}{r^2} + a + \left(\frac{a^2}{4} - 2\right)r^2 - \frac{ar^4}{2} + \frac{r^6}{4} + \tau_2 k^2 \left(\frac{a}{r^2} - 1 + \frac{1}{r^4}\right) \right] \right\} \psi_{kn}(r) = -\lambda_{kn} \psi_{kn}(r). \quad (42)$$

应用平移 $1/N$ 展开方法^[14], 图 3 中给出了本征值 $\lambda_{10} \sim \lambda_{14}$ 随抽运参量 a 的变化情况。本征值 λ_{11} 、 λ_{12} 、 λ_{13} 、 λ_{14} 在两种情形基本重合[图 3(b)~图 3(e)], 而 $\tau_2 = 0.1$ 色噪声情形下, λ_{10} 的值比白噪声

情形下高[图 3(a)], 由此可见, 相位噪声的关联时间 τ_2 对 λ_{10} 的影响较大, 对 λ_{11} 、 λ_{12} 、 λ_{13} 、 λ_{14} 影响较小, 而 λ_{10} 给出了强度谱分布中的线宽^[8], 所以相位噪声的关联时间对强度谱分布中的线宽影响较大。

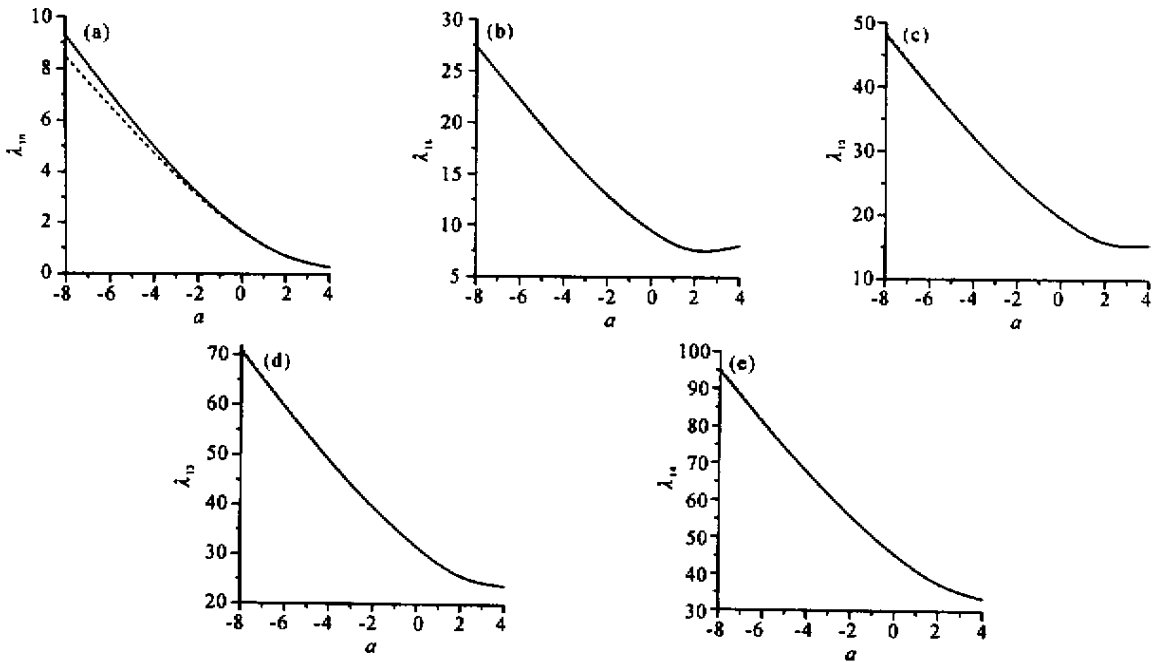


Fig. 3 The changes of eigenvalues λ_{10} 、 λ_{11} 、 λ_{12} 、 λ_{13} 、 λ_{14} with pump parameter a . short dash: $\tau_2 = 0$, solid line: $\tau_2 = 0.1$

讨论 本文从色散型介质中三次激光模型出发, 应用泛函导数, 在小 τ 近似下计算了两维色噪声, 得到两维福克-普朗克方程, 进而导出激光场定态强度分布, 分析了一级相变在物理区域发生的条件, 从理论上得出在抽运参量 a 与强度噪声相关时间 τ_1 控制下发生一级相变类比的参量区域。研究了定态强度分布的极值点随抽运参量和强度噪声相关时间的变化情况。结果表明, a 与 τ_1 的共同作用使激光场定态强度分布 $Q_{st}(I)$ 在物理区域发生一级相变类比, 使 $Q_{st}(I)$ 峰值点位置经历了从 $I=0$ 跳跃到 $I \neq 0$ 的相变过程。噪声是激光中诱导一级相变类比的重要因素, 而噪声的有色性使得一级相变的现象更加丰富和复杂。本文用 Van Kampen 方法进一步研究相位噪声相关时间 τ_2 对激光场瞬态解的影响, 应用平移 $1/N$ 展开方法, 得到本征值随抽运参量的变化情况, 发现 τ_2 对本征值 λ_{11} 、 λ_{12} 、 λ_{13} 和 λ_{14} 的影

响很小, 而对 λ_{10} 影响较大, λ_{10} 代表强度谱分布中的线宽, 即相位噪声相关时间 τ_2 对强度谱分布中的线宽产生很大影响。

参 考 文 献

- [1] Jung P, Hänggi P. Dynamical system: A unified colored-noise approximation. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35**(10): 4464 ~ 4466
- [2] Lett P, Gage E C, Chyba T H. Colored-noise-induced first-order phase transition in a single-mode dye laser. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35**(2): 746 ~ 751
- [3] Aguado M, San Miguel M. Analysis of a dye-laser model including quantum noise. *Phys. Rev. (A)*, 1988, **37**(2): 450 ~ 455
- [4] Young M R, Singh S. Observation of the 'Brownian motion' of the electric field in a laser. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35**(3): 1453 ~ 1456
- [5] Lin L, Cao L, Wu D. First-order-like transition for colored-noise saturation models of dye lasers. *Phys. Rev.*

- (A), 1993 , **48** (1) : 739 ~ 745
- [6] Jia Y , Li J. Steady-state analysis of a bistable system with additive and multiplicative noises. *Phys. Rev. (E)*, 1996 , **53** (6) : 5786 ~ 5792
- [7] Mei D , Xie G , Cao L *et al.*. Mean first-passage time of a bistable kinetic model driven by cross-correlated noises. *Phys. Rev. (E)*, 1999 , **59** (4) : 3880 ~ 3883
- [8] Risken H. *Fokker-Planck Equation*. Berlin : Springer , 1984 . 50 ~ 56
- [9] Sancho J M , San Miguel M , Katz S L *et al.*. Analytical and numerical studies of multiplicative noise. *Phys. Rev. (A)*, 1982 , **26** (3) : 1589 ~ 1609
- [10] Sancho S M , San Miguel M. External non-white noise and nonequilibrium phase transitions. *Z. Physik (B)*, 1980 , **36** (4) : 357 ~ 364
- [11] Li Fuli. *Higher Laser Physics* (高等激光物理学). Hefei : University of Science and Technology of China Press , 1992 (in Chinese)
- [12] Cao L , Wu D , Lin L. First-order-like transition for colored saturation models of dye lasers : Effects of quantum noise. *Phys. Rev. (A)*, 1994 , **49** (1) : 506 ~ 516
- [13] Gilmore R. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. New York : John Wiley & Sons , 1981 . 58 ~ 64
- [14] Imbo T , Pagnamenla A , Sukhatme U. Energy eigenstates of spherically symmetric potentials using the shifted $1/N$ expansion. *Phys. Rev. (D)*, 1984 , **29** (8) : 1669 ~ 1681

Approximate Calculation of Two-Dimensional Colored Noise in a Laser Field

He Ying Ling Yinsheng Zhu Shiqun

(Department of Physics , College of Sciences , Suzhou University , Suzhou 215006)

(Received 13 August 2001 ; revised 14 January 2002)

Abstract : Functional derivation is employed to analyze the two-dimensional colored noise in the third-order laser model. The stationary intensity distribution is derived. The variation of the most probable intensity with pump parameter and noise intensity correlation time is investigated. With the shifted $1/N$ expansion , the instantaneous solution of the laser model , *i. e.* , the change of eigenvalues with the pump parameter , is obtained. It is shown that the pump parameter and intensity noise correlation time are the major factors of the first-order-like transition. Angular noise correlation time has great influence on the linewidth in the intensity spectrum.

Key words : functional derivation ; steady-state intensity distribution ; first-order-like phase transition ; instantaneous solution ; eigenvalue