

文章编号 : 0253-2239(2002)08-0962-05

慢布拉格类孤子的传播特性

李松茂 王 奇

(上海大学理学院, 上海 200436)

摘要: 在耦合模理论的基础上, 分析了线性周期结构的色散关系, 给出了一维无限长的克尔类非线性介质周期结构中的慢布拉格类孤子解。并且指出, 增加脉冲能量会导致群速度色散效应增强。在非线性的作用下, 禁带宽度会变小, 波的频率也会发生偏移, 其偏移量主要取决于失谐因子、传播速度、波振幅强度以及非线性系数等参量。

关键词: 类孤子; 慢布拉格孤子; 耦合模理论

中图分类号: TN011 文献标识码: A

1 引 言

电磁波传播在周期结构中, 会出现传播的禁带和通带, 这是周期介质的特性。当入射波频率位于布拉格频率附近时, 结构色散在系统中占主导地位, 材料色散和波导色散等因素可被忽略不计^[1]。人们可以通过控制其结构参数而控制电磁波的传播特性, 这很早就被应用在多种微波器件中。而当电磁波足够强、非线性作用不能被忽略时, 传播在周期结构中的电磁波会出现双稳输出^[2,3]及“隙孤子(gap soliton)”^[4-11]等现象。

在描述周期结构中传播的电磁波时, 人们一般用耦合模理论来处理^[12]。这是因为所考虑的问题一般都属于周期性的微扰作用较弱的入射频率又比较接近布拉格频率的情况。这时, 周期结构所导致的色散在系统中占主导地位。人们一般将试解写作一个前向波与一个反向波之和。在慢变振幅近似下, 人们可以获得两个耦合方程。线性情况时, 方程主要依靠周期微扰项使两个方程耦合, 而当计入非线性效应时, 两个模式之间还可以通过交叉相位调制作用发生耦合, 这时的耦合方程是非线性的。

在均匀非线性介质中, 群速度色散效应和非线性效应分别使频率产生正负啁啾, 这二者的平衡导致形成“常规孤子”。在非线性的周期结构中, 当周期结构的空间周期与入射波长可比拟时, 可形成隙孤子在此结构中传播, 其形成机制与“常规孤子”类似。区别为: 均匀介质中的群速度色散主要来自于均匀介质本身, 而在周期介质中, 占主导地位的群速度色

散效应是由周期变化的线性介电常数所造成。由于在制造工艺上可对周期结构的参数进行控制, 于是, 根据所感兴趣的光孤子的行为来设计、制造一些结构便成为可能, 这在基础研究和工程应用方面都有着广泛的应用前景。

2 基本方程

从麦克斯韦方程组出发, 考虑一维的情况, 电磁波沿 $+z$ 方向传播, 其波动方程为

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\epsilon(z)}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

其中介电常数 $\epsilon(z)$ 沿 z 方向周期调制, 由下式给出 $\epsilon(z) = n_0^2 + 2n_0 n_1 \cos(2k_B z) + n_0 n_2 |E|^2$, (2) 其中, n_0 为均匀介质的介电常数, n_1 为周期结构的调制深度, $k_B = \pi/\Lambda$ 为布拉格波数, 而 Λ 为周期结构的空间周期, n_2 为材料的非线性系数。这里讨论的都是在周期微扰和非线性相互作用较弱的假设下进行的, 即有 $0 < n_1 \ll n_0, n_2 \ll n_0$ 。

考察沿 $+z$ 方向传播的电磁波, 入射频率 ω 位于布拉格频率 $\omega_B = \pi c/n_0 \Lambda$ 附近。根据耦合模理论, (1) 式有如下形式的解

$$E(z, t) = E_+(z, t) \exp[-i(\omega t - lz)] + E_-(z, t) \exp[-i(\omega t + kz)], \quad (3)$$

其中, $E_{\pm}(z, t)$ 为前向波和后向波的振幅。假设这个振幅函数在时间上与一个光波周期相比属慢变, 在空间上与介电常数的变化周期相比也属慢变, 于是可以得到 $E_{\pm}(z, t)$ 所满足的非线性耦合模方程

$$i \left[\frac{\partial E_{\pm}}{\partial z} + \frac{1}{v_{g0}} \frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} \right] + \kappa E_{\mp} \exp(-2i\delta z) +$$

$$\chi |E_+|^2 + 2|E_-|^2 E_+ = 0, \quad (4a)$$

$$i \left[\frac{\partial E_-}{\partial z} - \frac{1}{v_{g0}} \frac{\partial E_-}{\partial t} \right] + \kappa E_+ \exp(2i\delta z) +$$

$$\chi |E_-|^2 + 2|E_+|^2 E_- = 0. \quad (4b)$$

其中, $v_{g0} = c/n_0$ 为不考虑色散因素时波传播在均匀线性介质 n_0 中的群速度, $\kappa = \pi n_1/\lambda_0$, 代表了周期性微扰所带来的线性耦合作用; $\delta = n_0(\omega - \omega_B)/c$, $\omega_B = \pi c/(n_0 \Lambda)$ 为布拉格频率, δ 为失谐因子, 代表了入射频率偏离布拉格频率的程度; $\gamma = \pi n_2/\lambda_0$, 体现了非线性的作用, 包括一份自相位调制作用和两份交叉相位调制作用。

在导出(4)式的时候假设非线性响应是瞬时的, 并忽略了材料色散的影响, 这是因为, 本文所考虑的是入射频率接近布拉格共振频率的情况, 这时候周期结构导致的色散起主要作用。

3 周期结构的线性色散关系

在解非线性耦合波方程之前, 有必要先简单地讨论一下线性周期结构的色散关系, 这有助于对周期结构的理解。忽略(4)式里的非线性作用项, 于是方程变为

$$\pm i \left[\frac{\partial E_{\pm}}{\partial z} \pm \frac{1}{v_{g0}} \frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} \right] + \kappa E_{\mp} \exp(\mp 2i\delta z) = 0. \quad (5)$$

对于一个一维无限长的均匀光栅而言, 其色散关系可以通过平面波试解来得到。把如下形式的平面波试解

$$E_{\pm} = A_{\pm} \exp[i(Kz - \Omega t)], \quad (6)$$

代入线性耦合模方程(5)式, 其中的各项参数定义为

$$K = k - k_B, \quad \Omega = \omega - \omega_B = v_{g0} \delta, \quad (7)$$

于是可以得到线性周期结构的色散关系

$$K = \pm \sqrt{\delta^2 - \kappa^2}. \quad (8)$$

图1显示, 色散关系出现了一个带隙, 当入射波频率落在这个带隙里

$$-\kappa < \delta < \kappa, \quad (9)$$

K 出现虚部, 也就是说电磁波随传播距离而衰减, 以致停止传播。

联合(7)式和(8)式, 可以通过公式 $v_g = 1/(dK/d\Omega)$ 在 $|\delta| > \kappa$ 的条件下, 计算出禁带外的群速度 v_g 为

$$v_g = \pm v_{g0} \frac{\sqrt{\delta^2 - \kappa^2}}{\delta}, \quad (10)$$

以及群速度色散常数 β_2 为

$$\beta_2 = \frac{\partial^2 K}{\partial \Omega^2} = \mp \frac{\kappa^2}{v_{g0}^2 (\delta^2 - \kappa^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

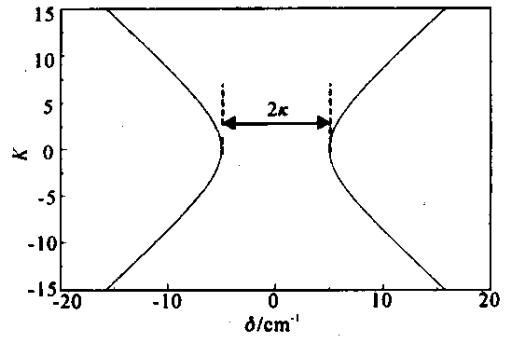


Fig.1 Dispersion relationship among detuning, δ , and wave number K for a uniform grating with a strength $\kappa = 5 \text{ cm}^{-1}$, which exhibits a photonic bandgap of size 2κ , consistent with inequality (9)

从(11)式可以看出, 当 $\delta > \kappa$ 时, 群速度色散常数 β_2 的符号是负的, 也就是说属于反常色散区域, 而当 $\delta < -\kappa$ 时, β_2 的符号是正的, 属于正常色散区域。在禁带边沿附近, 群速度色散常数 β_2 的数值可以达到 10^{-16} 量级, 这远远大于均匀材料的群速度色散常数。

图2给出了前向波的群速度 v_g 与失谐系数 δ 之间的关系曲线, 从图中可以看出, 当入射波频率远离布拉格频率时, 传播速度几乎与均匀介质中的传播速度相同, 频率越靠近禁带, 传播速度就越慢; 在禁带边沿时, 波的速度将降为零。

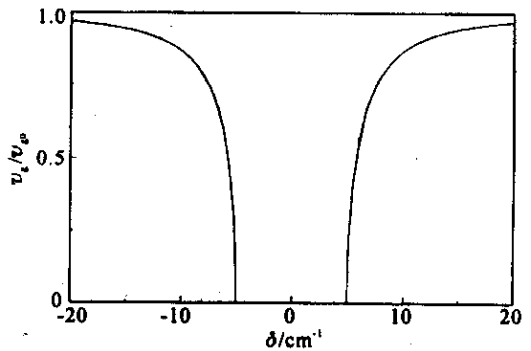


Fig.2 Group velocity v_g for forward wave (in units of $v_{g0} = c/n_0$) as a function of detuning for a uniform grating with a strength $\kappa = 5 \text{ cm}^{-1}$

4 类孤子解

回到(4)式。作变换

$$E_{\pm}(z, t) = E_{\pm}(z, t) \exp(\mp i\delta z),$$

可以得到关于 $E_{\pm}(z, t)$ 的非线性耦合模方程

$$-i \left[\frac{\partial E_+}{\partial z} + \frac{1}{v_{g0}} \frac{\partial E_+}{\partial t} \right] = \delta E_+ + \kappa E_- + \chi (|E_+|^2 + 2|E_-|^2) E_+, \quad (12a)$$

$$i \left[\frac{\partial E_-}{\partial z} - \frac{1}{v_{g0}} \frac{\partial E_-}{\partial t} \right] = \delta E_- + \kappa E_+ + \chi (2|E_+|^2 + |E_-|^2) E_-. \quad (12b)$$

我们可进一步假设 (12) 式的试解有如下形式

$$E_+(z, t) = A_+(T) \exp[i\phi_+(T)], \quad (13a)$$

$$E_-(z, t) = A_-(T) \exp[i\phi_-(T)], \quad (13b)$$

自变量 T 定义为

$$T = t - \frac{z}{v_g} = t - \frac{1}{v_r} \frac{z}{v_{g0}}, \quad (14)$$

其中, $A_{\pm}(T)$ 、 $\phi_{\pm}(T)$ 都是实数, $A_{\pm}(T)$ 为慢变振幅函数, $v_r = v_g/v_{g0}$ 被定义为一个无量纲的变量, 可以看作是归一化的群速度。

在满足 $|\delta| < \kappa \sqrt{1 - v_r^2}$ 的条件下 (12) 式可以得到实数解, 形式为^[13]

$$A_+ = \left[\frac{\kappa}{\gamma} \frac{\chi(1 + v_r)\sqrt{1 - v_r^2}}{(3 - v_r^2)} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta + \cosh(T/T_0)} \right]^{1/2}, \quad (15a)$$

$$A_- = \left[\frac{\kappa}{\gamma} \frac{\chi(1 - v_r)\sqrt{1 - v_r^2}}{(3 - v_r^2)} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta + \cosh(T/T_0)} \right]^{1/2}, \quad (15b)$$

$$\phi_+ = \frac{\psi_0}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{|v_r|}{2} \tan\left(\frac{T}{T_0} \theta\right) - \left(\frac{4|v_r|}{3 - v_r^2} + 1\right) \arctan\left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \tanh \frac{T}{2T_0}\right), \quad (15c)$$

$$\phi_- = \frac{\psi_0}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{|v_r|}{2} \tan\left(\frac{T}{T_0} \theta\right) - \left(\frac{4|v_r|}{3 - v_r^2} - 1\right) \arctan\left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \tanh \frac{T}{2T_0}\right), \quad (15d)$$

其中,

$$\sin \theta = \frac{\delta}{\kappa \sqrt{1 - v_r^2}},$$

$$T_0 = \frac{1 - v_r^2}{2|v_r|v_{g0}\sqrt{(1 - v_r^2)\kappa^2 - \delta^2}},$$

T_0 为脉冲宽度, ψ_0 为任意的相位积分常数。

从 (15) 式可以看出, 波形与入射波频率落在禁带何处很有关系。只有当失谐因子 $\delta = 0$, 也就是入射波精确满足布拉格共振条件时, 波形才具有孤子的 sech 函数形式, 所以, 把上面的一般解称为类孤子

解。同时, 也可以看出, 入射波频率靠近禁带中央、禁带上沿或下沿, 波形都不同, 前向波和后向波的波形也不一致。

另外值得注意的是, (15) 式的解是在 $|\delta| < \kappa \sqrt{1 - v_r^2}$ 情况下得到的, 而从前面第 3 节的分析知道, 周期结构的线性禁带条件为 $|\delta| < \kappa$ 。也就是说, 在非线性的影响下, 禁带宽度变小了, 由线性时的 2κ 变为非线性时的 $2\kappa \sqrt{1 - v_r^2}$ 。

由 T_0 的表达式可以得到

$$v_r = \pm \left\{ \frac{1 + 2v_{g0}^2 T_0^2 (\kappa^2 - \delta^2) \left[1 - \sqrt{1 - \delta^2 \left[\frac{v_{g0}^2 T_0^2 (\kappa^2 - \delta^2)}{1 + 4v_{g0}^2 \kappa^2 T_0^2} \right]} \right]}{1 + 4v_{g0}^2 \kappa^2 T_0^2} \right\}^{1/2}, \quad (16)$$

(16) 式中波沿 $+z$ 方向传播时取正号, 当波沿反方向传播时则取负号。由此可以计算在非线性情况下禁带内的群速度色散常数

$$\beta_2 = -\frac{1}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega} = -\frac{1}{v_{g0}^2 v_g} \frac{\partial v_r}{\partial \delta} = -\frac{v_{g0}^3 T_0^2 \delta}{v_g^3 (1 + 4v_{g0}^2 T_0^2 \kappa^2)} \left\{ 2\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{v_{g0}^2 T_0^2 (\kappa^2 - \delta^2)}} - 2 - \frac{\kappa^2 + \delta^2}{v_{g0}^2 T_0^2 (\kappa^2 - \delta^2) \sqrt{1 - \delta^2 \left[\frac{v_{g0}^2 T_0^2 (\kappa^2 - \delta^2)}{1 + 4v_{g0}^2 \kappa^2 T_0^2} \right]}} \right\}. \quad (17)$$

从图 3(a) 可以明显看出, 在非线性情况下, 即使频率落在禁带内, 类孤子的传播速度也不为零。即当 $\delta = 0$ 时, 有 $v_r \neq 0$, 这与线性情况下的结论完全不一

样, 而且有 $v_r < 1$, 即周期结构中的群速度小于均匀介质中的群速度。因此, 也将其称作慢布拉格类孤子。而从图 3(b) 可以看到, 靠近禁带上沿 (即 $\delta > 0$), 群

速度色散常数 β_2 的符号是正的,属于正常色散区域;增强脉冲能量,会导致群速度色散效应的增强。另外,而在靠近禁带下沿(即 $\delta < 0$)群速度色散常数 β_2 的符号是负的,属于反常色散区域。从图中还可以看出,随着脉宽的增加,群速度色散常数也增大。也就是说,色散。

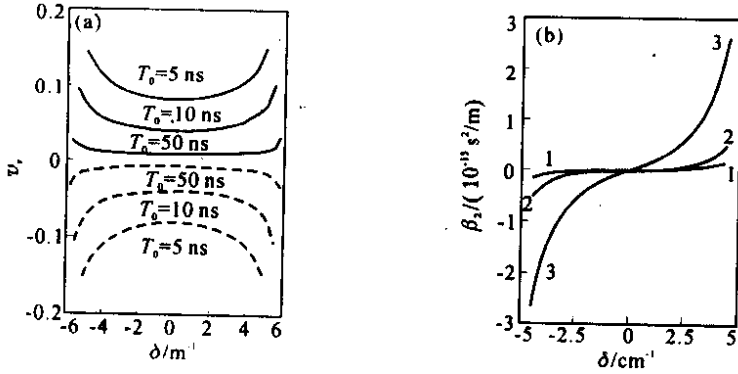


Fig.3 (a) Considering nonlinearity, normalized group velocity, v_r , as a function of detuning within the stopband for a uniform grating with a strength $\kappa = 5 \text{ cm}^{-1}$. Solid line: propagating along $+z$. Dashed line: propagating along $-z$; (b) Considering nonlinearity, group velocity dispersion, β_2 , as a function of detuning within the stopband for a uniform grating with a strength $\kappa = 5 \text{ cm}^{-1}$. 1: $T_0 = 8 \text{ ns}$; 2: $T_0 = 10 \text{ ns}$; 3: $T_0 = 20 \text{ ns}$

在求解过程中,有

$$\phi_+ + \phi_- = \phi_0 - \frac{2v_{g0}v_r^2}{1-v_r^2} \int_0^T \left[\delta + \frac{2\gamma}{1+v_r} A_+^2(\xi) \right] d\xi, \quad (18)$$

其中, A_+ 的表达式见(15a),为了使物理意义更明显,将(18)式与(15)式联立,可以得到前向波、后向波相位与前向波强度之间的关系:

$$\phi_+ = \frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{v_{g0}v_r^2}{1-v_r^2} \int_0^T \left[\delta + \frac{2\gamma}{1+v_r} A_+^2(\xi) \right] d\xi - \arctan\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \tanh\frac{T}{2T_0}\right), \quad (19)$$

$$\phi_- = \frac{\phi_0}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{v_{g0}v_r^2}{1-v_r^2} \int_0^T \left[\delta + \frac{2\gamma}{1+v_r} A_+^2(\xi) \right] d\xi + \arctan\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \tanh\frac{T}{2T_0}\right). \quad (20)$$

再通过公式

$$\omega_{\pm} = \omega - \frac{d\phi_{\pm}}{dT} \frac{dT}{dt}$$

和

$$\delta_{\pm} = (\omega_{\pm} - \omega)n_0/c,$$

可以分别算得前向波脉冲中心处的频率偏移量

$$\delta_+ = \frac{1}{1-v_r^2} \delta + \frac{\cos\theta}{v_{g0}T_0(1+\sin\theta)} + \frac{2\gamma v_r^2}{(1-v_r^2)(1+v_r)} A_+^2, \quad (21)$$

和后向波脉冲中心处的频率偏移量

$$\delta_- = \frac{1}{1-v_r^2} \delta - \frac{\cos\theta}{v_{g0}T_0(1+\sin\theta)} + \frac{2\gamma v_r^2}{(1-v_r^2)(1-v_r)} A_-^2. \quad (22)$$

从(21)式、(22)式可以看出,由于非线性的作

用,前向波和后向波的频率都会发生偏移,其偏移量主要取决于失调因子 δ ,传播速度、振幅强度以及非线性系数 γ 等参数,后面几个参数都和非线性作用有关。其中,第一项、第二项都与失谐因子有关,可以理解为非线性作用的综合效果使入射波中心频率所产生的偏移。第二项正好 δ_+ 为正, δ_- 为负,表明前向波频率蓝移,后向波频率红移。而第三项与各自的振幅强度呈正比,属于自相位调制作用所导致的频移。

值得注意的是,如果把(21)式、(22)式中的 v_r 换成 $-v_r$,再把正负下标对换,结果不变。这也就是说,上面两个等式中的速度 v_r 可以理解为速率 $|v_r|$ 。另外, $\delta_+ \neq \delta_-$,这表明前向波与后向波的频率偏移不一致。

从图4可以发现,入射频率越靠近禁带边沿,前

向波频率偏移越大。而且入射波频率处于禁带下沿和禁带上沿入射,所导致的前向波频率的偏移是不对称的,禁带下沿的偏移更大些。入射波靠近禁带中央时,前向波频率也有偏移,在禁带中央偏移量达到最小。这是因为,类孤子的振幅在禁带边缘处大,在禁带中央处小^[13]。所以,非线性效应所导致的频率偏移也在禁带边缘处大,在禁带中央到达最小。

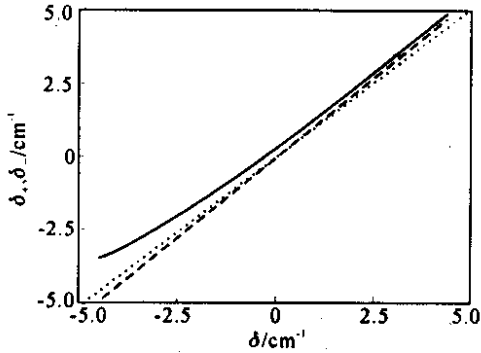


Fig.4 Solid line shows the detuning of forward wave, δ_+ , versus detuning δ . Dashed line shows the relationship for backward wave. Diagonal acts as the reference. The system is the same as shown in Fig.1

结论 在一维无限长的非线性周期结构中,周期结构所导致的色散起主要作用。当入射频率位于禁带内时,可以存在慢布拉格类孤子解。类孤子的传播特性与多种因素有关。比如,波形与入射波频率落在禁带何处很有关系,只有当入射波精确满足布拉格共振条件时,才真正是孤子。脉宽的增加,会导致群速度色散常数变大,即增加脉冲能量会增强群速度色散效应。非线性作用会导致禁带宽度变窄,并使前向波和后向波的频率产生偏移,其偏移量与入射频率有关,且不对称。入射波频率位于禁带中央时,前向波和后向波频率的偏移量都达到最小。

参 考 文 献

- [1] Winful H G. Pulse compression in optical fiber filters. *Appl. Phys. Lett.*, 1985, **46**(6):527~529
- [2] Winful H G, Marburger J H, Garmire E. Theory of bistability in nonlinear distributed feedback structures. *Appl. Phys. Lett.*, 1979, **35**(5):379~381
- [3] Herbert C J, Malcuit M S. Optical bistability in nonlinear periodic structures. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(21):1783~1785
- [4] Feng J, Kneubühl F K. Solitons in a periodic structure with Kerr nonlinearity. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1993, **29**(2):590~697
- [5] Chen W, Mills D L. Optical response of nonlinear multiplayer structures: Bilayers and superlattices. *Phys. Rev. (B)*, 1987, **36**(12):6269~6278
- [6] Chen W, Mills D L. Gap solitons and the nonlinear optical response of superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(2):160~163
- [7] Mills D L, Trullinger S E. Gap solitons in nonlinear periodic structures. *Phys. Rev. (B)*, 1987, **36**(2):947~952
- [8] Feng J. Alternative scheme for studying gap solitons in an infinite periodic Kerr medium. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(6):1302~1304
- [9] de Sterke C M, Sipe J E. Possibilities for the observation of gap Solitons in waveguide geometries. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1989, **6**(9):1722~1725
- [10] Dragoman M, Jager D. Microwave gap solitons and bistability in magnetostatic periodic structures. *Appl. Phys. Lett.*, 1993, **62**(1):110~112
- [11] Christodoulides D N, Joseph R I. Slow Bragg Solitons in nonlinear periodic structures. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, **62**(15):1746~1749
- [12] Kuo C P, Österberg U. Optical fibers with negative group-velocity dispersion in the visible. *Opt. Lett.*, 1988, **13**(11):1032~1034
- [13] Li Songmao, Wang Qi, Wu Zhong *et al.*. Slow Bragg solitons in a periodic structure with Kerr nonlinearity. *Acta Physica Sinica*(物理学报), 2001, **50**(3):489~495(in Chinese)

Propagation of Slow Bragg Soliton-Like Waves

Li Songmao Wang Qi

(Physics Department of Shanghai University, Shanghai 200436)

(Received 28 June 2001; revised 31 October 2001)

Abstract: On the basis of coupled-mode theory the linear dispersion relation in an infinite one-dimensional periodic structure is given and then a class of slow Bragg soliton-like solutions is found by introducing the nonlinearity. It is shown that an increase of intensity will lead to strengthen the effect of group velocity dispersion. Because of the nonlinearity, the width of stop-band structure decreases, and the pulse attains an instantaneous frequency which depends on the detuned parameter, velocity, intensity and nonlinear coefficient.

Key words: soliton-like waves; slow Bragg solitons; coupled-mode theory