

文章编号: 0253-2239(2002)08-0952-05

基于统计滤波的单幅散斑条纹图的相位恢复技术

杨福俊* 云大真

(大连理工大学工程力学系, 大连 116023)

摘要: 基于统计信号处理技术的贝叶斯(Bayes)估计原理, 提出一种新的滤波方法。该方法能有效减少散斑条纹图中的噪声, 而且仅用一幅散斑条纹图就能获得准确的条纹相位分布。通过实例说明了该方法的处理过程。

关键词: 贝叶斯估计; 散斑条纹图; 统计滤波; 相位恢复

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A

1 引 言

光学测量的数据很多是通过采集处理光学干涉条纹图来获得结果的。由于采集待处理的光学干涉条纹图都不可避免地带有噪声干扰, 导致条纹灰度和反差存在不均匀等缺陷。如何消除噪声干扰, 提取出高效优质的条纹图, 具有重要的学术和工程的实际意义。在干涉条纹图处理的问题中, 条纹图的相位确定在光学计量(如云纹、散斑、全息干涉等方法)及三维形貌、位移、应变、振动等测量中具有重要意义。这是因为在采集的二维条纹图中, 空间变化的条纹的相位与上述待测物理量密切相关。条纹相位信息的恢复有相移法^[1]、傅里叶法^[2]、同步探测法等^[3]。

本文针对散斑干涉图的统计特性, 采用统计信号处理的方法, 实现有效抑制散斑图的噪声, 准确地恢复相位。

2 高斯-马尔可夫(Gauss-Markov)空间场^[4]

对于测量问题, 如对未知的物理量 μ 进行测量, 由于测量值 x 会受到各种随机因素的影响, x 可认为是 μ 加上随机误差 ϵ 后得到的。另外, 测量误差 ϵ 还包括受到测量仪器、环境温度、光线、视觉、心理等因素的微小变化而引起的综合结果。由概率论与统计学中的中心极限定理, 可认为 ϵ 服从均值为 0 和方差为 σ^2 的正态, 即高斯分布。统计学中随机过

程 $\{x_k\}$ 为马尔可夫过程的含义是指随机变量 x_k 中, 对于一阶马尔可夫过程来说, 在 x_k 以前的变量中除 x_{k-1} 对 x_k 有影响外, 其它变量都不能向 x_k 传递任何信息。同样对散斑干涉条纹图来说, 我们假定图像中的空间噪声分布服从均值为 0 和方差为 σ^2 的高斯分布, 图像空间场为马尔可夫空间随机场, 即空间中每一点仅受与其最邻近的四个点影响, 对于处于图像边缘的点, 有影响的点数为两个或三个。

3 贝叶斯估计^[5,6]

3.1 代价函数(cost function)

在统计学中, 统计分析的基本目的为: 从样本出发推断总体分布。统计推断问题可大致分为两大类: 估计问题和假设检验问题。从贝叶斯学派观点来看, 在一个统计问题中, 手头有两方面的信息: 参量 θ 的先验分布和在给定参量 θ 条件后的服从一定分布的样本。先验分布可看成是关于参量 θ 的一般信息, 而样本可看成是关于参量 θ 的具体信息或当前信息。将这两部分信息综合起来, 用以对参量 θ 进行推断或估计。

在时间域(t_0, t_f)内对信号参量 $\alpha(t)$ 进行观测, 在得到观测值 $z(t), t_0 \leq t \leq t_f$ 的情况下, 贝叶斯提出平均代价最小的估计准则。根据这个准则, 构造一个观测数据的函数 $\hat{\alpha}(z)$ 作为 $\alpha(t)$ 的估计。

代价函数 $d(\theta, \hat{\theta})$ 在统计决策学中称为损失函数, 是真值 $\alpha(t)$ 和估计值 $\hat{\alpha}(z)$ 的函数。在实际运用时, 将代价函数设定为估计误差 $(\theta - \hat{\theta})$ 的函数。当被估计参量为标量时, 常采用如下的误差平方代价函数

$$d(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2, \quad (1)$$

还可用误差绝对值代价函数和均匀代价函数等。

* 现通讯地址: 东南大学工程力学系(210096)

E-mail: yang-fj@seu.edu.cn

收稿日期: 2001-07-30; 收到修改稿日期: 2001-09-30

3.2 最小均方估计和最大后验估计

应用贝叶斯准则必须知道信号参数的验前,即先验概率分布 $p(\theta, z)$,以及对每一对 $(\theta, \hat{\theta})$ 定义的代价函数 $\alpha(\theta, \hat{\theta})$ 。这样统计平均代价或平均风险为

$$\bar{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\theta - \hat{\theta}) p(\theta, z) \lambda \theta dz, \quad (2)$$

对标量函数 θ 的估计来说,贝叶斯估计准则是选择 $\alpha(z)$,使平均代价最小。因此,若将误差平方代价函数代入(2)式,选取 $\hat{\theta}$ 使(2)式极小,则得到 θ 的贝叶斯估计就称为最小均方估计。

如果不能找到适当的代价函数,则可采用最大后验概率估计,此时,选择使后验概率分布最大的 θ 值作为其估计量 $\hat{\theta}$,这时得到 θ 的贝叶斯估计,称为最大后验估计。

4 基于贝叶斯估计准则的统计滤波的应用

4.1 统计滤波

对于大小为 $M \times N$,带有噪声的散斑干涉条纹

图 $g(i, j)$,可以看成是一个光顺函数 $f(i, j)$ 与一个独立的随机噪声场 $n(i, j)$ 叠加形成的, $n(i, j)$ 为服从均值为 0 和方差为 s^2 的高斯分布,即

$$g(i, j) = f(i, j) + n(i, j) \quad (i \in M, j \in N), \quad (3)$$

于是,在给定 $f(i, j)$ 时, $g(i, j)$ 的条件分布 $P_{g|f}(f)$ 为

$$P_{g|f}(f) = P_n(f - g) = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\sum_{(i,j) \in L} [f(i, j) - g(i, j)]^2 / 2s^2\right\}, \quad (4)$$

(4)式中 Z 为一常数, L 表示图像各点构成的区域。关于 $f(i, j)$ 的先验知识与引进马尔可夫随机空间场的假设,即 $f(i, j)$ 的值与 $f(i \pm 1, j)$ 及 $f(i, j \pm 1)$ 等四点有关,在边界处为两点或三点,由这个假设可控制 $f(i, j)$ 的光顺性。这时,关于 $f(i, j)$ 的验前概率 $P_f(f)$,以能量函数 V_c 形式表示为

$$P_f(f) = \frac{1}{K} \exp\left\{-\sum_c V_c\right\}, \quad (5)$$

(5)式中, C 表示由点 (i, j) 及其最邻近点构成的区域。由贝叶斯公式知后验分布为

$$P_{f|g}(f) = \frac{1}{K'} \exp\left\{-\frac{1}{2s^2} \sum_{(i,j) \in L} [f(i, j) - g(i, j)]^2 - \sum_c V_c\right\}, \quad (6)$$

上式是对于某常数 K' 而言的。

由最大后验估计可以得知,求最大后验概率问题,就转变成求下面(7)式的最小值问题。

$$U(f) = \sum_{(i,j) \in L} [f(i, j) - g(i, j)]^2 + \gamma \sum_c V_c, \quad (7)$$

(7)式中,参量 γ 与噪声的方差 s^2 有关。一般地, V_c 的形式可取为

$$V_c = [f(i, j) - f(i, j - 1)]^2 + [f(i, j) - f(i - 1, j)]^2 + [f(i, j) - f(i, j + 1)]^2 + [f(i, j) - f(i + 1, j)]^2, \quad (8)$$

为简便说明问题,以一维图像为例,求(7)式的梯度,并令其等于 0 后,得到

$$f(i) + \gamma [-f(i - 1) + 2f(i) - f(i + 1)] = g(i). \quad (9)$$

对(9)式两端进行离散的傅里叶变换,得

$$\mathcal{F}(\omega) \{1 + \gamma [1 - \exp(-i\omega) + 2 - \exp(i\omega)]\} = \mathcal{G}(\omega), \quad (10)$$

注意(10)式中的 i 为单位虚数, $\mathcal{F}(\omega)$ 、 $\mathcal{G}(\omega)$ 分别为 $f(i)$ 和 $g(i)$ 的傅里叶变换。

由(10)式可得

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2\gamma(1 - \cos\omega)}, \quad (11)$$

$H(\omega)$ 对应于线性滤波器的频率响应函数。对于一维无限图像来说,(11)式表明对(7)式求极小值的过程,相当于对图像进行低通滤波,参量 γ 控制频率响应曲线的形状,如图 1 所示。

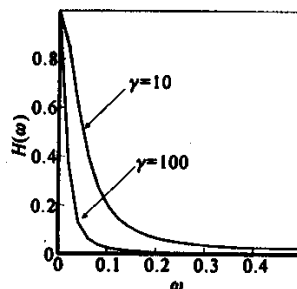


Fig.1 Shapes of frequency responses

4.2 散斑图像统计滤波处理的应用

4.2.1 单幅图相位恢复原理

光学干涉条纹多数可以用下面的函数形式来表示

$$g(i, j) = \alpha(i, j) + k(i, j) \cos \phi(i, j) + n(i, j), \tag{12}$$

式中 $\phi(i, j)$ 为待恢复的相位, $\alpha(i, j)$ 为与待测物体反射率或透射率及测试背景等相关的光顺函数, $k(i, j)$ 反映了条纹的调制强度, $n(i, j)$ 为随机噪声。 $\phi(i, j)$ 可以分解成

$$\phi(i, j) = (\omega_i, \omega_j) \cdot (i, j) + \alpha(i, j), \tag{13}$$

(13) 式中右边的第一项的点表示内积, (ω_i, ω_j) 表示点 (i, j) 处条纹的空间频率, $\alpha(i, j)$ 是一个与 $\phi(i, j)$ 相比很小的量, 而 (ω_i, ω_j) 又可写成

$$\omega = (\omega_i, \omega_j) = (|\omega| \cos \theta, |\omega| \sin \theta), \tag{14}$$

(14) 式中的 ω 表示点 (i, j) 处条纹的频率向量, θ 表示点 (i, j) 处条纹的方向角。因此, 只要求出条纹图各点的条纹方向角和空间频率, 以 (13) 式为基础就可求出全场相位分布。

4.2.2 单幅图相位恢复方法

1) 条纹的方位场和方向场的估计

条纹上任一点 (i, j) 的方位角 $\alpha(i, j)$ 为^[7]

$$\alpha(i, j) \approx \arctan \left[\frac{g(i, j) - g(i-1, j)}{g(i, j-1) - g(i, j)} \right]. \tag{15}$$

因有噪声的干扰, 由 (15) 式求出的是方位角的近似值, 其值在 0 至 π 范围内。图 2 为一周边弹性固支矩形薄铝板中心受集中力作用, 由剪切散斑干涉得到的 x 方向的斜率条纹图。

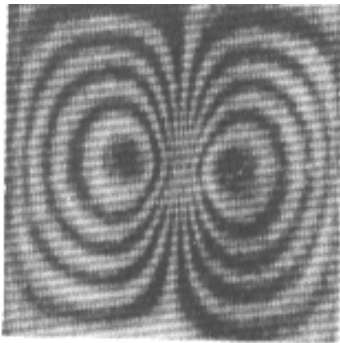


Fig.2 Fringe pattern obtained from shearing speckle interferometry depicting the slope $\partial w / \partial x$ of a centrally loaded rectangular plate four sides are elastically built in

图 3(a) 是对应于图 2 的近似方位场。因为 $\alpha(i, j)$ 取值于 $[0, \pi)$, 可以将区间 $[0, \pi)$ 离散为 N 个分立值, 点 (i, j) 的方位角 $\alpha(i, j)$ 取 N 个分立值

的概率是不同的。因此以 $\alpha(i, j)$ 取 N 个分立值的概率 $p[(i, j), k]$ 作观测值取代 $g(i, j)$ 对 (7) 式求极值。为了确保每一点取 N 个分立值的概率 $p[(i, j), k]$ 的归一化, 设

$$p[(i, j), k] = \frac{1 + \cos\{2[k/\pi - \alpha(i, j)]\}}{\sum_{k=0}^{N-1} (1 + \cos\{2[k/\pi - \alpha(i, j)]\})}, \tag{16}$$

(16) 式中取两倍的 $[k/\pi - \alpha(i, j)]$ 是因为方位角相差 π 指的是同一方位。由极值化 (7) 式, 可求得每一点 (i, j) 有 N 个 $p[(i, j), k]$ $[k = 0, 1, \dots, N-1]$, 其中 $\{p[(i, j), k] | k = 0, 1, \dots, N-1\}$ 最大者所对应的角度 k/π 为点 (i, j) 的方位角度值。图 3(b) 是对应图 3(a) 调整后的方位场。

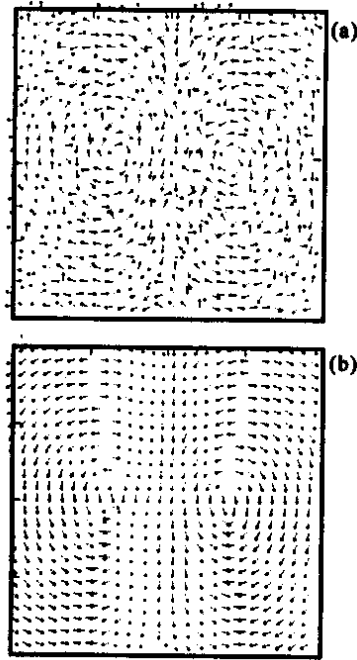


Fig.3 (a) Orientation field obtained from the gradient direction of Fig. 2; (b) Regularized orientation field of the field shown in (a)

对于封闭条纹, 条纹的方向角 θ 取值在 $[0, 2\pi)$ 范围内, 而方位角 α 取值在 $[0, \pi)$ 范围内。因此, α 与 $\alpha + \pi$ 对应于同一方位, 但方向相反。这样若用方位角作相位恢复时, 将出现相位不连续现象。

根据条纹的连续性和光顺性, 如果条纹图像中相邻两点的方位角相似, 则它们的方向也应该相似, 也就是说, 它们取某个角度的概率相近; 如果相邻两点的方位角相差接近 π , 则它们同时取某个角度的概率的和接近 1; 如果相邻两点的方位角相差接近 $\pi/2$, 则认为这两点同时取某个角度的概率不存在任何关系。基于上述理由, 点 (i, j) 取其方位角和不取其方位角

作为方向角的概率 $p[(i, j), \alpha]$ 、 $p[(i, j), \beta]$ 的关系为

$$p[(i, j), \beta] = 1 - p[(i, j), \alpha].$$

$$U(p) = \sum_{x, y \in C}^{C \times L} \{ [1 + \cos[\theta(x) - \theta(y)]] \mathbb{E} [p(x, \alpha) - p(y, \alpha)]^2 + [1 - \cos[\theta(x) - \theta(y)]] \mathbb{E} [p(x, \alpha) + p(y, \alpha) - 1]^2 \} + \mathcal{N} [p(x_0, \alpha) - 1]^2, \quad (17)$$

式中 $p(x_0, \alpha) \approx 1$ 为任选点 x_0 取该点的方位角为方向角时的初始概率, x_0 作为方向场的参考点。对于单幅条纹图像来说, 相位符号存在不确定性, 但这不影响全场相位的恢复。由 (17) 式极值化解出 p , 再利用下式作为方向场的估计准则

$$\left. \begin{aligned} \theta(i, j) &= \alpha(i, j) & \text{if } p(i, j) < 1/2, \\ \theta(i, j) &= \alpha(i, j) + \pi & \text{if } p(i, j) \geq 1/2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

图 4(a) 是由图 3(b) 的方位场调整后得到的方向场。

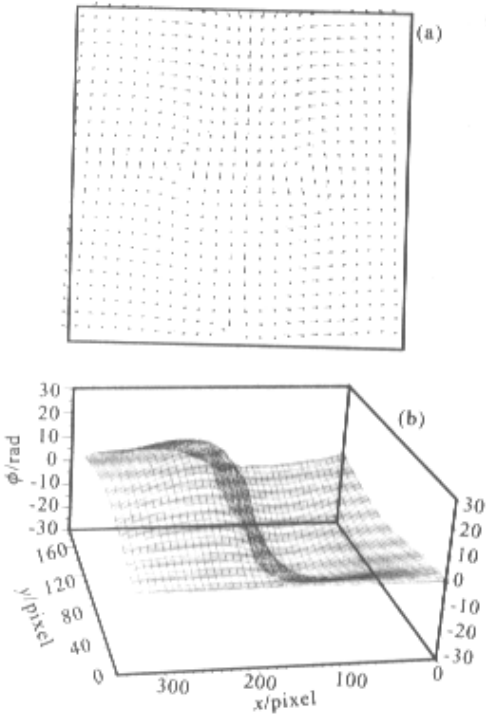


Fig.4 (a) Regularized direction field. (b) Unwrapped phase distribution

2) 空间频率场的估计

对于光学干涉条纹图, 条纹是由灰白两部分构成, 而且应当是光顺, 没有分支和重叠。这就是说, 条纹所占图像空间宽度至少是两个像素。实际上, 大多数条纹宽度在四个像素以上, 亦即条纹的空间频率小于 $\pi/2$ 。因此, 可以把空间频率变化区间 $(0, \pi/2)$ 离散成 N 个分立值, 利用 (7) 式估计出图像各点的空间频率。设

另外, 对于相位场的临界点, 即极值点、鞍点等附近, 必须采取措施以保证相位的光顺性。因此 (7) 式应用于此问题时, 可写成

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x) \approx A(x) \cos[\omega(x) \cdot x + \delta(x)] + iA(x) \sin[\omega(x) \cdot x + \delta(x)], \quad (19)$$

注意 (19) 式中 i 为单位虚数, 第二个等于号右端方括号内的表达式相当于 (13) 式的右端, 于是有

$$\psi(i, j) = \arctan \frac{\varphi(i, j)}{\psi(i, j)}, \quad (20)$$

这样 (7) 式就可改写为

$$U(f, \omega) = \sum_{x \in L} |f(x) - 2g(x)|^2 + \gamma \sum_{x, y \in C}^{C \times L} |f(x) \exp[i/2 \int \omega(x) \cdot (y - x)] - f(y) \exp[i/2 \int \omega(y) \cdot (x - y)]|^2, \quad (21)$$

(21) 式中 i 为单位虚数, 右端第一项因子 2 的引入是为了保证在 $g(x) = \cos(\omega \cdot x)$ 时, 滤波输出为单位量。第二项则是为了控制空间频率的光顺性。将空间频率的 N 个分立值依次代入 (21) 式并极值化求出 N 个 $|f(i, j)|$ 场, 每一点取使该点 $|f(i, j)|$ 最大的频率为其空间频率, 并将此频率场作为观测值, 代入 (7) 式, 求得光顺的频率场后, 再由 (20) 式恢复相位。图 4(b) 是图 2 所示的散斑条纹图的相位分布。

文中所使用的参量 γ 一般取 50 ~ 1000, N 取 12 ~ 18, 极值化求最优解的算法为高斯-塞德尔 (Gauss-Seidel) 迭代法及超松弛迭代法^[8]; 相位恢复的整个过程由主频 667 MHz 的 PC 机实现, 对于处理 200×200 像素大小的图像, 计算时间约 1 h。

结论 以贝叶斯估计准则及高斯-马尔可夫空间场假设为基础的统计滤波方法, 具有较强的抗噪声干扰性能, 能够有效地滤除图像中的噪声, 仅用一幅条纹图就可以有效地提取条纹的相位信息, 提高了散斑条纹的定量自动处理的能力。由于 (7) 式极值化后, 得到的稀疏线性方程组的系数矩阵阶数很大, 对于大小为 $N \times N$ 的图像来说, 需要解 N^2 个线性方程组, 由于选择的迭代法存在收敛速度问题, 因此

图像处理所花费的时间较长。另外,由于条纹图上每一点的方向存在两个选择,仅用一幅条纹图进行处理,所以最后得到的全场相位符号必然存在不确定性。但在实际应用时,根据物理量的内在规律,通过人工正确标定符号。

参 考 文 献

- [1] Kadono H, Takai N, Asukura T. New common-path phase shifting interferometer using a polarization technique. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(5): 898 ~ 901
- [2] Takeda M, Ina H, Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1): 156 ~ 160
- [3] Womack K H. Interferometric phase measurement using spatial synchronous detection. *Opt. Engng.*, 1984, **23**

(4) 391 ~ 395

- [4] Marroquin J L, Mitter S, Poggio T. Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1987, **82**(1): 76 ~ 89
- [5] Mao Shisong, Wang Jinglong, Pu Xiaolong. *Advanced Mathematical Statistics* (高等数理统计). Beijing: Higher Education Press, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998 (in Chinese)
- [6] Xiang Jingcheng, Wang Yiqing, Mao Zican *et al.*. *Detection and estimation of signal* (信号检测与估计). Beijing: Publishing house of electronics industry, 1994 (in Chinese)
- [7] He Anzhi, Yan Dapeng. *Transient laser interferometry* (激光瞬态干涉度量学). Beijing: China Machine Press, 1993 (in Chinese)
- [8] Li Qingyang, Yi Dayi, Wang Nengchao. *Modern numerical analysis* (现代数值分析). Beijing: Higher Education Press, 1995 (in Chinese)

Phase Recovery from a Single Speckle Fringe Pattern Based on Statistical Filtering

Yang Fujun Yun Dazhen

(*Department of Eng. Mech., Dalian University of Technology, Dalian 116023*)

(Received 30 July 2001; revised 30 September 2001)

Abstract: A robust filtering method based on Bayesian estimation rule and statistical signal processing technique is presented. The new method can efficiently reduce the noise of speckle fringe pattern, and rather accurately perform phase recovery from a single fringe pattern. Experiment on the test image is presented to illustrate the validity and processing of the new method.

Key words: Bayesian estimation rule; speckle fringe pattern; statistical filtering; phase recovery