

文章编号 : 0253-2239(2002)08-0947-05

用全息透镜记录多重分数傅里叶变换全息图^{*}

曾阳素¹⁾²⁾ 张怡霄¹⁾ 高福华¹⁾ 高峰¹⁾ 郭永康¹⁾

(1), 四川大学物理系, 成都 610064
(2), 邵阳学院物理系, 邵阳 422000

摘要 : 提出一种用全息透镜记录多重分数傅里叶变换全息图的新方法, 它能在三维空间不同位置 and 不同方向上分别再现所记录的多个物体的图象。分析了利用全息透镜记录多重分数傅里叶变换全息图的原理及特点, 制作了多重分数傅里叶变换全息图, 并获得了满意的再现结果。

关键词 : 分数傅里叶变换 ; 分数傅里叶变换全息图 ; 全息透镜

中图分类号 : O432.1 文献标识码 : A

1 引 言

分数傅里叶光学是将数学中的分数傅里叶变换引入光学而形成的新分支, 是傅里叶光学的发展和延拓, 使人们可以用一个新的观点去审视光的传播、成像、信息处理等问题, 并为人们提供一种新的工具去处理这些问题, 正在被得到越来越多的新应用^[1~4]。

分数傅里叶变换全息图(FRTH)与普通菲涅耳以及傅里叶变换全息图不同, 它所记录的信息既包含有物体的信息, 又包含有系统参量的信息^[5,6]。通常记录多重菲涅耳全息图是采用旋转全息干版的方法, 使不同物体的全息图在空间不同方位上再现物体的像。本文基于分数傅里叶变换理论, 提出一种用全息透镜记录多重分数傅里叶变换全息图的新技术, 其主要优点为: 1) 由于不同阶数的分数傅里叶变换, 需要不同焦距的变换透镜, 而所需的焦距值常常是一些分数值, 这在商品系列中难以找到, 而全息透镜具有焦距设计灵活、制作方便、价格低廉、易于实现微型化和集成化等优点, 因此采用全息透镜代替普通光学透镜来记录分数傅里叶变换全息图, 可以更好地满足分数傅里叶变换对不同焦距的要求; 2) 利用全息透镜记录分数傅里叶变换全息图, 采用特殊光路, 可利用全息透镜衍射的 -1 级光作为物光, 0 级光作为参考光, 不必另外安排参考光

路, 可使记录光路结构大为简化, 同时利用全息透镜的离轴特性, 可以很方便地获得在空间不同方位的再现像; 3) 根据分数傅里叶变换理论, 发展了一种通过平移物体的位置来记录多重全息图的方法, 它与通常采用的旋转全息干版的方法相比, 不仅可以用分数傅里叶变换理论准确计算再现像的位置, 而且可以在空间不同方向和不同位置的较大范围内再现像; 4) 多重分数傅里叶变换全息图需要多个与记录时相匹配的分数傅里叶变换系统才能在三维空间不同方向与不同位置上分别再现所记录的物体图象, 因此具有很高的防伪力度, 而这多个不同阶的分数傅里叶变换系统可通过改变全息图与透镜之间的相对位置来实现, 操作简便。

2 全息透镜记录分数傅里叶变换全息图的原理

2.1 全息透镜实现分数傅里叶变换

利用一球面波 $d(x, y) = O_0(x, y) \exp(j\varphi_0)$ 与倾斜平面波 $r(x, y) = R_0(x, y) \exp(j\varphi_R)$ 的干涉可记录制作得到所需的全息透镜。

波前再现时, 用倾斜平面光波 $d(x, y) = C_0(x, y) \exp(j\varphi_C)$ 照射所制作的全息透镜, 设透过全息透镜的复振幅为 $c\tau_{HL}$, 由于只研究相对光强分布, 可忽略其中的常数项, 则为:

$$c\tau_{HL} \propto cI = C_0(O_0^2 + R_0^2) \exp(j\varphi_C) + C_0 R_0 O_0 \exp[j(\varphi_C + \varphi_0 - \varphi_R)] + C_0 R_0 O_0 \exp\{j[\varphi_C - (\varphi_0 - \varphi_R)]\}, (1)$$

其中第一项为 0 级光, 仍是倾斜平面波, 第二、三项

* 国家自然科学基金(69907003) 四川大学青年基金资助课题。

E-mail: yangsuz@hotmail.com

收稿日期: 2002-01-22; 收到修改稿日期: 2002-03-13

分别为 +1 级发散光、-1 级会聚光。

倾斜平面波相位函数为：

$$\varphi_R = kx \sin \alpha, \quad \varphi_C = k_0 x \sin \beta, \quad (2)$$

其中 α 和 β 分别为记录全息透镜时和再现时的倾斜光入射方向与 z 轴的夹角。

球面波相位函数可写为：

$$\varphi_0 = k[(x^2 + y^2 + f_0^2)^{1/2} - f_0], \quad (3)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$, λ 为记录全息透镜时的波长; $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, λ_0 为再现时的波长; f_0 为全息透镜的焦距。

在菲涅耳近似的条件下, 上式可忽略 $1/f_0^3$ 以上的项, 则有：

$$\varphi_0 = [k(2f_0)](x^2 + y^2), \quad (4)$$

再由 (1) 式可以得到 -1 级光的相位分布：

$$\begin{aligned} \varphi_{-1} = \varphi_C - (\varphi_0 - \varphi_R) = \\ k \left[-\frac{x^2 + y^2}{2f_0} + (\mu \sin \beta + \sin \alpha)x \right] = \\ k \left\{ -\frac{[x - f_0(\mu \sin \beta + \sin \alpha)]^2 + y^2}{2f_0} \right\} + \\ \frac{kf_0}{2}(\mu \sin \beta + \sin \alpha)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\mu = k_0/k$, 一般选择再现光与记录光的波长相等, 则 $\mu = 1$ 。第二项的常数相位可以不计, 则 -1 级光的相位分布化简为：

$$\varphi_{-1} = k \left\{ -\frac{[x - f_0(\mu \sin \beta + \sin \alpha)]^2 + y^2}{2f_0} \right\}. \quad (6)$$

而普通透镜的透射函数为一个二次相位因子：

$$\varphi = k \left[-\frac{x^2 + y^2}{2f} \right]. \quad (7)$$

比较 (6) 和 (7) 式可以看出, 全息透镜可以起到中心在 $(f_0 \mu \sin \beta + f_0 \sin \alpha, 0)$ 点的会聚透镜的作用, 因此可以利用全息透镜代替普通透镜实现分数傅里叶变换。

若要忽略相位函数 (3) 展开式中的高次项, 必须对全息透镜的有效孔径加以限制, 即要求：

$$\Delta \varphi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \left[\frac{(x^2 + y^2)^2}{8f_0^3} \right] \ll 2\pi, \quad (8)$$

式中 $\Delta \varphi$ 为相位误差, $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ 为全息透镜的有效孔径, f_0 为全息透镜焦距。

实际计算中常取 $\Delta \varphi = \pi/10$ 。如当 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $f_0 = 20 \text{ cm}$ 时, $\rho = 6.7 \text{ mm}$, 此时将波带片相位函数视作二次相位因子带来的误差为 2%, 完全能够满足大多数的实际应用需要。

从上面的讨论可知, 只要对全息透镜的孔径加以限制, 它就有和普通透镜相同的二次相位因子, 因

此可代替普通透镜用于实现分数傅里叶变换。

2.2 用全息透镜记录分数傅里叶变换全息图

对于 Lohmann I 型分数傅里叶变换装置^[7], 透镜的焦距 f 与输入面到透镜的距离 z (或输出面到透镜的距离) 应满足条件：

$$f = f_1 / \sin(P\pi/2), \quad z = f_1 \tan(P\pi/4), \quad (9)$$

式中 $f_1 = f \sin \phi_1$ 为标准焦距, P 为分数阶。

用全息透镜 (HL) 记录分数傅里叶变换全息图的原理如图 1 所示。利用全息透镜的衍射 -1 级光作为物光, 0 级光作为参考光 (如图 4 所示), 从而不必为参考光另外安排光路, 使光路更加简洁, 而且由于使用离轴全息透镜, 物体与全息透镜可以不共轴, 因此可更为灵活地安排光路。为了防止经物体调制的光波通过全息透镜衍射后产生的 0 级波对分数傅里叶变换全息图的记录带来干扰, 采用有效光阑对光场加以限制。

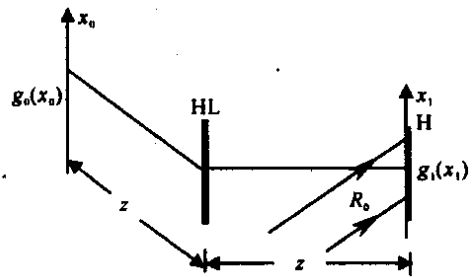


Fig.1 Recording of FRTH using holographic lens

由 (1) 式可得 0 级光与 -1 级光的光强比为：

$$\frac{I_{-1}}{I_0} = \frac{R_0 O_0}{(O_0^2 + R_0^2)} = \left(\frac{R_0 O_0}{O_0^2 + R_0^2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}, \quad (10)$$

因此, 如果利用 0 级光作为参考光, -1 级光作为物光来记录分数傅里叶变换全息图, 可以满足物、参光强比的要求。

$$\nu_m = \rho(\lambda z), \quad z = f_0(1 - \cos P\pi/2), \quad (11)$$

同时, 由于离轴全息透镜有较大的像差, 因此必须对其像差进行控制。由全息图的再现特性知, 当在原记录条件下再现全息图, 可获得无像差的再现像。实际应用中, 由于物体的衍射, 很难严格满足这种要求, 为此必须在对全息透镜的孔径加以限制的同时, 也限制输入物体的空间频率, 才能有效地控制像差。变换系统所能处理的最大空间频率 (截止频率) ν_m 和全息透镜的有效孔径的关系由 (11) 式确定, 其中 z 为分数傅里叶变换系统中物体到全息透镜的距离, 与分数阶 P 有关。

从以上讨论可以看出, 用全息透镜记录分数傅里叶变换全息图时, 只要调节好物、参光强比, 同时

控制好所用全息透镜的有效孔径及输入物体的空间频率,便可以获得较好的结果。

3 用全息透镜记录和用普通透镜再现多重分数傅里叶变换全息图

3.1 记录光路

如图 2 所示,HL、HL'.....为焦距不同的离轴全息透镜,各全息透镜的焦距分别为 $f_0、f'_0、f''_0、f'''_0、\dots$,设多个物体分别处在不同的位置上,即物函数分别为 $g_0、g'_0、g''_0、g'''_0、\dots$;对应于各个物函数的 $P_1、P'_1、P''_1、P'''_1、\dots$ 阶分数傅里叶变换分别为 $g_1(x_1, y_1, z_0) \lambda g'_1(x_1 + a_1, y_1 + b_1, z'_0) \lambda g''_1(x_1$

$- a_1, y_1 - b_1, z''_0) \lambda g'''_1(x_1, y_1, z'''_0) \lambda \dots$ (其中 $a_0、b_0、a_1、b_1$ 均为常数);各个输入面、输出面到各自全息透镜的距离为 $z_1、z'_1、z''_1、z'''_1、\dots$,它们应分别满足条件 $z = f(1 - \cos P\pi/2)$,即(11)式。参考光 R 为相应全息透镜的零级光,分别和各个物体的分数傅里叶变换光场干涉,干版在不同的位置经过多次曝光后,在同一块感光板上记录了多个物体不同阶的分数傅里叶变换全息图。在上述光路中,由于采用了离轴全息透镜,多个物体可分别放在轴线 og_0 的不同位置上,通过旋转全息透镜,记录下相应的分数阶分数傅里叶变换全息图,经再现后可在不同方位上获得所需的再现像,调节十分方便。

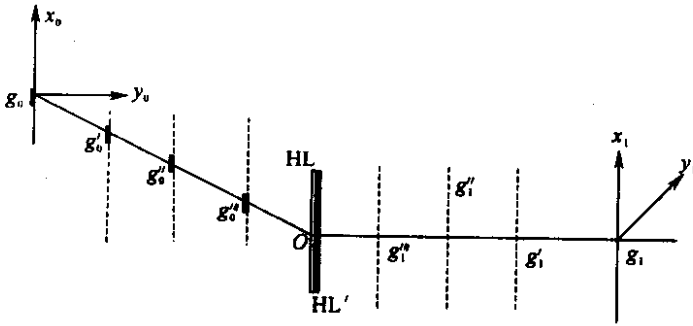


Fig.2 Recording of M-FRTH using holographic lens

3.2 再现光路

如图 3, L 为一焦距固定的普通透镜,用平行参考光 R 照明多重全息图,将再现出物光波 $g_0、g'_0、g''_0、g'''_0、\dots$ 分别经 $P_1、P'_1、P''_1、P'''_1、\dots$ 阶分数傅里叶变换后的光场。然后对分数傅里叶变换全息图再现的各个光场实行逆变换,或前后移动透镜 L 实行与原变换阶数 $P_1、P'_1、P''_1、P'''_1、\dots$ 相匹配的 $P_2、P'_2、P''_2、P'''_2、\dots$ 阶变换,(如 $P_1 + P_2 = 2、P'_1 + P'_2 = 2、P''_1 + P''_2 = 2、P'''_1 + P'''_2 = 2、\dots$),则在三维空间不同输出面的不同位置、不同方向上可分别得到像 $g_2、g'_2、g''_2、g'''_2、\dots$ 。

由上面分析可知,各再现分数傅里叶变换系统的分数阶必须和相应记录时的分数傅里叶变换系统相匹配,才能再现与多个原物体完全相同的像;多重分数傅里叶变换全息图不仅记录了多个不同物体的信息,还记录了相应多个系统的信息,如全息透镜的焦距 f_0 ,物体与透镜的距离 $z_1、z'_1、z''_1、\dots$ 。普通多次曝光傅里叶变换全息图只能在一个位置观察再现像,且多个再现像互相重叠干扰严重,而多重分数傅里叶变换全息图的多个再现像一般在多个不同的位置和不同的方向。只需适当选取记录时物体与透镜不同的距离 $z_1、z'_1、z''_1、\dots$ 便可使多个再现像之间的距离在很大范围内变化;只需适当旋转记录

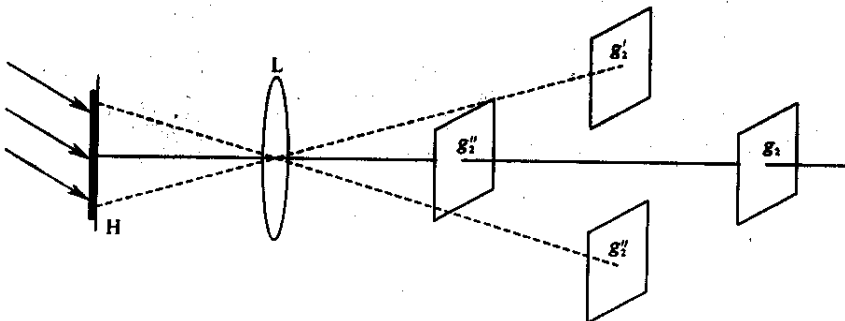


Fig.3 Recondstruction of M-FRTH using common lens

时离轴全息透镜的角度 $\theta_1, \theta'_1, \theta''_1, \dots$,便可使多个再现像之间的方向在很大范围内变化,则再现时零级光产生的噪声对某一个再现像的影响可忽略,且可减少多个再现像的交叉影响,此时某一物体的再现像位置处的背景噪声将大为减少。

4 实 验

用全息透镜(HL)记录多重分数傅里叶变换全息图的实验光路如图4所示(以三重分数傅里叶变换全息图为例)。

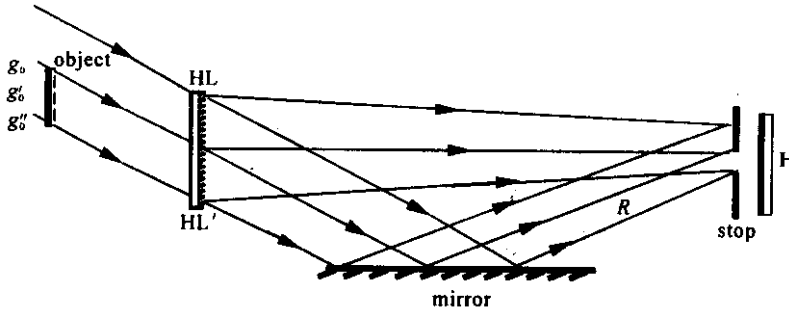


Fig.4 Experimental arrangement of recording M-FRTH with holographic lens

它的记录过程分三步进行:1)先用经扩束的平行 He-Ne 激光照明透明物体 g_0 (即“图案”)取第一块全息透镜(HL)焦距为 $f_0 = 631 \text{ mm}$,分数阶为 $P_1 = 0.50$, $z_1 = 185 \text{ mm}$,对全息干版进行第一次曝光,时间 $t_1 = 12 \text{ s}$,记录下 g_1 ;2)换上第二个物体 g'_0 (即“E”)和第二块全息透镜(HL')焦距为 $f'_0 = 300 \text{ mm}$,保持 z_1 不变,即取 $z'_1 = z_1 = 185 \text{ mm}$,分数阶为 $P'_1 = 0.75$,第二次曝光时间 $t_2 = 12 \text{ s}$,记录下 g'_1 ;3)换上第三个物体 g''_0 (即“光”),仍然使用第二块全息透镜 HL' 且保持位置不变,只是将其旋转 180° ,分数阶为 $P''_1 = 1.25$, $z''_1 = 415 \text{ mm}$,第三次曝光时间 $t_3 = 26 \text{ s}$,记录下 g''_1 。在记录过程中各物体须平行全息透镜放置,否则将会引起畸变;为了防止经物体(透明片)调制的光波经全息透镜衍射的零级波对全息图记录的干扰,须用有效光阑对光场加以限制,相对孔径取值在 $1:6 \sim 1:10$ 之间。经线性

冲洗全息干版后得多重分数傅里叶变换全息图(M-FRTH)。

图5是用 CCD 记录的实验结果,即用斜射平行光照射,再分别经与记录时相匹配的分数傅里叶变换后(即解码)所观察到的三重像。三个再现分数傅里叶变换系统中所用的普通凸透镜的焦距均为 $f = 300 \text{ mm}$ 。图5(a)中再现系统的分数阶为 $P_2 = 1.5$,相应的 $z_2 = 512 \text{ mm}$,此时输出面只有一个清晰的像,即“图案”,而另二个物体的像则为模糊的背景噪声,无法辨认。图5(b)中,再现系统的分数阶为 $P'_2 = 1.25$,相应的 $z'_2 = 415 \text{ mm}$,此时输出面也只有一个清晰的像,即“E”,而“图案”和“光”的像则为模糊的背景噪声,无法辨认。图5(c)中,再现系统的分数阶为 $P''_2 = 0.75$,相应的 $z''_2 = 185 \text{ mm}$,此时输出面也只有一个清晰的像,即“光”,而“E”和“图案”的像则为模糊的背景噪声,无法辨认。

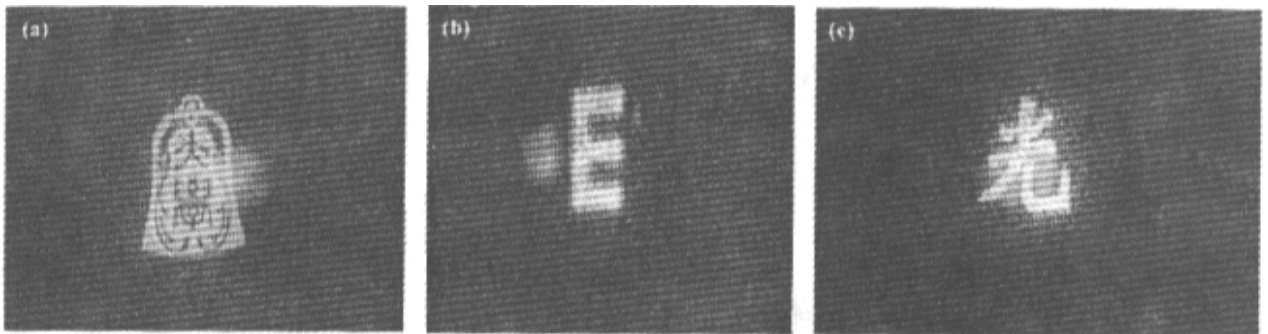


Fig.5 The experimental reconstruction results of M-FTTH. (a) The fractional order $P = 0.5, P_2 = 1.5; f_0 = 631 \text{ mm}; z_2 = 512 \text{ mm}$. (b) The fractional order $P'_1 = 0.75, P'_2 = 1.25; f'_0 = 300 \text{ mm}; z'_2 = 415 \text{ mm}$. (c) The fractional order $P''_1 = 1.25, P''_2 = 0.75; f''_0 = 300 \text{ mm}; z''_2 = 185 \text{ mm}$.

实验结果表明,使用离轴全息透镜记录三重分数傅里叶变换全息图时,只要对使用条件加以控制,

就能获得满意的再现结果。
结束语 利用全息透镜实现了多重分数傅里叶变换

全息图(即记录时使用多个全息透镜,而再现时使用一个普通透镜)。通过全息透镜组成的多个简单的分数傅里叶变换系统就可以很方便的在一块感版上分别记录多个物体在三维空间不同位置 and 不同方向上的不同阶的分数傅里叶变换全息图,这是传统的多重全息图难以实现的,它是记录多重全息的一种新途径,可应用于图像处理和信息存储等方面。

参 考 文 献

- [1] Mendlovic D , Ozaktas H M . Fractional Fourier transforms and their optical implement. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1993 , **10**(9) : 1875 ~ 1881
- [2] Lohmann A W . Image rotation , Wigner rotation , and the fractional Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1993 , **10**(10) : 2181 ~ 2186

- [3] Ozaktas H M , Mendlovic D . Fractional Fourier Optics. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1995 , **12**(4) : 743 ~ 751
- [4] Mendlovic D , Bitran Y , Dorsch R G . Anamorphic fractional Fourier transform , optical implementation and applications. *Appl. Opt.* , 1995 , **34**(32) : 7541 ~ 7456
- [5] Guo Yongkang , Huang Qizhong , Du Jinglei . Fractional Fourier transform hologram and its application in anti-counterfeiting. *Acta Optica Sinica*(光学学报) , 1999 , **19**(6) : 821 ~ 825 (in Chinese)
- [6] Zeng Yangsu , Xie Shiwei , Zhang Yixiao *et al.* . Pseudo color coding fractional Fourier transform rainbow hologram. *Chinese J. Lasers*(中国激光) , 2001 , **28**(6) : 559 ~ 566 (in Chinese)
- [7] Dorsch G , Lohmann A W . Fractional Fourier transform used for a lens design problem. *Appl. Opt.* , 1995 , **34**(20) : 4111 ~ 4112

Multiple Fractional Fourier Transform Hologram Recording with Holographic Lens

Zeng Yangsu¹⁾²⁾ Zhang Yixiao¹⁾ Gao Fuhua¹⁾ Gao Feng¹⁾ Guo Yongkang¹⁾

(1) , Department of Physics , Sichuan University , Chengdu 610064)
(2) , Department of Physics , Shaoyang University , Shaoyang 422000)

(Received 27 January 2002 ; revised 13 March 2002)

Abstract : A new method of recording multiple fractional Fourier transform hologram with holographic lens is presented. With this method , images of several recorded objects can be reconstructed in different positions and directions in three-dimension space. The theory and characteristics of the multiple fractional Fourier transform hologram recorded with holographic lens are analyzed. A multiple fractional Fourier transform hologram is fabricated and satisfying reconstruction results are obtained.

Key words : fractional Fourier transform (FRT) ; fractional Fourier transform hologram (FRTH) ; holographic lens (HL)