第22卷 第8期 2002年8月
光 学 学 报 ACTA OPTICA SINICA
Vol.22,No.8 August,2002

文章编号:0253-2239(2002)08-0912-04

# $q$ 变形算符 $a^N$ 的本征态的结构及其高阶压缩性质*

梁麦林 袁 兵

(天津大学理学院应用物理系,天津 300072)

摘要: 证明了高阶振幅压缩的概念可以应用于 $q$ 变形代数的光场。$q$ 变形算符 $a^N$ 的正交归一本征态的压缩特点由这些态的内部奇偶结构决定。破坏这种奇偶结构将得到具有新压缩特点的光场。

关键词: $q$ 变形;算符 $a^N$;奇偶结构;高阶压缩

中图分类号:O431.1　　文献标识码:A

## 1 引　　言

作为物理理论中的基本模型,简谐振子代数的 $q$ 变形已经引起了广泛注意[1~6]。人们对湮没算符的本征态或 $q$ 变形相干态[2]、湮没算符平方的正交归一本征态或 $q$ 变形奇偶相干态[3~6] 进行了详细讨论。本文分析 $q$ 变形湮没算符高次幂的正交归一本征态的内部结构以及相应的压缩特性。当 $q=1$ 即没有 $q$ 变形时,湮没算符高次幂 $a^N$ 的 $N$ 个正交归一本征态可用不同的方法得到[7~9]

$$|\Psi_j(\alpha)\rangle_N = A_j^{(N)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{nN+j}}{\sqrt{[nN+j]!}}|nN+j\rangle, \tag{1}$$

其中 $j=0,1,2,\cdots,N-1$。定义 $x=|\alpha|^2$,归一化系数为

$$A_j^{(N)} = 1/\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{nN+j}}{[nN+j]!}\right]^{1/2}, \tag{2}$$

对于 $q$ 变形的算符 $a^N$,很容易将(1)式进行推广得到其正交归一本征态为

$$|\psi_j(\alpha)\rangle_N = C_j^{(N)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{nN+j}}{\sqrt{[nN+j]!}}|nN+j\rangle, \tag{3a}$$

$$C_j^{(N)} = 1/\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{nN+j}}{[nN+j]!}\right]^{1/2}, \tag{3b}$$

其中$|n\rangle$为变形数算符的本征态,在变形湮没和产生算符作用下的变化行为

$$\left.\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{[n]}|n-1\rangle, \\ a^{+}|n\rangle &= \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

符号$[n]$ 的定义为

$$[n] = (q^n - q^{-n})/(q-q^{-1}),$$

$q$ 阶乘$[n]!=[n][n-1][n-2]\cdots[1]$。直接运算可以证明

$$a^N|\psi_j(\alpha)\rangle_N = \alpha^N|\psi_j(\alpha)\rangle_N, \tag{5a}$$

$${}_N\langle\psi_i(\alpha)|\psi_j(\alpha)\rangle_N = \delta_{ij}, \tag{5b}$$

$$a|\psi_j(\alpha)\rangle_N = \alpha\frac{C_j^{(N)}}{C_{j-1}^{(N)}}|\psi_{j-1}(\alpha)\rangle_N . \tag{5c}$$

当 $N=1$ 时,$j=0$,(3) 式成为 $q$ 变形相干态[1,2]

$$|\psi_0(\alpha)\rangle_1 = (e_q^x)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{[n]!}}|n\rangle, \tag{6}$$

函数 $e_q^x$ 是变形的指数函数[6]。我们认为文献[6] 所引的 $q$ 变形相干态的归一化系数写法不对,正确的应为(6) 式中的形式。

当 $N=2$ 时,$j=0,1$,(3) 式成为 $q$ 变形奇偶相干态[3~6]

$$|\psi_0(\alpha)\rangle_2 = C_0^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]!}}|2n\rangle, \tag{7a}$$

$$|\psi_1(\alpha)\rangle_2 = C_1^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]!}}|2n+1\rangle, \tag{7b}$$

归一化系数由(3b) 式给出。(7a) 式和 7(b) 式分别表示 $q$ 变形的偶相干态和奇相干态。接下来分析 $q$ 变形本征态 (3a)式的高阶振幅压缩性质[10]。

## 2 高阶振幅压缩

高阶振幅压缩的概念首先由 Zhang 等人[10] 提出,随后孙金祚等[11] 对未变形的奇偶相干态、王继锁等[12] 对湮没算符高次幂的本征态相继进行了研究。文献[6]将高阶振幅压缩的概念应用于 $q$ 变形的奇偶相干态,并给出了压缩特点。本文首先给出(3a)式的高阶压缩特点,然后通过这些态的内部结构进行解释。

* 教育部留学回国人员基金资助课题。

E-mail:mailinliang@eyou.com

收稿日期:2001-09-21;收到修改稿日期:2001-10-26

用变形的产生算符和湮没算符定义两个厄米算符

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (a^{+k} + a^k)/2, \\ X_2 &= \mathrm{i}(a^{+k} - a^k)/2, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

相应的对易关系和测不准关系为

$$[X_1, X_2] = \frac{\mathrm{i}}{2}[a^k, a^{+k}], \tag{9a}$$

$$\langle \Delta X_1^2 \rangle \langle \Delta X_2^2 \rangle \geqslant \left\{\frac{1}{4}[a^k, a^{+k}]\right\}^2. \tag{9b}$$

如果

$$\langle \Delta X_1^2 \rangle - \frac{1}{4}|\langle [a^k, a^{+k}] \rangle| =$$
$$\langle \Delta X_1^2 \rangle - \frac{1}{4}\langle [a^k, a^{+k}] \rangle =$$
$$\frac{1}{4}[2\langle a^{+k}a^k \rangle + \langle a^{2k} + a^{+2k} \rangle - \langle a^k + a^{+k} \rangle^2] \equiv$$
$$\Delta x_1 < 0, \tag{10a}$$

或者

$$\langle \Delta X_2^2 \rangle - \frac{1}{4}|\langle [a^k, a^{+k}] \rangle| =$$
$$\langle \Delta X_2^2 \rangle - \frac{1}{4}\langle [a^k, a^{+k}] \rangle =$$
$$\frac{1}{4}[2\langle a^{+k}a^k \rangle - \langle a^{2k} + a^{+2k} \rangle + \langle a^k - a^{+k} \rangle^2] \equiv$$
$$\Delta x_2 < 0, \tag{10b}$$

则称变形光场存在 $k$ 阶振幅压缩。在(10) 式中用到了关系$\langle [a^k, a^{+k}] \rangle > 0$,下面给出其证明。

设$|\Psi\rangle$是任意的一个变形波函数

$$|\Psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle,$$

简单推导得到

$$\langle [a^k, a^{+k}] \rangle =$$
$$\sum_n |C_n|^2 \{[n+k][n+k-1]\cdots[n+1] -$$
$$[n][n-1]\cdots[n-k]\}, \tag{11}$$

由于$[n]$ 具有如下性质：当 $n_1 > n_2$ 时,$[n_1] > [n_2]$，容易看出 (11) 式的右方大于零，即$\langle [a^K, a^{+k}] \rangle > 0$。

由于(10a)式和(10b)式的第一项大于或等于零,所以要实现压缩就必须要求其的第二或第三项不为零。从(5b)式、(5c)式可知,这只有当 $k = l_1 N$ 或 $2k = l_2 N$ 时才有可能。这里 $l_1$ 和 $l_2$ 为整数。对于 $k = l_1 N$,很容易算出 $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$,即此时没有压缩。这样压缩阶数只能满足 $2k = l_2 N$。如果 $N$ 是奇数,为了使 $k$ 为整数,要求 $l_2$ 为偶数,$2k = l_2 N$ 变成 $k = l_1 N$ 的形式,其中 $l_2 = 2l_1$。即 $N$ 为奇数的态没有振幅压缩；只有 $N$ 为偶数的态才可能有振幅压缩,并且 $l_2$ 须为奇数。将 $l_2$ 写成$(2p+1)$,$p = 0,1,2\cdots$,则压缩阶数为 $k = (2p+1)N/2$。这些结论与没有形变时的类似[11,12]。

在具体计算 $\Delta x_1$、$\Delta x_2$ 之前,首先分析湮没算符的本征态具有的特点。

仔细地考察发现 $N$ 为偶数($N = 2M$) 的态都可以写成类似奇偶相干态的奇偶形式

$$|\psi_j(\alpha)\rangle_{2M} = \left[\frac{C_j^{(2M)}}{2C_j^{(M)}}\right]\{|\psi_j(\alpha)\rangle_M + e^{-\mathrm{i}(j\pi/M)}|\psi_j[e^{\mathrm{i}(j\pi/M)}\alpha]\rangle_M\}, \tag{12a}$$

$$|\psi_{j+M}(\alpha)\rangle_{2M} = \left[\frac{C_{j+M}^{(2M)}}{2C_j^{(M)}}\right]\{|\psi_j(\alpha)\rangle_M - e^{-\mathrm{i}(j\pi/M)}|\psi_j[e^{\mathrm{i}(j\pi/M)}\alpha]\rangle_M\}, \tag{12b}$$

这里 $j = 0,1,2,\cdots,M-1$。(12)式给出了湮没算符 $N$ 次幂的正交归一本征态。当 $N = 2$时,$M = 1$,$j = 0$,(12) 式给出的是 $q$ 变形奇偶相干态

$$|\psi_0(\alpha)\rangle_2 =$$
$$\left[\frac{C_0^{(2)}}{2C_0^{(1)}}\right][|\psi_0(\alpha)\rangle_1 + |\psi_0(-\alpha)\rangle_1], \tag{13a}$$

$$|\psi_1(\alpha)\rangle_2 =$$
$$\left[\frac{C_1^{(2)}}{2C_0^{(1)}}\right][|\psi_0(\alpha)\rangle_1 - |\psi_0(-\alpha)\rangle_1], \tag{13b}$$

其中$|\psi_0(\alpha)\rangle_1$是(6) 式给出的 $q$ 变形相干态。

在算符 $a^k$ 的作用下[其中 $k = (2p+1)N/2$]

$$a^k|\psi_j(\alpha)\rangle_{2M} = \alpha^k \frac{C_j^{2M)}}{C_{j+M}^{(2M)}}|\psi_{j+M}(\alpha)\rangle, \tag{14a}$$

$$a^k|\psi_{j+M}(\alpha)\rangle_{2M} = \alpha^k \frac{C_{j+M}^{2M)}}{C_j^{(2M)}}|\psi_j(\alpha)\rangle, \tag{14b}$$

定义

$$\rho_j = \frac{C_j^{(2M)}}{C_{j+2M}^{(2M)}}, \tag{15}$$

对于态$|\psi_j(\alpha)\rangle_{2M}$

$$\Delta x_1 = \frac{x^k}{2}(\rho_j^2 + \cos 2k\theta), \tag{16a}$$

$$\Delta x_2 = \frac{x^k}{2}(\rho_j^2 - \cos 2k\theta), \tag{16b}$$

其中 $\theta$ 是 $\alpha$ 的相位。对于态$|\psi_{j+M}(\alpha)\rangle_{2M}$

$$\Delta x_1 = \frac{x^k}{2}\left(\frac{1}{\rho_j^2} + \cos 2k\theta\right), \tag{17a}$$

$$\Delta x_2 = \frac{x^k}{2}\left(\frac{1}{\rho_j^2} - \cos 2k\theta\right). \tag{17b}$$

如果 $\rho_j < 1$，态 $|\psi_j(\alpha)\rangle_{2M}$ 可有压缩；反之，态 $|\psi_{j+M}(\alpha)\rangle_{2M}$ 则有压缩。

从以上的论述可以看到，$N$ 为偶数的态有压缩与这些态可以表示成奇偶结构有关，而 $N$ 为奇数的态不可能有这样的结构，所以没有压缩。因此有无奇偶结构是湮没算符高次幂正交归一本征态(1)式有无压缩的关键。同时，要得到具有新的压缩特点的态就应该打破这种奇偶结构。

为了进一步理解湮没算符高次幂的压缩特点，接下来研究如下形式的态

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}[|\psi_j(\alpha)\rangle_M + e^{i\varphi}|\psi_j(ae^{i\delta/M})\rangle_M], \tag{18a}$$

归一化系数 $N = 2[1 + \Omega_j\cos(\varphi + \theta_j)]$，其中 $\Omega_j$、$\theta_j$ 由下式决定

$$_M\langle\psi_j(\alpha)|\psi_j(\alpha e^{i\delta/M})\rangle_M = \Omega_j e^{i\theta_j}. \tag{18b}$$

下面会看到相位 $\delta$ 决定可能的压缩阶数。令 $k = Mt$，$A = a^M$，$z = \alpha^M = |z|e^{i\theta}$，态(18a)在算符 $a^k = A^t$ 的作用下为

$$a^k|\psi\rangle = A^t|\psi\rangle = \frac{z^t}{\sqrt{N}}[|\psi_j(\alpha)\rangle_M + e^{i(\varphi+t\delta)}|\psi_j(\alpha e^{i\delta/M})\rangle], \tag{19}$$

通过一定的运算后，有关的平均值可以写成如下形式

$$\langle A^{+t} + A^t\rangle = |z|^{2t}\left\{\cos t\delta + \frac{2}{N}\left[2\sin^2\left(\frac{t\delta}{2}\right) - E\sin t\delta\right]\right\}, \tag{20a}$$

$$\langle A^{+t} + A^t\rangle = 2|z|^t\cos\left(t\theta + \frac{t\delta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{t\delta}{2}\right) - \frac{2}{N}E\sin\left(\frac{t\delta}{2}\right)\right], \tag{20b}$$

$$\langle A^{2t} + A^{+2t}\rangle = 2|z|^{2t}\cos(2t\theta + t\delta)\left[\cos(t\delta) - \frac{2}{N}E\sin(t\delta)\right], \tag{20c}$$

$$\langle(A^t - A^{+t})\rangle = 2i|z|^t\sin\left(t\theta + \frac{t\delta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{t\delta}{2}\right) - \frac{2}{N}E\sin\left(\frac{t\delta}{2}\right)\right]. \tag{20d}$$

以上诸式 $E = \Omega_j\sin(\varphi + \theta_j)$。注意到(20)式中都含有因子 $\sin(t\delta/2)$。设 $m$ 为一整数，如果

$$t\delta = 2m\pi, \tag{21}$$

这些项都会消失。在这种前提下

$$\Delta x_1 = -|z|^{2t}\sin^2\left(\frac{t\delta}{2}\right)\cos^2\left(t\theta + \frac{t\delta}{2}\right) = 0, \tag{22a}$$

$$\Delta x_2 = -|z|^{2t}\sin^2\left(\frac{t\delta}{2}\right)\sin^2\left(t\theta + \frac{t\delta}{2}\right) = 0, \tag{22b}$$

两分量 $X_1$ 和 $X_2$ 都不存在压缩。所以有压缩的前提条件为 $t \neq 2m\pi/\delta$。当 $\delta = \pi$ 时，$t \neq 2m$ 或 $t = 2m + 1$，压缩阶数 $k = Mt = (2m+1)N/2$ 正是压缩算符高次幂的压缩特点。当 $\delta = \pi/2$ 时，$t \neq 4m$ 或 $t = 4m+1, 4m+2, 4m+3$，压缩阶数 $k = (4m+1)M, (4m+2)M, (4m+3)M$。当 $\delta = \pi/2$ 时，(18a)实际上是 $a^{4M}$ 的本征态。按照前边的结果，压缩阶数为 $k = (2m+1)(4M/2) = (4m+2)M$。而这里除了该阶数外还有 $k = (4m+1)M$ 和 $(4m+3)M$。其原因在于态(18a)不具有(12)式中的奇偶结构。

**结束语** 本文分析了 $q$ 变形湮没算符高次幂正交归一本征态的内部结构与其压缩特点的关系。正是由于这些态的内部奇偶结构形式决定了这些态的压缩性质。通过构造新形式的叠加态(18a)得到了相应的新的压缩行为。同时表明对于 $a^N$ 正交归一本征态的叠加，参量的相位差对决定压缩阶数起关键作用。

象 $q = 1$ 时一样[13]，$q$ 变形的 $a^N$ 的正交归一本征态也可以用 $q$ 变形相干态的叠加来产生。具体的运算与文献[13]中类似，这里不再赘述。

## 参 考 文 献

[1] Biedenharn L C. The quantum groups $SU_q(2)$ and a $q$-analogue of the operators. *J. Phys.* (*A*), 1989, **22**(18): 873~878

[2] Hao S R. Glauber coherent state $q$-deformed quantum oscillator. *Acta Physica Sinica*(物理学报), 1993, **42**(7): 1057~1062(in Chinese)

[3] Kuang L M, Wang F B. Even and odd $q$-coherent state representations of the quantum Heisenberg-Weyl algebra. *Phys. Lett.* (*A*), 1992, **169**(4): 225~228

[4] Wang F B, Kuang L M. Even and odd $q$-coherent states and their optical statistics properties. *J. Phys.* (*A*), 1993, **26**(2): 293~300

[5] Zhu C X, Wang F B, Kuang L M. On nonclassical

properties of the even and odd $q$-coherent states. *Acta Physica Sinica*(物理学报), 1994, **43**(8): 1262 ~ 1267(in Chinese)

[6] Wang Z Q. The higher-order squeezing effects of the $q$-deformed even and odd coherent states. *Acta Physica Sinica*(物理学报), 2001, **50**(4): 690 ~ 692(in Chinese)

[7] Peng S A, Guo G C. Orthonormalized eigenstates of operator $a^N$ and their properties. *Acta Physica Sinica*(物理学报), 1990, **39**(1): 51 ~ 54(in Chinese)

[8] Li F L, Chai J L, Zhang Z M. A new method for constructing the orthonormal eigenvectors of high order power of photon annihilation operator. *Acta Physica Sinica*(物理学报), 1991, **40**(7): 1058 ~ 1061(in Chinese)

[9] Shi Weichun, Ma Aiqun. Quantum statistical properties of orthonormalization eigenstates of the $k$-th power of photon aninihiation operator. *Acta Optica Sinica*(光学学报), 1992, **12**(10): 902 ~ 905(in Chinese)

[10] Zhang Z M, Xu L, Chai J L *et. al.*. A new kind of higher-orer squeezing of radiation field. *Phys. Lett.* (*A*), 1990, **150**(1): 27 ~ 30

[11] Sun J Z, Wang J S, Wang C K. New kind of higher-order squeezing of even and odd coherent states. *Chinese J. Quant. Electron.*(量子电子学), 1992, **9**(4): 397 ~ 400(in Chinese)

[12] Wang J S, Sun J Z, Wang C K. Amplitude $N$th-power squeeing of the eigenstates of higher-order powers of photon annihilation operator. *Acta Photonica Sinica*(光子学报), 1994, **23**(3): 200 ~ 203

[13] Sun J, Wang J, Wang C. Generation of orthonormalized eigenstates of the operators $a^k$ (for $k \geqslant 3$) from coherent states and their higher-order squeezing. *Phys. Rev.* (*A*), 1992, **46**(3): 1700 ~ 1702

# The Eigenstages Structure and Higher-Order Squeezing of the $q$-Deformed Operator $a^N$

Liang Mailin　Yuan Bing
(*Department of Applied Physics, Tianjin University, Tianjin* 300072)
(Received 21 September 2001; revised 26 October 2001)

**Abstract:** It is shown that the idea of higher-order amplitude squeezing can be applied to the $q$-deformed light field. The orthonormalized eigenstates squeezing properties of the $q$-deformed operator $a^N$ are determined by the even and odd structure of the states. Breaking such structure will get states with new squeezing properties.
**Key words:** $q$-deformed; operator $a^N$; even and odd structure; higher order squeezing