

文章编号 : 0253-2239(2002)08-0907-05

# 相位损耗腔中大失谐 Jaynes-Cummings 模型中熵的演化\*

张立辉<sup>1)2)</sup> 李高翔<sup>1)</sup> 彭金生<sup>1)</sup>

(1), 华中师范大学物理系, 武汉 430079)  
(2), 武汉教育学院物理系, 武汉 430010)

摘要: 研究了一位于相位损耗腔中大失谐下二能级原子与相干态场相互作用系统中, 光场线性熵、原子线性熵以及光场-原子系统线性熵的演化, 讨论了原子初始状态和光场的平均光子数对各线性熵的影响。结果表明, 光场线性熵和原子线性熵的演化都较强地依赖于原子初始状态, 而系统线性熵的演化与原子初始状态无关。由于光场平均光子数的增加, 光场、原子和系统的线性熵都会增加。

关键词: 相位损耗; 相干态; 线性熵

中图分类号: O434.14 文献标识码: A

## 1 引 言

Jaynes-Cummings (J-C) 模型是描述光场与原子相互作用最简单和最典型的模型, 对这一模型的研究已揭示出了一系列量子效应, 如原子反转时间演化的周期崩溃和回复<sup>[1]</sup>, 光场和原子偶极压缩<sup>[2]</sup>, 光场的量子统计性质<sup>[3,4]</sup>等。Phoenix 和 Knight 用量子熵研究光场与二能级原子相互作用的动力学特性<sup>[5]</sup>时, 显示了熵是测量量子态纯度的一个有用的物理量。据此人们对 J-C 模型的熵演化进行了研究<sup>[6-9]</sup>。但这些研究大都没有考虑腔损耗, 而真实的情况是腔损耗始终存在, 并对光场-原子系统的行为可产生明显影响, 因而研究腔场的损耗过程对原子与光场相互作用系统的影响很有必要。近来, Peixoto de Faria 和 Nemes 研究了存在能量损耗的 J-C 模型的动力学特性<sup>[10]</sup>, 表明腔体中的能量损耗对系统线性熵和原子线性熵有明显影响, 指出了原子和光场-原子系统只在初始时刻对应着纯态, 以后均呈现混合态。但腔场中存在相位损耗时的 J-C 模型中熵的演化, 至今还未曾予以研究。在文献 [11] 中, Walls 和 Milburn 指出, 如果腔场存在相位损耗, 随着时间的演化, 其相干性逐渐消失而能量并不改变,

这就是若初始光场为相干态场, 随时间演化, 密度矩阵中最终只会含不变的对角元而非对角元为零。Hiroshima 讨论了相位损耗腔中双模压缩真空光场纠缠的相对熵<sup>[12]</sup>, 发现随着压缩程度的增加, 双模光场间的纠缠度由于相位损耗的影响将快速衰减。

本文在考虑相位损耗的情形下, 研究了大失谐下二能级原子与相干态场相互作用系统中熵的演化, 讨论了不同的原子初始状态和光场平均光子数对光场线性熵、原子线性熵和光场-原子系统线性熵的影响。结果表明, 光场线性熵和原子线性熵的演化都较强地依赖于原子初始状态, 而系统线性熵的演化与原子初始状态无关。光场平均光子数的增加, 光场、原子和系统的线性熵都会增加。

## 2 密度算符和线性熵

描述单个二能级原子与一单模辐射场相互作用的哈密顿量, 在旋波近似下可写为<sup>[13]</sup> ( $\hbar = 1$ )

$$H = \omega_0 S_z + \omega a^\dagger a + \epsilon (a^\dagger S_- + a S_+), \quad (1)$$

式中  $a^\dagger$ 、 $a$  代表频率为  $\omega$  的辐射场的产生和湮没算符,  $S_z$ 、 $S_\pm$  为本征跃迁频率为  $\omega_0$  的原子的反转和跃迁算符,  $\epsilon$  为光场与原子耦合常数。

在大失谐 ( $\Delta \gg \epsilon(n+1)^{1/2}$ ,  $\Delta$  为单光子失谐量) 的条件下, 在相互作用绘景中, 系统有效哈密顿量可写为<sup>[10,13]</sup>

\* 国家自然科学基金(60078016)和湖北省自然科学基金资助课题。

E-mail: 2lh063@sina.com

收稿日期: 2001-06-04; 收到修改稿日期: 2001-09-10

$$H_1^{\text{eff}} = \frac{\epsilon^2}{\Delta} [(a^+ a + 1)|+ + | - a^+ a | - - | ], (2)$$

于是二能级原子与单模光场相互作用系统考虑相位损耗时的密度算符  $\rho$  满足

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = - [ H_1^{\text{eff}}, \rho(t) ] + L_c \rho(t), (3)$$

这里  $L_c \rho(t)$  用来描述腔中光场的相位损耗, 在有限温度下可写为<sup>[11]</sup>

$$L_c \rho(t) = \lambda [ 2a^+ a \rho(t) a^+ a -$$

$$\rho(t) a^+ a a^+ a - a^+ a a^+ a \rho(t) ] (4)$$

式中  $\lambda = \lambda' k T$ ,  $\lambda'$  为衰变常数。

将密度算符写成矩阵的形式<sup>[13]</sup>

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \rho_{++}(t) & \rho_{+-}(t) \\ \rho_{-+}(t) & \rho_{--}(t) \end{bmatrix}, (5)$$

则(3)式可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{--}(t) &= i\omega [ a^+ a, \rho_{--}(t) ] + L_c \rho_{--}(t), \\ \frac{d}{dt}\rho_{++}(t) &= -i\omega [ a^+ a, \rho_{++}(t) ] + L_c \rho_{++}(t), \\ \frac{d}{dt}\rho_{-+}(t) &= i\omega [ a^+ a \rho_{-+}(t) + \rho_{-+}(t) a^+ a + \rho_{-+}(t) ] + L_c \rho_{-+}(t), \\ \frac{d}{dt}\rho_{+-}(t) &= -i\omega [ a^+ a \rho_{+-}(t) + \rho_{+-}(t) a^+ a + \rho_{+-}(t) ] + L_c \rho_{+-}(t), \end{aligned} \right\} (6)$$

式中  $\omega = \epsilon^2/\Delta$ 。假设初始时刻原子处在基态和激发态的相干叠加态

$$|\psi_a(0)\rangle = r_+ |+\rangle + r_- |-\rangle, \quad |r_+|^2 + |r_-|^2 = 1, (7)$$

式中  $r_{\pm}$  代表原子处在  $| \pm \rangle$  态的概率幅,  $|n\rangle$  代表光场的粒子态,  $|\alpha|^2$  为光场下在相干态  $|\alpha\rangle$  的平均光子数。光场处在相干态

$$|\psi_f(0)\rangle = |\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, (8)$$

于是初始时刻系统的密度算符

$$\rho(0) = |r_+|^2 |+\alpha\rangle\langle +\alpha| + |r_-|^2 |-\alpha\rangle\langle -\alpha| + r_+ r_-^* |+\alpha\rangle\langle -\alpha| + r_+^* r_- |-\alpha\rangle\langle +\alpha|, (9)$$

由(6)式和(9)式可求得

$$\left. \begin{aligned} \rho_{--}(t) &= |r_-|^2 \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n,m} \frac{(\alpha)^n (\alpha)^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \exp[-\lambda(n-m)^2 t + i(n-m)\omega t] |n-m\rangle, \\ \rho_{++}(t) &= |r_+|^2 \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n,m} \frac{(\alpha)^n (\alpha)^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \exp[-\lambda(n-m)^2 t - i(n-m)\omega t] |n-m\rangle, \\ \rho_{-+}(t) &= r_+^* r_- \exp(-|\alpha|^2 + i\omega t) \sum_{n,m} \frac{(\alpha)^n (\alpha)^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \exp[-\lambda(n-m)^2 t + i(n+m)\omega t] |n-m\rangle, \\ \rho_{+-}(t) &= r_+ r_-^* \exp(-|\alpha|^2 - i\omega t) \sum_{n,m} \frac{(\alpha)^n (\alpha)^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \exp[-\lambda(n-m)^2 t - i(n+m)\omega t] |n-m\rangle, \end{aligned} \right\} (10)$$

利用(5)式可得原子约化密度算符

$$\begin{aligned} \rho_a(t) &= \text{tr}_f \rho(t) = \\ & |r_+|^2 |+\rangle\langle +| + |r_-|^2 |-\rangle\langle -| + r_+^* r_- \exp[-|\alpha|^2 + i\omega t] \exp[|\alpha|^2 \exp(2i\omega t)] |-\rangle\langle +| + \\ & r_+ r_-^* \exp[-|\alpha|^2 - i\omega t] \exp[|\alpha|^2 \exp(-2i\omega t)] |+\rangle\langle -|, \end{aligned} (11)$$

利用(5)式可得光场的约化密度算符

$$\rho_f(t) = \text{tr}_a \rho(t) = \rho_{--}(t) + \rho_{++}(t). (12)$$

Zurek 等人利用线性熵<sup>[14]</sup>对谐振子系统在环境影响下, 从初始纯态演化到混合态进行的研究, 表明线性熵也能很好地用来测量量子态的纯度。Peixoto

de Faria 和 Nemes 应用线性熵清晰地说明了原子和系统的纯度演化。

本文也利用线性熵这一物理量来讨论光场、原子和系统的纯度变化情况。

利用(5)式可得系统的线性熵

$$S(t) = 1 - \text{tr}\rho^2(t) = 1 - \exp(-2|\alpha|^2) \sum_{m,n} \frac{|\alpha|^{2(n+m)}}{n!m!} \exp[-2\lambda(n-m)^2 t], \quad (13)$$

利用(11)式可得原子的线性熵

$$S_a(t) = 1 - \text{tr}\rho_a^2(t) = 2|r_+|^2|r_-|^2(1 - \exp[-4|\alpha|^2 \sin^2 \omega t]), \quad (14)$$

利用(12)式可得光场的线性熵

$$S_f(t) = 1 - \text{tr}\rho_f^2(t) = 1 - \exp(-2|\alpha|^2) \sum_{m,n} \frac{|\alpha|^{2(m+n)}}{m!n!} [1 - 4|r_+|^2|r_-|^2 \sin^2(n-m)\omega t] \exp[-2\lambda(n-m)^2 t], \quad (15)$$

### 3 数值计算及讨论

根据(13)式~(15)式,选择三种不同的初始原子分布(即1)基态: $r_- = 1, r_+ = 0$ ;2)激发态: $r_- = 0, r_+ = 1$ ;3)基态与激发态的叠加态: $r_- = r_+ = 1/\sqrt{2}$ 来讨论光场、原子以及光场-原子系统的线性熵的时间演化。

当原子初始处于基态或激发态时,由(13)式~(15)式可知,光场、原子以及光场-原子系统的线性熵在这两种原子初态下,其线性熵的演化规律完全相同,如图1所示。由(14)式可知,原子线性熵始终为零,这是因为在考虑大失谐的情形下,原子与光场的相互耦合的有效哈密顿量由(2)式给出,原子不存在激发态与基态之间的跃迁过程,因此,初始处于基态或激发态的原子,将始终处于初始纯态[如(11)式所示, $\rho_a(t) = \rho_a(0)$ ],从而 $\text{tr}\rho^2(t) = \text{tr}\rho_f^2(t)$ ,故光场线性熵与系统线性熵在演化过程中始终相同。除在初始时刻光场和光场-原子系统对应着纯态外,在其它任何时刻均呈现混合态,其混合程度随时间的增加而增大,由于腔体相位损耗的作用,经一段时间以后保持不变,即光场的线性熵和系统的线性熵为一稳定值,该稳定值随光场的平均光子数增加而增大。

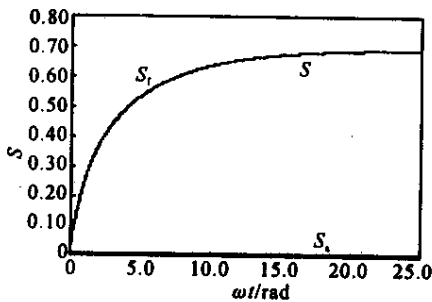


Fig.1 Time evolution of  $S_a, S_f, S$  for  $|\alpha|^2 = 1$ ,

$$\lambda = 0.1\omega, r_- = 1, r_+ = 0 \text{ or } r_- = 0, r_+ = 1$$

当原子初始处于基态与激发态的等概率相干叠加态,即 $r_- = r_+ = 1/\sqrt{2}$ 时,系统的线性熵随时间的

演化与原子初态为基态或激发态时完全相同,如图2所示,表明系统的线性熵随时间的演化与原子初始状态无关,原子线性熵的时间演化具有较完美的周期性,其周期 $T_0$ 为 $\pi/\omega$ ,这是由于在光场的影响下,原子约化密度算符在此条件下出现了非对角元,且这些非对角元都是时间的周期函数,在时间 $t$ 为 $t_d = nT_0$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )时,

$$\rho(t_d) = \rho_a(t_d) \otimes \rho_f(t_d), \text{tr}\rho_a^2(t_d) = 1,$$

且由(14)式可知,原子线性熵为极小值零,表明原子与光场退耦合,原子退回到初始纯态,与图1反映的情形不同,此时光场的线性熵随时间的演化呈现周期也为 $T_0$ ,但振荡幅度减小的振荡,随着时间的延长,该振荡逐渐消失,而趋于与系统线性熵的稳定值相同的稳定值,其振荡时间随衰变常数的增大而缩短,在 $t_d$ 时刻,

$$\text{tr}\rho^2(t_d) = \text{tr}[\rho_a^2(t_d) \otimes \rho_f^2(t_d)] = \text{tr}\rho_f^2(t_d),$$

即 $S(t_d) = S_f(t_d)$ ,且从(15)式可知,光场线性熵也达到极小值,但该极小值大于零,表明光场除初始时刻对应着纯态外,其它任何时刻均呈现混合态,其混合程度在 $t_d$ 时刻与系统的混合程度相同。与文献[10]中图1比较,在考虑能量损耗的条件下,原子线性熵随时间的演化呈现出振荡幅度逐渐减小的振荡,原子只在初始时刻对应着纯态,其它任何时刻均呈现混合态,在 $t_d$ 时刻 $S_a(t_d) = S(t_d), S_f(t_d) = 0$ ,即在 $t_d$ 时刻,光场退回到初始纯态。由此可见,腔体中光场的不同损耗,对光场、原子以及光场-原子系统的线性熵的影响是不相同的。从图2还可看出,在给定有限温度下,当衰变常数增大时,原子线性熵不变,即表明原子的线性熵与衰变常数无关,但光场和系统的线性熵达到稳定值的时间随 $\lambda$ 的增加而缩短,当 $\lambda$ 较大(如 $\lambda = \omega$ )时,光场的线性熵不再随时间振荡而很快趋近于系统线性熵的稳定值。随着光场平均光子数的增加,各线性熵随时间演化规律基本不变,但光场、原子和系统的线性熵随之增大。

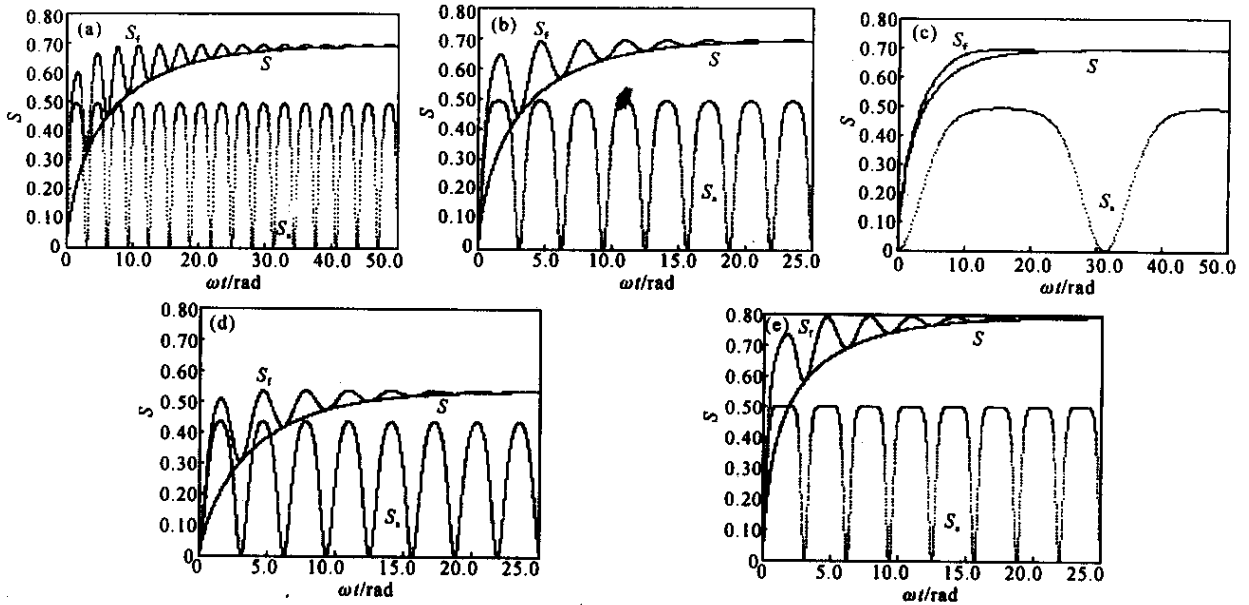


Fig.2 Time evolution of  $S_a, S_r, S$  for  $r_- = r_+ = 1/\sqrt{2}$ . (a)  $|\alpha|^2 = 1, \lambda = 0.05\omega$  (b)  $|\alpha|^2 = 1, \lambda = 0.1\omega$ ; (c)  $|\alpha|^2 = 1, \lambda = 1\omega$  (d)  $|\alpha|^2 = 0.5, \lambda = 0.1\omega$  (e)  $|\alpha|^2 = 2, \lambda = 0.1\omega$

结论 本文研究了一位于相位损耗腔中大失谐下二能级原子与相干态场相互作用系统中,光场、原子以及光场-原子系统的线性熵的演化,讨论了原子的初始状态和光场的平均光子数对各线性熵的影响。结果表明,光场、原子的线性熵较强地依赖于原子的初始状态,但系统的线性熵与原子的初始状态无关,当原子初始处于基态或激发态时,原子始终呈现纯态,而光场和光场-原子系统除初始时刻呈现纯态外,在其它任何时刻均呈现混合态,且光场和系统的线性熵随时间的增加而增大,经过一段时间以后,趋于一稳定值,到达稳定值所需时间随衰变常数的增大而缩短。当原子初始处于等概率相干叠加态时,原子线性熵随时间呈现较完美的周期振荡;光场的线性熵也随时间作振荡幅度减小的振荡,随时间的延长,该振荡消失,而趋于与系统线性熵相同的稳定值,其振荡时间随衰变常数的增大而缩短,在  $t_d$  时刻,原子与光场退耦合,原子退回到初始纯态,而光场仍呈现混合态。由于光场平均光子数的增加,光场、原子和系统的线性熵都会增加。

### 参 考 文 献

[1] Zhou P, Hu Z L, Peng J S. Effect of atomic coherence on the collapses and revivals in some generalized Jaynes-Cummings models. *J. Mod. Opt.*, 1992, **39**(1): 49~62  
 [2] Li Gaoxiang, Peng Jingshen. Relations between atomic dipole squeezing and field squeezing in the Jaynes-

Cummings model. *Acta Physica Sinica*(物理学报), 1995, **44**(10): 1670~1678 (in Chinese)  
 [3] Li Gaoxiang, Peng Jingshen. Influence of the Frequency detuning on the phase diffusion and frequency shift of the light in the two-photon J-C model. *Acta Optica Sinica*(光学学报), 1993, **13**(2): 120~124 (in Chinese)  
 [4] Li G X, Peng J S. Influences of ac Stark shifts on coherent population trapping in the atom-field coupling system via Raman two-photon processes. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **52**(1): 465~471  
 [5] Phoenix S J D, Knight P L. Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Ann. Phys.*, 1988, **186**(2): 381~407  
 [6] Phoenix S J D, Knight P L. Periodicity, phase and entropy in models of two-photon resonance. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1990, **7**(1): 116~124  
 [7] Orłowski A, Paul H, Kastelewicz G. Dynamical properties of a classical-like entropy in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **52**(2): 1621~1628  
 [8] Fang Maofa. Evolution of field entropy in the intensity-dependent coupling J-C model. *Acta Optica Sinica*(光学学报), 1995, **15**(3): 296~300 (in Chinese)  
 [9] Huang Y X, Guo G C. Properties of the field entropy evolution in the Jaynes-Cummings model with initial squeezed vacuum. *Acta Sinica Quantum Optica*(量子光学学报), 1996, **2**(6): 97~104 (in Chinese)  
 [10] Peixoto de Faria J G, Nemes M C. Dissipative dynamics of the Jaynes-Cummings model in the dispersive approximation: Analytical results. *Phys. Rev. (A)*, 1999, **59**(5): 3918~3925  
 [11] Walls D F, Milburn G J. Effect of dissipation on quantum coherence. *Phys. Rev. (A)*, 1985, **31**(4): 2403~2408

- [ 12 ] Hiroshima T. Decoherence and entanglement in two-mode squeezed vacuum states. *Phys. Rev. ( A )*, 2001, **63** ( 2 ) 022305-1 ~ 022305-4
- [ 13 ] Peng Jinsheng, Li Gaoxiang. *An Introduction for Modern Quantum Optics* ( 近代量子光学导论 ). Beijing : Science Press, 1996. 33, 92 ~ 97 ( in Chinese )
- [ 14 ] Zurek W H, Habib S, Paz J P. Coherent states via decoherence. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**( 9 ):1187 ~ 1190

## Entropy Evolution in the Jaynes-Cummings Model with Large Detuning inside a Phase Damping Cavity

Zhang Lihui<sup>1)2)</sup> Li Gaoxiang<sup>1)</sup> Peng Jinsheng<sup>1)</sup>

( 1 ), Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079

( 2 ), Department of Physics, Wuhan Institute of Education, Wuhan 430010

( Received 4 June 2001 ; revised 10 September 2001 )

**Abstract :** The evolution of the linear entropies of field, atom and field-atom coupling system in the system of a two-level atom inside a phase-damping cavity interacting with a coherent field under large detuning are investigated. The effects of atomic initial state and the mean photon number of the field on the above linear entropies are discussed. The results show that the linear entropies of both the field and the atom are strongly dependent on atomic initial state, but the evolution of the linear entropy of the field-atom coupling system is independent of the atomic initial preparation. With the increasing of the mean photon number, the linear entropies of field, atom and field-atom increase.

**Key words :** phase damping ; coherent state ; linear entropy