

文章编号: 0253-2239(2002)07-0813-06

用信息熵描述非线性光传输的研究*

田野¹⁾ 刘承宜²⁾ 郭旗¹⁾ 胡巍²⁾

(1), 华南师范大学量子电子学研究所, 广州 510631
(2), 华南师范大学传输光学实验室, 广州 5100631

摘要: 结合光束传输的薛定谔形式理论, 基于量子机制的信息熵被用来描述非线性光传输。理论推导和数值模拟结果表明, 信息熵及其对光传输方向的变化率可以表征光脉冲的压缩或展宽或光束的聚焦与发散。用信息熵表征非线性光传输优于用脉(束)宽、二阶矩表征。

关键词: 非线性光传输; 信息熵; 束宽; 脉宽; 二阶矩

中图分类号: TN012 文献标识码: A

1 引 言

信息熵是表征几率分布的重要态函数^[1,2], 它在信息论、控制论、概率论、数论和物理学等领域都有广泛的应用。1927年, 诺埃曼用密度算符 ρ 给出了信息熵的量子力学表述(κ 为大于零的常数)^[3]:

$$S = -\kappa \text{tr} \rho \ln \rho. \quad (1)$$

本文结合刘承宜等人提出的光束传输的薛定谔形式理论^[4], 将上述定义应用到光传输领域, 用信息熵来描述非线性光传输过程。

在非线性光传输中, 光的传输用非线性薛定谔方程描述^[5]:

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^{(d)^2} \varphi + |\varphi|^2 \varphi = 0, \quad (2)$$

其中 φ 为无量纲化光函数。当光传输横截面维数 $d = 1$ 时, 描述的是光纤中光脉冲的传输($\nabla_{\perp}^{(1)^2} = \partial^2/\partial t^2$), 或平面波导中的非线性光束传输($\nabla_{\perp}^{(1)^2} = \partial^2/\partial x^2$), 这两种情况均可得到孤子解。在实际应用中, 经常要考察脉冲或光束的压缩或展宽情况, 以前一般都用脉(束)宽(半峰全宽 FWHM)作为光函数演化的特征参量。 $d = 2$ 时, $\nabla_{\perp}^{(2)^2} = \partial^2/\partial x^2 +$

$\partial^2/\partial y^2$, 描述的是非线性体介质中光束的传输。在这种情况下, 光束的传输是不稳定的, 当输入功率达到或超过某一临界值时, 光束自聚焦, 反之则发散。因此常常需要考察光束的聚散情况, 以前一般用光束横截面的束宽表征。不管是脉冲还是光束, 脉(束)宽方法尽管直观可测, 但在数值计算时, 要得出脉宽(束宽)随传输距离的实时变化, 计算量很大, 且在脉冲很窄时误差较大(具体解释见第 4 部分)。由于计算半峰全宽时, 只考虑脉冲中心部分, 对于两边的旁瓣、次峰加以忽略, 也带来了误差。Siegman 等人提出用光函数的二阶矩(second-order moments)代替束宽作为光函数传输的特征参量^[6]。Sorokin 等用均方根宽度(root-mean-square width)描述光脉冲的传输, 并指出它不用知道脉冲的具体形状, 在测量超短脉冲时比求半峰全宽好^[7]。本文的研究表明, 在有些情况下, 即使均方根宽度仍然不能准确地表征光束的传输特性。通过将光函数与量子力学的波函数类比, 我们提出一种新的表征光传输中光函数演化的特征量——信息熵。它能明确表征脉冲(光束)随传输距离的变化情况, 且同样不用关心光函数的具体波形, 从而给出了一种新的描述光函数演化过程的、便于数值计算的特征参量。

2 光函数的信息熵的定义

为了引出光传输中信息熵的定义, 应用哈密顿光学光线量子化方案^[8], 将非线性薛定谔方程(2)式写成量子形式^[4]:

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} = H\varphi, \quad (3)$$

* 高等学校骨干教师资助计划、广东省“千百十工程”优秀人才培养基金、国家自然科学基金项目(1967015)、国家自然科学基金重点项目(69789801)、广东省自然科学基金重点项目(970842)和广东省自然科学基金团队项目(2003061)资助课题。

E-mail: t-field@163.net

收稿日期: 2001-03-05; 收到修改稿日期: 2001-07-31

$$H = \frac{p^2}{2} - |\varphi|^2, \quad (4)$$

其中 $p = -i\nabla_{\perp}^{(d)}$ 为动量算符, H 为哈密顿算符。从形式上看 (3) 式与量子力学中的薛定谔方程完全相同, 因而 φ 形式上对应于量子力学中的波函数。因此, $|\varphi|^2$ 可以看成光子在横截面某个位置上出现的几率。借鉴 (1) 式, 我们定义光函数的信息熵为

$$S = -\frac{1}{P} \int |\varphi|^2 \ln |\varphi|^2 dr, \quad (5)$$

其中

$$P = \int |\varphi|^2 dr$$

在传输中保持不变, r 为 d 维横截面位置矢量, 本文中的积分限都是 $(-\infty, +\infty)$ 。

在量子力学中信息熵用于表征粒子几率分布的分散度^[2,3]。信息熵越小, 粒子几率分布越集中。我们不妨提出以下假设: 光函数的信息熵也可表示光子在横截面上的几率分布, 信息熵对传输方向的变化率 dS/dz 可用来描述脉冲(光束)的聚散。信息熵越大, 光子分布越分散, 脉宽(束宽)越大。 $dS/dz > 0$, 光子分布趋向均匀, 脉冲展宽(光束发散); $dS/dz < 0$, 光子分布趋向有序, 脉冲压缩(光束聚焦)。下面分别通过解析分析和数值模拟验证这一假设。

3 光函数信息熵演化的解析分析

首先给出一个简单的特例。我们知道, 基孤子在非线性传输中形状保持不变, 因此其 dS/dz 应该为零。基孤子光函数为^[9]

$$\varphi(t, z) = \text{sech}(t) \exp(iz/2). \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (5) 式, 得

$$S = -\frac{\int \text{sech}^2(t) \ln[\text{sech}^2(t)] dt}{\int \text{sech}^2(t) dt}. \quad (7)$$

显然 (7) 式是一个不含参量 z 的定积分, 结果是与 z 无关的常数, 故 $dS/dz = 0$ 。信息熵不变, 信息熵增为零, 脉冲无畸变传输, 这与基孤子的传输特性相符。

对于更一般的情况, 将傍轴方程 (2) 的对称试探解设为^[10,11]

$$\varphi(z, r) = A(z)g(w) \exp[i\phi(z) + ir^2\mathcal{U}(z)], \quad (8)$$

$$w = r/W(z),$$

式中, 振幅 A 、束宽 W 、曲率参量 b 、相位 ϕ 都是 z 的待定函数。函数 $g(w)$ 可以取为超高斯函数 $\exp(-w^{2s}/2)$ ($s=1$ 对应于高斯函数)^[11]、正割函数 $\text{sech}(w)$ ^[10] 或其他已知的解析函数。利用 φ 的归

一化特性可得^[3]

$$A^2 W^d = A_0^2 W_0^d = \frac{1}{\beta}, \quad (9)$$

其中 A_0 、 W_0 分别为振幅和束宽的初始值, 常数 $\beta = \int g^2(w) dw$,

$$b = \frac{1}{4R} = \frac{1}{4W} \frac{dW}{dz}, \quad (10)$$

其中 R 是光束传输的曲率半径^[3,12], 将 (8) 式代入 (5) 式, 得

$$S = -2 \ln A - 2\beta^{-1} \int g^2(w) \ln g(w) dw. \quad (11)$$

两边对 z 求导 (11) 式第二项是定积分, 结果是常数, 故求导后为 0, 利用 (9) 式和 (10) 两式可得

$$dS/dz = d/R. \quad (12)$$

由此可见曲率半径 R 的符号反映了信息熵的变化, 正曲率半径对应于信息熵增加, 负曲率半径对应于信息熵减少。我们知道, 曲率半径 $R < 0$, 对应光束聚焦; 曲率半径 $R > 0$, 对应光束发散。因此 $dS/dz < 0$ 则光束聚焦, $dS/dz > 0$ 则光束发散。鉴于 (8) 式是光束(脉冲)非线性光传输研究中普遍采用的试探解函数, 因此我们认为, 信息熵变化率与光束(脉冲)聚散的关系具有一定的普遍意义。

(12) 式表明, 光函数信息熵的变化与束宽 (W) 的变化 ($dW/dz = 2W^2/R$)^[3] 是一致的。值得指出的是, 得到 (12) 式的关键在于 (8) 式中振幅部分可以写成 $A(z)$ 和 $g(w)$ 的可分离形式。如果振幅中的变量不能分离, 则 (12) 式不成立。本文的研究表明, 在这种情况下, 光函数信息熵的变化更能表征光束传输的变化。

4 光函数信息熵演化的数值模拟结果

4.1 $d=1$ 情况

下文中的二阶矩 G 与均方根宽度 σ 分别由 (13) 式、(14) 式给出:

$$G = \int r^2 |\varphi|^2 dr / P, \quad (13)$$

$$\sigma = \sqrt{\int r^2 |\varphi|^2 dr - \left(\int r |\varphi|^2 dr\right)^2} / P. \quad (14)$$

对于轴对称脉冲, $G = \sigma^2$, 故以下只给出二阶矩的曲线。

对于 $d=1$ 情况, 我们模拟了二、三阶孤子脉冲的传输, 如图 1、图 2 所示。二图的四个子图 (a)、(b)、(c)、(d) 的纵坐标分别为脉冲半峰全宽与入射脉冲宽度 T_0 ^[9] 之比 W/T_0 、二阶矩 G 、信息熵 S 、信

息熵对传输方向的变化率 dS/dz ，横坐标为传输距离 z/z_0 ， z_0 为孤子周期^[9]。由于本文的计算是根据无量纲方程(2)式进行的，因此，本文的所有图中所有参量都是无量纲的。

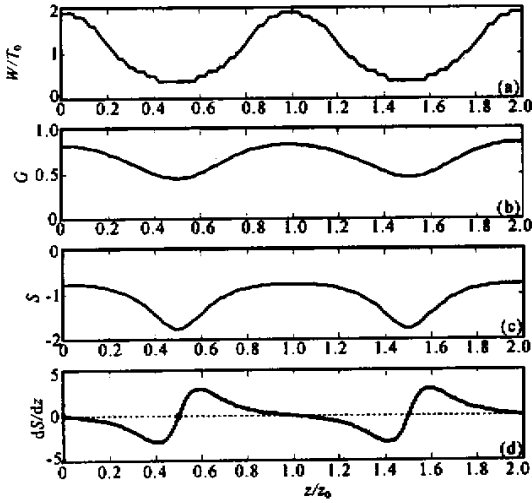


Fig. 1 The parameter of second-order soliton versus distance of propagation (z_0 is the soliton period). (a) Pulse width T_0 is the width of the incident pulse; (b) Second-order moments; (c) Information entropy; (d) Differentiation of information entropy

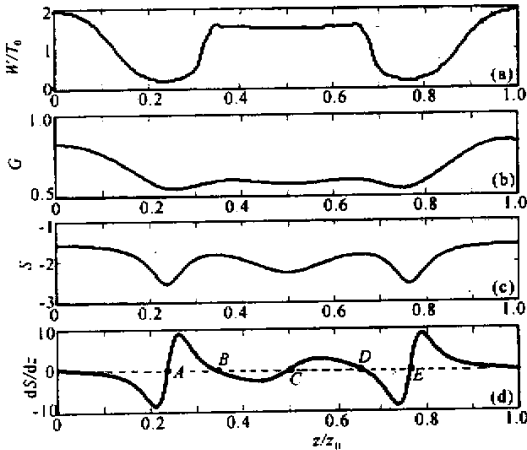


Fig. 2 The parameters of third-order soliton versus distance of propagation (z_0 is the soliton period). (a) Pulse width (T_0 is the width of the incident pulse^[9]); (b) Second-order moments; (c) Information entropy; (d) Differentiation of information entropy

图1为二阶孤子的演化情况。由图1可以看出，在一个孤子周期中，二阶孤子脉冲先压缩接着展

宽，脉宽先减小，到达最小值后开始增大。二阶矩的变化与脉宽变化基本吻合，但曲线较平滑。信息熵与脉宽变化趋势相同，也是先减小，到达最小值后开始增大，直到回到起始值，而且信息熵越小，对应的脉宽越窄；从 dS/dz 曲线更明显地得出： $dS/dz > 0$ 则脉冲展宽， $dS/dz < 0$ 则脉冲压缩，且 dS/dz 由负变化到正时，曲线过零点A，此点对应信息熵的最小值点，也就是脉冲压缩最窄处。可见，信息熵的变化能很好地表示脉冲的演化。

图2是三阶孤子演化情况。脉宽、信息熵的变化趋势比较吻合，A、B、C、D、E为信息熵变化率曲线的过零点，A、E两点为压缩最窄处，除BD段外，信息熵、 dS/dz 与脉宽、二阶矩变化对应关系与二阶孤子类似。但在BD段，用脉宽和二阶矩来描述脉冲的演化就比较困难。

图3给出了B、C、D三点的脉冲波形，纵坐标 $u = |\varphi|$ ，横坐标为 t 。BD段的实际演化过程是：单脉冲先分裂为双脉冲，从B点到C点，中心凹陷逐渐加深，C点最深，从C点到D点，中心凹陷逐渐变浅，直到回复到单脉冲状态。由图3可见，在BD段，虽然脉冲发生分裂，但其外部轮廓的半峰全宽几乎保持不变，因此图2(a)中脉宽曲线在BD段起伏不大，不能准确描述脉冲中心点的下陷。如果要在程序中加入判断脉冲中心点是否分裂的功能，无疑会使计算量成倍增加，对 $d = 2$ 情况更加严重。同样图2(b)二阶矩曲线在BD段尽管有所起伏，但从A点到B点、D点到E点的变化不是太大，这与实际情况不符。而用信息熵可以这样描述：从B点到C点，脉冲分裂程度加大，整体上是压缩的， $dS/dz < 0$ ；C点 $dS/dz = 0$ ，分裂程度最大，整体压缩最厉害；从C点到D点，脉冲分裂程度减小，整体上是展宽的， $dS/dz > 0$ 。可见，信息熵比脉宽、二阶矩包含的信息量大，准确程度高。

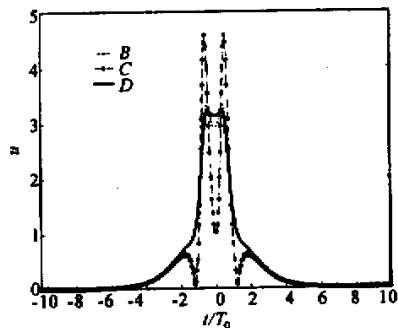


Fig. 3 The pulse's shape at point B, C, D

由以上的讨论可知,用信息熵、信息熵增的概念确实能较好地表征脉冲的压缩与展宽,以前人们经常用到脉宽作为描述光传输过程的特征参量。但在计算脉宽时,由于脉冲在时域离散采样,不可能找到准确的半功率点,只能在一定误差范围(设为 Δ)内取值,特别是在脉冲很窄处,相邻采样点的值相差较大,如果 Δ 取得较小,将找不到合适的点,而将 Δ 取得较大,将造成很大误差。所以以前人们为了减小这一误差,在计算中选择加大采样点数的方法,这就大大提高了计算量,对于 $d = 2$ 的情况更是如此。而由于信息熵是一个积分量,计算信息熵的误差小,所需采样点数不多,计算量小,不论脉冲形状如何,它总可以较好地模拟。

4.2 $d = 2$ 情况

只考虑轴对称情况,设初始值 $\varphi(r, 0) = A_0 \exp(-r^2)$ 。由自由空间中的非线性光传输理论可知^[13],当输入功率 $P_0 > P_c$ (临界功率)时,光束将发生自聚焦,直到发生坍塌(collapse),反之,光束将发散。我们模拟了自聚焦、临界、发散三种情况的演化。

图 4 为自聚焦光束的演化过程。

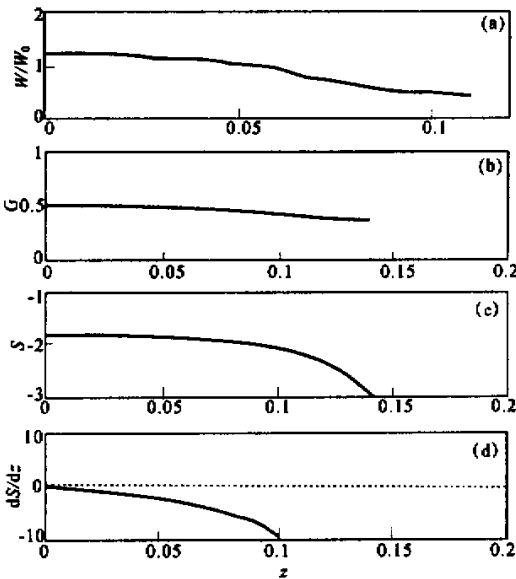


Fig. 4 The parameter of self-focusing beam versus distance of propagation ($A_0 = 4$). (a) Beam width (W_0 is the width of beam waist); (b) Second-order moments; (c) Information entropy; (d) Differentiation of information entropy

图 5 是输入功率为 P_c 时的演化过程,图 6 为光束

发散的演化过程。三图的四个子图(a)(b)(c)(d)的纵坐标分别为脉冲半峰全宽 W 与光腰束宽比 W/W_0 、二阶矩 G 、信息熵 S 、信息熵对传输方向的变化率 dS/dz 。横坐标为传输距离 z 。

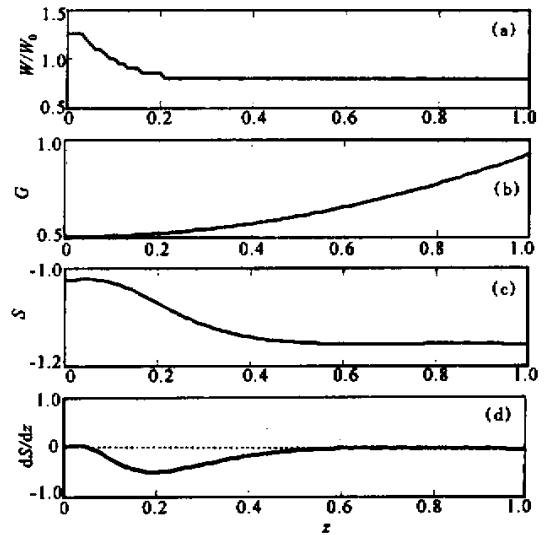


Fig. 5 The parameter of critical beam versus distance of propagation ($A_0 = 2.751$). (a) Beam width (W_0 is the width of beam waist); (b) Second-order moments; (c) Information entropy; (d) Differentiation of information entropy

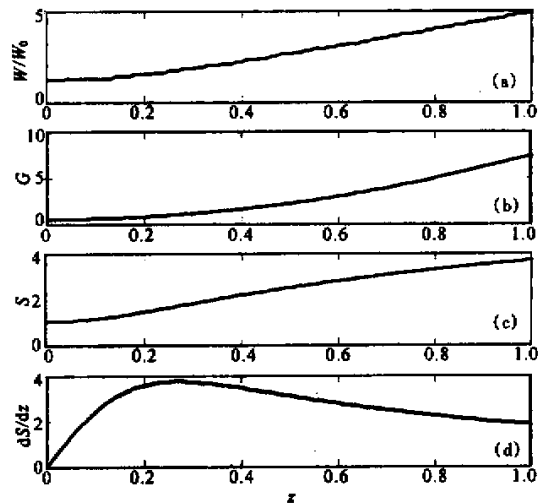


Fig. 6 The parameter of defocusing beam versus distance of propagation ($A_0 = 1$). (a) Beam width (W_0 is the width of beam waist); (b) Second-order moments; (c) Information entropy; (d) Differentiation of information entropy

由图 4 知,光束急剧聚焦,最后坍塌。信息熵的

变化与光束的变化一致。信息熵不断减小,信息熵变化率总小于 0。由于在接近坍塌点时,光束聚焦很快,光束很陡,故计算束宽误差很大; G 的变化趋势与信息熵吻合,都是一直减小,但曲线平坦。

由图 5 可见,当输入功率为 P_c (对应 $A_0 = 2.751$,我们得出的这个临界值 A_0 与文献 [13] 中给出的临界值 $A = 2\sqrt{1.8842}$ 非常接近) 时,光束先聚焦,传输一定距离后,束宽基本不变,接近自陷情况。对应的信息熵也是先减小 $dS/dz < 0$,传输一定距离后,信息熵基本保持不变 $dS/dz = 0$ 。而二阶矩一直增长,显然与实际情况不相符。

由图 6 同样可以看出,光束发散,信息熵变化率总大于 0。

可见,光束的信息熵比束宽、二阶矩更能准确描述光束在非线性体介质中的传输过程。

讨论 从(5)式可知,尽管光函数信息熵不能直接测量,但 $|\varphi|^2$ 所代表的光强是可以测量的,可以用与计算均方根束(脉)宽同样的办法计算光函数信息熵。与量子力学的波函数类似, $|\varphi|^2$ 可以看成光子在横截面某个位置上出现的几率,因此,光函数信息熵表征了光子在横截面上分布的混乱度。光子分布越均匀,光函数信息熵越大。换句话说,光函数信息熵表征了光函数的形状。本文的研究表明,光函数的信息熵可以作为描述光函数演化过程的特征参量,用信息熵对传输方向的变化率 dS/dz 可表征光束的聚散。 $dS/dz > 0$ 时脉冲展宽(光束发散), $dS/dz < 0$ 则脉冲压缩(光束聚焦)。

理论分析和计算研究表明,大多数情况下,光函数信息熵的演化与光脉冲的脉宽或光束的束宽的演化是一致的,两者的变化率符号相同。然而在一些特殊情况下,例如自聚焦光束临界状态下的传输(图 5),光函数信息熵的演化与光束束宽的演化是完全不同的,而光函数信息熵能够准确地描述光束的临界传输,但均方根束宽不能。因此,可以说,光函数信息熵比计算脉(束)宽、二阶矩更能准确地描述脉冲(光束)的演化过程。

光函数信息熵具有明确的物理意义。尽管光函数信息熵不能直接测量,但它很容易作数值计算。在数值模拟光传输时,其计算误差比计算脉(束)宽

小,计算量也小。

正如图 2 和图 5 所表明的,光函数信息熵的变化可以准确表示光函数形状的变化,为光函数形状的演化提供了定量指标。有了这个指标,无需详细画出详细的光函数演化图,就可以研究各种因素对光脉冲或光束传输的影响。

值得指出的是,本文提出的表征光函数分布的信息熵与热力系统的熵是没有任何关系的,因此信息熵的增减不服从热力学第二定律。

参 考 文 献

- [1] Wehrl A. General properties of entropy. *Rev. Mod. Phys.*, 1978, **50**: 221~260
- [2] Maassen H, Uffink J B M. Generalized entropic uncertainty relations. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, **60**(12): 1103~1106
- [3] Neuman Von. Thermodynamik Quantum Mechanischer Gesamtheiter. *Goett. Nach.*, 1927, **1**(2): 273~291
- [4] Liu T C, Guo H, Hu W *et al.*. A Schroedinger formulation research for light beam propagation. *Science in China (Series A)* (中国科学 A), 2000, **43**(3): 312~322 (in Chinese)
- [5] Guo Q, Chi S. Nonlinear light beam propagation in uniaxial crystals: Nonlinear refractive index, self-trapping and self-focusing. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2000, **2**(1): 5~15
- [6] Siegman A E. Defining the effective radius of curvature for a nonideal beam. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1991, **QE-27**(5): 1146~1148
- [7] Sorokin E, Tempea G, Brabec T. Measurement of the root-square width and the root-mean-square chirp in ultrafast optics. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 2000, **17**(1): 146~151
- [8] Gloge D, Marcuse D. Formal quantum theory of light ray. *J. Opt. Soc. Am.*, 1969, **59**(12): 1629~1631
- [9] Agrawal G P. *Nonlinear Fiber Optics*. Boston: Academic Press, 1989. 114, 143, 147
- [10] Desaix M, Anderson D, Lisak M. Variational approach to collapse of optical pulse. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1991, **8**(10): 2082~2086
- [11] Karisson M, Anderson D. Super-Gaussian approximation of the fundamental radial mode in nonlinear parabolic-index optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1992, **9**(9): 1558~1562
- [12] Siegman A E. *Lasers*. Mill Valley (Calif.): Oxford University, 1986
- [13] Marburger J H. Self-focusing, theory. *Prog. Quant. Electron.*, 1975, **1**(1): 35~38

Study on Information Entropy Representing Nonlinear Propagation of Light

Tian Ye¹⁾ Liu Timon Cheng-Yi²⁾ Guo Qi¹⁾ Hu Wei²⁾

(1), *South China Institute of Quantum Electronics , South China Normal University , Guangzhou 510063*)
(2), *Laboratory of Light Transmission Optics , South China Normal University , Guangzhou 510063*)

(Received 5 March 2001 ; revised 31 July 2001)

Abstract : The information entropy in quantum mechanics is introduced to represent nonlinear propagation of light within the framework of the Schroedinger formulation of light propagation. Our analytical derivation and numerical calculation show that the information entropy and its differentiation with respect to the propagation direction can describe the compression and broadening of light pulse (or the focusing and diffusion of light beam), which is better than the description with pulse (beam) width and second-order moments.

Key words : nonlinear propagation of light ; information entropy ; beam width ; pulse width ; second-order moments