

文章编号 : 0253-2239(2002)02-0210-05

# 基于图像分形相关位移测量新方法的研究\*

侯振德 秦玉文

(天津大学力学系,天津 300072)

摘要: 本文从分形理论出发提出了图像分形相关位移测量的新方法。较之 20 世纪 80 年代发展起来的以像素的灰度相关为基础的散斑图相关性法,分形相关性法更充分地利用了散斑图的相关性特征,有着更深入的发展潜力。为了验证理论与方法的可靠性,进行了验证性实验并和散斑图相关性法的测试结果进行了比较。测试结果显示,测试精度至少可达 0.06 个像素。最后讨论了这一方法的发展前景。

关键词: 图像;分形;数字散斑;分形维数;相关性;位移测量

中图分类号:TB921 文献标识码:A

## 1 引 言

自 20 世纪 80 年代发展起来的数字散斑相关性法<sup>[1]</sup>是利用变形前后物体表面的两幅数字化散斑图像像素灰度间的相关性实现对物体表面的位移测量。数字散斑图像是一个形态复杂的不规整的几何结构,它不仅包含灰度信息还包含形态信息,可以说变形前后两幅数字散斑图像间的结构形态特征和灰度特征都具有相关性。充分地利用这些相关特征提高测量精度和搜索速度将会使图像相关测量方法进一步完善和发展。

分形是近年来发展起来的十分活跃的数学分支<sup>[2]</sup>,已在物理、化学、医学、图像识别等领域获得应用。本文提出了建立在分形理论基础上的图像分形相关位移测量的新方法。利用变形前后图像的盒维数作为相关参数进行位移搜索。并通过实验验证了方法的可靠性。

## 2 原理与方法

关于分形,目前尚无严格的数学定义,一般将其描述为具有自相似性和标度不变性且不能用传统几何语言表达的不规整的几何形体<sup>[3,4]</sup>。自然界中的分形则表现为统计自相似和存在于一定尺度范围内的标度不变性。分形的形态复杂程度和不规整性用分形维数(也称分数维)描述。

分形维数的定义有多种,以盒维数(Box Dimension)为常用。对于一个分形(或集合) $A$ ,盒维数  $d$  定义为

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

其中  $N(\epsilon)$  表示覆盖住  $A$  的边长为  $\epsilon$  的正方形盒子数。由于所选取的覆盖为正方形,所以盒维数最容易由计算机求得。它是迄今为止应用最广泛的一种维数。

实际计算时,取一系列不同尺寸的  $\epsilon$  得到一系列  $N(\epsilon)$ ,以横坐标表示  $\ln(1/\epsilon)$ ,以纵坐标表示  $\ln N(\epsilon)$ , $\ln N(\epsilon) - \ln(1/\epsilon)$  曲线的直线段就是标度无关性区域,而直线的斜率即为盒维数<sup>[5]</sup>。

### 2.1 数字散斑图的分形性质

用于位移测量的数字散斑图一般源自被测物体表面的自然纹理、结构形态或是在物体表面人工喷制的随机散斑。在小视场时(如小于  $1 \text{ mm}^2 \sim 2 \text{ mm}^2$ )主要利用物体的细观或微观自然纹理及微观结构形态。这类纹理的数字化图像具有分形特征已被很多文献所认定<sup>[6-8]</sup>。在此只需确定随机散斑的数字化图像也具有分形特征。标度无关性是界定分形的主要指标,所谓标度无关性是指覆盖的尺寸在一定范围内变化时分形维数不变,也称比例自相似。

图 1(a)是在材料表面制成的人工散斑图,此图的散斑分布是随机的,灰度也是随机变化的。以图中任一子区(图中方框,边长为 128 个像素)所包含的像素作为所研究的集合,将其看作依灰度变化的三维空间曲面。采用改进的用于计算分形曲面盒维数的 RDBC(relative differential box-counting)方法<sup>[5]</sup>计算  $N(\epsilon)$  即,

\* 教育部博士点基金资助课题。

E-mail: hou@tj.cnuninet.net

收稿日期 2000-12-26;收到修改稿日期 2001-04-19

$$N(\epsilon) = \sum_{k=1}^n \frac{g_{kmax} - g_{kmin}}{\epsilon}, \quad (1)$$

其中  $g_{kmax}$ 、 $g_{kmin}$  分别为第  $k$  个覆盖内的最大灰度值和最小灰度值， $n$  是边长为  $\epsilon$  的全部覆盖数。图 1(b) 是其  $\ln N(\epsilon) - \ln(1/\epsilon)$  曲线， $\epsilon$  的长度分别为 2、4、8、16、32 个像素。由图可知，在前四个点范围内曲线呈线性关系。用最小二乘法拟合这四个点，盒维数  $d = 1.22756$ ，其相关系数为 0.99986，可见线性度非常好，说明这是标度无关性区域。重复对图中其它区域进行计算结果也都具有比例自相似的性质。据此，可以确定这种数字散斑图也具有分形性质。

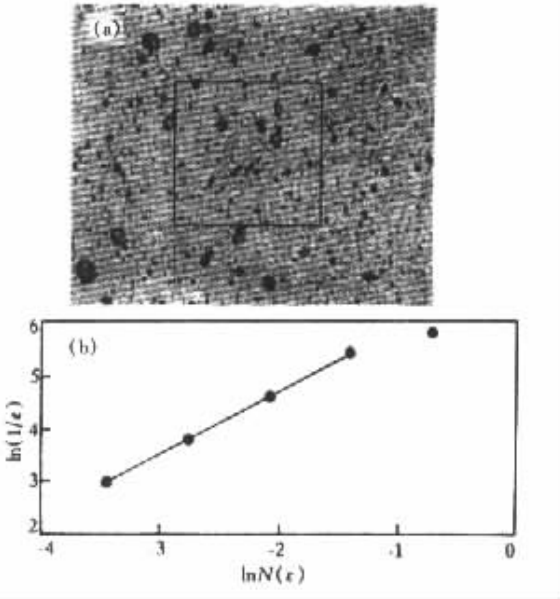


Fig.1 (a) Artificial speckle pattern ;  
(b)  $\ln N(\epsilon) - \ln(1/\epsilon)$  curve

设变形前的图像中任一像素的位置坐标为  $X$ ，不失一般性  $X$  意指像素的二维坐标点。在变形后的图像中  $X$  移至  $Y$ ， $X$  和  $Y$  一一对应，用  $f$  表示  $X$ 、 $Y$  之间的映射关系，即  $f: X \rightarrow Y (X, Y \in R^2)$ ， $f$  把变形前的图像映射为变形后的图像。理论上这种映射并不改变像素的灰度。

作为分形变形前后的两幅图像的分形维数具有几何不变性和双 Lipschitz 不变性的性质<sup>[3,4]</sup>。几何不变性说明对集合进行平移、旋转和相似映射时不改变分形维数。双 Lipschitz 不变性的含意为：在  $n$  维实数空间  $R^n$  中，若映射  $f: R^n \rightarrow R^n$  满足

$$\begin{aligned} c_1 |X_2 - X_1| &\leq |f(X_2) - f(X_1)| \leq \\ &c_2 |X_2 - X_1|, \end{aligned} \quad (2)$$

则映射并不改变集合的分形维数，式中  $X_1, X_2 \in R^n$ ， $c_1, c_2$  为常数且  $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \infty$ 。应用于数字散斑图 ( $n = 2$ ) 且  $Y_i = f(X_i)$  ( $i \in Z$  表示图像中各像

素点的序号)，几何不变性确保了数字散斑图发生拉伸、压缩变形及刚体位移时不影响其分形维数。由于位移场的连续性和有界性，双 Lipschitz 不变性说明总可以找到满足 (2) 式条件的  $c_1, c_2$ ，使图像中发生剪应变的任何微段  $|X_2 - X_1|$  满足 (2) 式，所以，剪切变形也不影响分形维数。

正是数字散斑图的分形性质，奠定了利用其分形维数进行位移测量的基础。在图像中任意选定一子区可以利用其分形维数作为区分其它子区的特征参数。当然，不能采用与其它子区的分形维数直接比较的方法进行区分，一方面是由于散斑的随机性，不同的子区可能会有相同的分形维数；另一方面，虽然变形后子区的分形维数未改变，但其形状已发生了改变并且是未知的。若在变形后的散斑图中寻找变形前的子区则只能选用与变形前形状和尺寸都相同的子区进行搜索，此时，二者的分形维数是相关的但不相等。所以，须借助于相关性实现位移测量。

### 2.2 位移测量方法

在变形前的数字散斑图中选定一要计算位移的点  $X$ ，然后在变形后的散斑图中寻找  $X$  点的新位置  $Y$  点。如图 2 所示，在变形前的散斑图中以  $X$  点为中心确定一子区  $A$ 。在变形后的散斑图中选定与子区  $A$  尺寸和形状都相同的子区  $B$ 。将子区  $A$  分解成  $n$  个次级子区  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，并使  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ，分别计算出每个  $A_i$  的盒维数  $d_{A_i}$ 。同理，以同样的方式将子区  $B$  分解成  $n$  个次级子区  $B_i$ ，使  $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ ，并计算出相应的盒维数  $d_{B_i}$ 。根据统计学的相关性原理，子区  $A$  和  $B$  之间的相关系数  $\rho$  为

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (d_{A_i} - \bar{d}_A) (d_{B_i} - \bar{d}_B)}{\left[ \sum_{i=1}^n (d_{A_i} - \bar{d}_A)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{i=1}^n (d_{B_i} - \bar{d}_B)^2 \right]^{1/2}}, \quad (3)$$

其中  $\bar{d}_A, \bar{d}_B$  分别为  $d_{A_i}, d_{B_i}$  的均值。使  $\rho$  最接近 1 的子

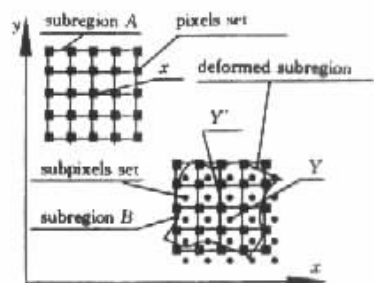


Fig.2 Schematic of subregions

区  $B$  即为子区  $A$  在变形后的散斑图中的新位置,其中心点即为  $Y$  点。 $Y$  和  $X$  之差即为  $X$  点的位移。

通常,变形后  $X$  点未必映射到整数像素点,即  $Y$  点不一定位于整数像素点,上述方法寻找到的只是最临近  $Y$  的整像素点,不妨记为  $Y'$ 。需通过插值求得与子区  $B$  同构的亚像素子区,并由(3)式以同样的方式搜索到  $Y$  在亚像素点上的精确位置。

能否从亚像素子区中搜索到  $Y$  的精确值其关键在于插值是否影响分形维数。可以从分形的自相似性分析亚像素子区与分形维数的关系。分形的自相似性是指其形态在不同的空间尺度下观察时是相似的(实际为统计自相似,这是自然界中分形的共性)。数字散斑图的自相似性表现为灰度的多层次和形态细节方面与宏观结构的自相似。由于计算机采集图像时受光学设备分辨率、模数转换精度和噪声的影响,图像的有些灰度层次和细节被丢失了。利用插值求得位于非整数像素点的亚像素,客观上相当于近似恢复图像的灰度层次和细节。由此计算出的分形维数与实际值应是一致的。这一点最终要通过实验来证实。

### 3 实验结果

为了验证理论与方法是否正确,作了验证性实验。如图 3 所示,试件是一块表面光滑无缺陷的矩形环氧树脂块,在表面上喷制具有灰度分布的散斑图[如图 1(a)],变形前后的图像经 CCD 转化为数字化图像输入计算机,集中力  $P$  沿纵向垂直作用于试件上表面中央部位。测量图 3 所示水平线  $\overline{AB}$  上的纵向位移,线  $\overline{AB}$  的位置相对于  $P$  的作用线左右对称。计算时采用双线性插值求亚像素子区。

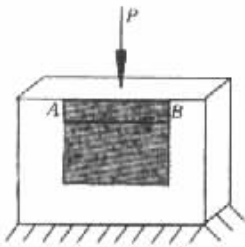


Fig. 3 Schematic of test

用分形相关法及以数字散斑相关法作为参照方法分别计算了三个方面的数据。第一,沿线  $\overline{AB}$  以力  $P$  的作用线为对称,在左右各 110 个像素的范围内计算垂直位移,每隔 20 个像素计算一点,图 4 是测试结果的拟合曲线,圆点表示用分形相关法计算的

结果,菱形表示用数字散斑相关法计算的参照结果。第二,选择图 4 中剪应变最大的部位(第 55 至 75 像素点)逐点计算总共 21 个像素点的垂直位移,结果如图 5 和图 6 所示。第三,在  $\overline{AB}$  线上任选一点(第 204 像素点)求得其实际位移点,并以此点为中心,选择  $48 \times 48$  像素的子区分别计算周围  $13 \times 13$  像素的邻域内各点的相关系数。图 7、图 8 是分别用分形相关法和参照方法得到的相关系数随位置变化的拟合曲面图。其中,  $x$  表示平行于线  $\overline{AB}$  的方向,  $y$  表示垂直于线  $\overline{AB}$  的方向。

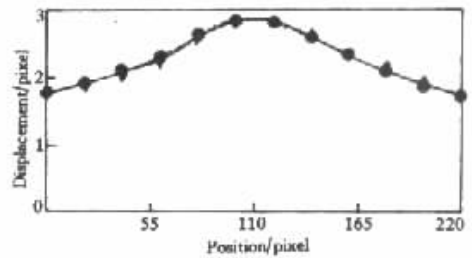


Fig. 4 Vertical displacement on the line  $\overline{AB}$ . ● test data; ◆ Ref. data

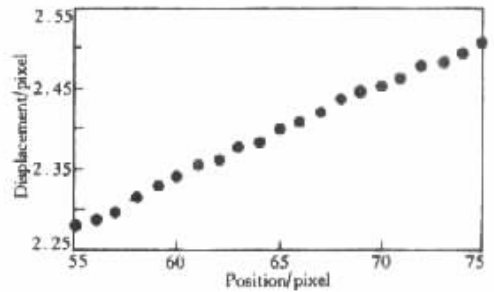


Fig. 5 Vertical displacement on series points (fractal method)

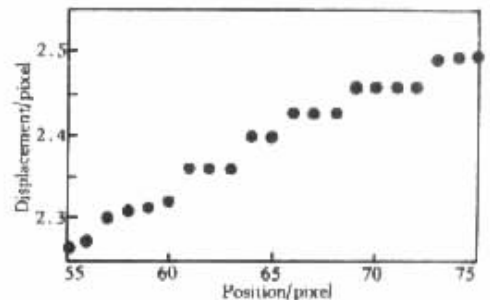


Fig. 6 Vertical displacement on series points (Ref. method)

根据图 4,可看出两种方法的计算结果基本一致。二者差别的最大值为 0.02 个像素。差别最大的部位在第 50 ~ 70 像素之间。图 5 和图 6 显示了这种差别。分形相关法的结果说明位移随像素的位置基本呈光滑连续地变化。而参照方法的结果光滑连续性相对要差,呈跳跃式地增加。实际上,试件的表面位移是光滑连续变化的。从这一点分析分形相

关法要优于参照方法。已知参照方法的测试精度是 0.04 个像素,最保守地估计分形相关法的精度至少为 0.06 个像素,若从结果的光滑性分析,分形相关法的精度会高于参照方法。同时,这一结果也证明了,在这一精度水平上,通过插值求得亚像素集合其分形维数与实际值是一致的。

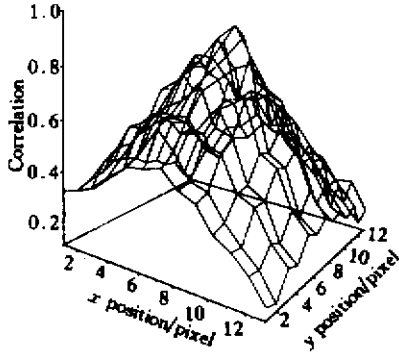


Fig. 7 Correlation 3-D plot

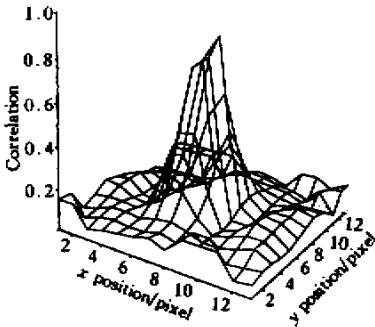


Fig. 8 Ref. 3-D correlation plot

根据图 7 和图 8,分形相关法的相关性曲面的单峰性优于参照方法。而参照方法的相关性曲面的要比分形相关法的相关性曲面陡峭,后一点说明在测试点周围像素间的灰度相关性要大于分形维数的相关性。原因是参照方法是计算了 2034(48×48)对像素之间的相关性,而分形相关法只计算 36 对盒维数之间的相关性。应该说参照方法所采用的信息多于本文方法。但是,在实际位移点上,由分形相关法所得到的相关系数为 96(相关曲面的峰值),而参照方法的相关系数为 91(参照相关曲面的峰值)。可以这样说在实际位移点的周围参照方法的相关性大于分形相关法,而在实际位移点上分形相关法的相关性要大于参照方法。在所计算的全部位移点上与这一结论一致的点超过在 80%。

由于分形相关法的单峰性优于参照方法,遂使得相关性计算简单,实际搜索速度比参照方法要快 24 倍左右。这在测试大位移时尤为有意义,比如,利用 CPU 为 300MHz 的计算机在 28×28 像素的范

围内搜索一个点的位移使用参照方法需 36 分钟,而采用分形相关法只需 1.5 分钟。

## 4 结论与讨论

利用分形维数相关测量位移是一种新的方法,与 80 年代发展起来的以像素的灰度相关为基础的数字散斑相关法比较,分形相关法更充分地利用了图像的相关性特征,有着进一步发展的前景。

1)应该说对子区内所有像素的灰度进行相关计算所利用的信息最多,但是变形前后两次采集图像过程中硬件噪声会影响图像的数字转换精度使得两幅图像的灰度水平和分布不尽一致,从而降低图像所载信息的可靠性,自然也降低了变形前后两幅图像像素灰度之间的相关性。将硬件噪声干扰用二维空间分布的白噪声描述,根据(1)式求  $N(\epsilon)$ 是一求和过程,求和相当于求均值,而白噪声的均值为零,可见计算盒维数的同时也是消除白噪声的滤波的过程。所以,变形前后散斑图的分形维数比灰度要稳定。尽管分形维数仅仅是一个综合数值,然而它是一个稳定的数学参数。与数量众多的像素的灰度相关性相比前者在最终实际位移点上的相关性反而更高。

2)分形维数有多种定义,如信息维数、关联维数等都可被用来进行相关性搜索。尤其可利用分形插值理论<sup>[3,4]</sup>计算亚像素,这是一种正在发展的理论。随着这一理论的完善,可利用它的迭代函数系统(IFS)对图像进行分形插值,其特点是保持图像的分形维数不变,这样肯定会提高搜索精度。

## 参 考 文 献

- [1] Peter W H, Ranson W F. Digital imaging technique in experimental stress analysis. *Opt. Engng.*, 1982, 21(3): 427 ~ 431
- [2] Mandelbrot B B. *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1982
- [3] Xie Heping, Xue Xiuqian. *Mathematics Foundations and Methods in Fractal Application*(分形应用中的数学基础与方法). Beijing: Science Press, 1997(in Chinese)
- [4] Wen Zhiying, Fan Aihua, Wen Zhixiong. *Fractal Geometry Theory and Its Applications*(分形几何理论与应用). Hangzhou: Zhejiang Science & Technology Press, 1998(in Chinese)
- [5] Ying Yuzheng, Shi Qingyun. Fractional box-counting and fractal dimension estimation. *PR & AI*(模式识别与人工智能), 1997, 10(4): 357 ~ 361(in Chinese)
- [6] Song Qi, Zhu Guangxi, Zhu Yaoting. Study on fractal property of irregular regions in material images. *J. Data Acquisition &*

- Processing*(数据采集与处理), 1996, **11**(2):103 ~ 106( in Chinese )
- [ 7 ] Chen Xiangdong , Chang Wensen , Gao Zheng. Study real-time extracting the fractal dimension of image based on mathematical morphology. *Information and Control*(信息与控制), 1998, **27**(6):433 ~ 439
- [ 8 ] Li Qikai , Zhang Yue , Zhu Wuyang. Fractal structure and fractal dimension determination at nanometer scale. *Science in China (A)*(中国科学, A 辑), 1999, **29**(4):335 ~ 349( in Chinese )

## Study on a New Method of Displacement Measurement Based on Fractal Image Correlation

Hou Zhende Qin Yuwen

( *Department of Mechanics ,Tianjin University , Tianjin 300072* )

( Received 26 December 2000 ; revised 19 April 2001 )

**Abstract :** The classical digital speckle correlation method of deformation measurement is based on gray correlation between the images before and after deformation. In fact , this kind of images are fractal and its fractal dimension represents both gray and morph information. A fractal dimension correlation method of displacement measurement is developed. This new method fully takes the advantage of the correlation behavior of digital images , so , it could be more precise than the classical one. In order to verify validity of it , an experiment is designed. The result shows that its precision is better than 0.06 pixels.

**Key words :** image ; fractal ; digital speckle ; fractal dimension ; correlation ; displacement-measurement