

文章编号 : 0253-2239(2002)11-1404-04

球面波的相奇异分布区域特征*

孙存英 赵道木 王绍民

(浙江大学物理系 , 杭州 310028)

摘要 : 从波动方程出发 , 在基尔霍夫边界条件下 , 根据积分的物理意义 , 简明地研究了发散和汇聚球面波的相奇异区域分布。结果表明 , 除了汇聚的球面波焦点区域存在相奇异现象外 , 焦点以外的区域及对发散的球面波同样存在相奇异现象。发散球面波的相奇异区位于入射空间 , 在相奇异区域的不同部分相奇异规律不同 , 源点是相奇异区里的一个特殊点。汇聚的球面波的相奇异区域存在于像空间 , 结构简单 , 焦点是相奇异区域里的一个特殊点。

关键词 : 基尔霍夫边界条件 ; 发散球面波 ; 汇聚球面波 ; 相奇异区域

中图分类号 : O436 文献标识码 : A

1 引 言

相奇异现象在光学中起着重要的作用 , 许多研究者认为它与诸多光学现象的产生有关 , 如它可以解释衍射波的相位超前问题 , 决定激光腔中的横向模的谐振频率 , 影响光钳焦点处的横向捕获力 , 导致真空中的超光速现象等^[1]。因而 , 相奇异现象自古伊于 1890 年发现以来 , 研究工作一直没有间断过^[1-6]。

以往对相奇异现象的研究仅局限于汇聚波的焦点区域 , 且研究方法一般较为复杂 , 如 Linfoot 和 Wolf^[2]根据基尔霍夫衍射积分公式 , 利用络梅尔函数 , 给出焦点区域的复杂相分布 , 从而表明在焦点区域存在相奇异现象等。

本文从亥母霍兹定理出发 , 在基尔霍夫边界条件下 , 根据面积分的物理意义 , 简明地研究了发散和汇聚球面波的相奇异区域分布。结果表明除汇聚波的焦点区域外 , 在焦点以外的区域及对发散波均存在相奇异现象。

2 自由空间的场函数

设严格单色的标量波为

$$E(x, y, z, t) = U(x, y, z) \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

在真空中 , 与空间有关的部分满足与时间无关的波动方程

$$(\nabla^2 + \kappa^2)U = 0, \quad (2)$$

令 V 是闭合面 S' 所包围的体积 , P 是 S' 内任一点 , 并假定 U 在 S' 内和 S' 上具有连续的一阶和二阶偏微商 , 如果 U' 是任一其他函数 , 和 U 满足同样的连续性条件 , 则由格林定理 , 有

$$\iiint_V (U \nabla^2 U' - U' \nabla^2 U) dV = - \iint_{S'} \left(U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS', \quad (3)$$

其中 $\partial/\partial n$ 表示沿积分面向内法线取微商。取球面波的格林函数 $U' = \exp(iks)/s$, s 为 P 点到面元 dS' 的距离 , 显然对于 $s = 0$, U' 有一奇点。根据留数定理 , 光速有限 , 无穷远空间等近似^[7] , 由 (3) 式可得

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[U \frac{\partial}{\partial n} \frac{\exp(iks)}{s} - \frac{\exp(iks)}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS, \quad (4)$$

其中 , S 是 S' 的一部分。 $U(P)$ 为齐次波动方程在场中任一点 P 的解。

3 球面波的相奇异分布区域特征

自由传播的单色波在经过小孔时 , 场分布会因边界作用而改变。这里利用基尔霍夫边界条件 , 研究球面波的相奇异区域分布。

3.1 发散球面波的情况

当入射波为发散的球面波时 , 在孔面上取基尔霍夫边界条件 , 得

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{A \exp(ikr)}{r}, \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= \frac{A \exp(ikr)}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(n, r), \end{aligned} \right\} (5)$$

* 国家自然科学基金(19974038) 浙江省自然科学基金(198045)资助课题。

E-mail scy427@263.net

收稿日期 2001-12-13 ; 收到修改稿日期 2002-01-15

其中 $\cos(n, r) \geq 0$ 。将 (5) 式代入 (4) 式 整理得

$$U(P) = \frac{A}{4\pi} \iint_S \frac{\exp[ik(r+s)]}{rs} \left\{ ik[\cos(n, s) - \cos(n, r)] + \left[\frac{\cos(n, r)}{r} - \frac{\cos(n, s)}{s} \right] \right\} dS. \quad (6)$$

(6) 式中的各量如图 1 所示。在图 1 中, I 代表入射空间, II 代表像空间, Q 是孔面上任一点, P_0 是点源, P 是场点, G 和 H 是小孔边界上的两点, r 和 s 分别是点源 P_0 与场点 P 到积分面元的距离。 n 是积分面的内向法线, 角度 (n, r) 和 (n, s) 分别是 r 和 s 与法线 n 所成的角。

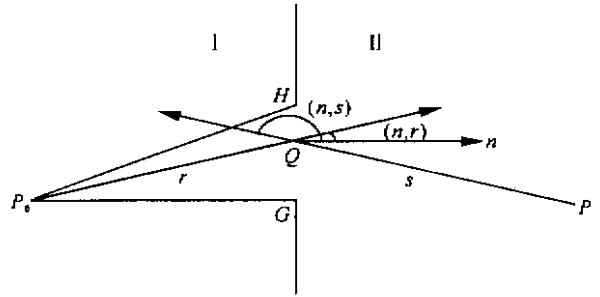


Fig.1 Distribution of the physical quantities

根据 (6) 式, 对应于积分面上任一点 Q , P 点处的微扰元 $U_1(P)$ 为

$$U(P) = \frac{A}{4\pi} \frac{\exp[ik(r+s)]}{rs} \left\{ ik[\cos(n, s) - \cos(n, r)] + \left[\frac{\cos(n, r)}{r} - \frac{\cos(n, s)}{s} \right] \right\}, \quad (7)$$

设

$$U_0 = (A/4\pi) \exp[ik(r+s)] / (rs), \quad (8)$$

$$\alpha(r, s) = \left(\frac{\cos(n, r)}{r} - \frac{\cos(n, s)}{s} \right) + ik[\cos(n, s) - \cos(n, r)], \quad (9)$$

显然 (8) 式是波不受扰动地从点源经小孔上一点到达场点情况下的场函数。自然地, (9) 式中的 $\alpha(r, s)$ 可以理解边界效应对场函数的影响。设 $\alpha(r, s)$ 的相位为 α 则

$$\tan \alpha = \frac{k[\cos(n, s) - \cos(n, r)]}{\cos(n, r)/r - \cos(n, s)/s}. \quad (10)$$

从 (10) 式可看出, 对于空间中不同点, 由边界作用引入的相位是不同的。对于发散的球面波, 恒有 $\cos(n, r) \geq 0$ 。对于入射空间的场点, 有 $\cos(n, s) \geq 0$ 。对于一定的点源及积分面上一点, r 和 $\cos(n, r)$ 一定, 令

$$r = r_0, \quad \cos(n, r) = \cos(n, r_0),$$

及

$$r_0/\cos(n, r_0) = a.$$

对于 (10) 式, 当

$$s = a\cos(n, s), \quad (11a)$$

除 $(n, s) = (n, r_0)$ 的点外, 方程存在奇点。对于立体角 $(n, s) \leq \pi/2$, 在极坐标系下 (11a) 式是一个球面方程。当

$$(n, s) = (n, r_0) \quad (11b)$$

时 (10) 式恒为零。对于任意的 s (11b) 式的轨迹是一个圆锥。令 S_1 和 S_2 分别代表上面的球面和锥面,

则 S_1 和 S_2 的交线为一个圆。入射空间被 S_1 和 S_2 分割为四部分 V_1, V_2, V_3 和 V_4 。设在 S_1 上, $s = s_0$ 。根据 (10) 式, 当 s 从 V_1 和 V_3 空间分别趋于 s_0 时, 有

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \tan \alpha = \pm \infty,$$

即 $\alpha = \pm \pi/2$, 当 s 分别从 V_2 和 V_4 空间趋于 s_0 时, 有

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \tan \alpha = \mp \infty,$$

即 $\alpha = \mp \pi/2$ 。

由以上分析知, 对于积分面上一点 Q , 存在一个相位突变球面 S_1 。在球面 S_1 的每个侧面, 在球面与锥面的交线两侧, 存在 π 相位差。在球面 S_1 内外侧面间, 也同样存在 π 相位差。图 2(a) 为在发散波情况下相奇异面的截面图。 P_0 和 P_1 为 S_1 和 S_2 交线上的两点。因为 Q 点的任意性, 对于积分边界上任两点 Q_1 和 Q_2 , 根据 (11a) 式同样可以画出它们对应的球面, 位于两球面间的区域为相应的相位跃变区。相位跃变区的截面结构如图 2(b) 所示。在区域 D 的外侧与内侧的相位差为 π , 相应的 E 的外侧与内侧的相位差为 $-\pi$ 。

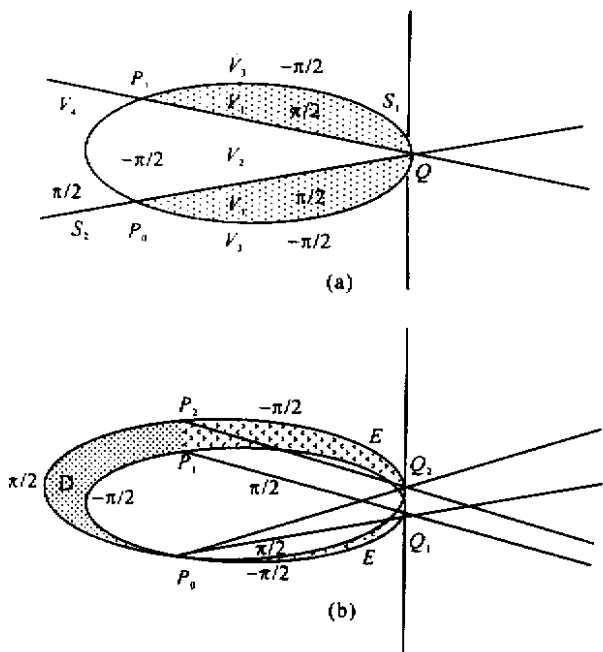


Fig.2 The section of the phase anomaly structure for a diverging wave. (a) The phase anomaly surface corresponding to a point on the opening ;(b) The phase anomaly zone corresponding to all points on the opening

3.2 会聚球面波的情况

当入射波为会聚球面波时 (5) 式变为

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{A \exp(-ikr)}{r}, \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= \frac{A \exp(-ikr)}{r} \left(-ik - \frac{1}{r} \right) \cos(n, r), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

且有 $\cos(n, r) \leq 0$ 。令

$$\cos(n, r) = \cos(\pi - \chi) = -\cos\chi,$$

则 (10) 式变为

$$\tan\alpha = \frac{k[\cos\chi - \cos(n, s)]}{\cos\chi/r + \cos(n, s)/s}. \quad (13)$$

根据 (13) 式, 当 $\cos(n, s) < 0$, 即场点在像空间时, 方程有奇点。令 $\cos(n, s) = -\cos\varphi$, 则 (13) 式变为

$$\tan\alpha = \frac{k(\cos\chi + \cos\varphi)}{\cos\chi/r - \cos\varphi/s}. \quad (14)$$

对于一定的入射波及孔面上一点, $r/\cos\chi = b$ 为常数。类似于发散波的情况, 对于立体角 $\varphi \leq \pi/2$ 满足方程 $s = b\cos\varphi$ 的点的轨迹是球面。令 S_3 表示该球面, 且在该球面上, 令 $s = s_1$ 。根据 (14) 式, 当 s 从大于 s_1 一侧趋于 s_1 时, 有 $\lim_{s \rightarrow s_1} \tan\alpha = +\infty$, 即 $\alpha = +\pi/2$; 当 s 从小于 s_1 一侧趋于 s_1 时, 有 $\lim_{s \rightarrow s_1} \tan\alpha = -\infty$, 即 $\alpha = -\pi/2$ 。因此 S_3 是一个相位突变面, 两侧间存在 π 相位差。该相位突变面的截面结构如图 3(a), 对于孔面上的所有点, 类似于发散波的情况, 则存在如图 3(b) 所示的相位突变区域, 在相位突变区域两侧存在 π 相位差。文献 [8] 根据边界波公式所暗示的光场阴影边界两侧有 π 位相差, 设计实验证明边界波是一种物理实在。这里给出的非焦点区域存在相奇异区, 在相位突变区域两侧存在 π 相位差的结论为文献 [8] 实验提供了新的理论依据。

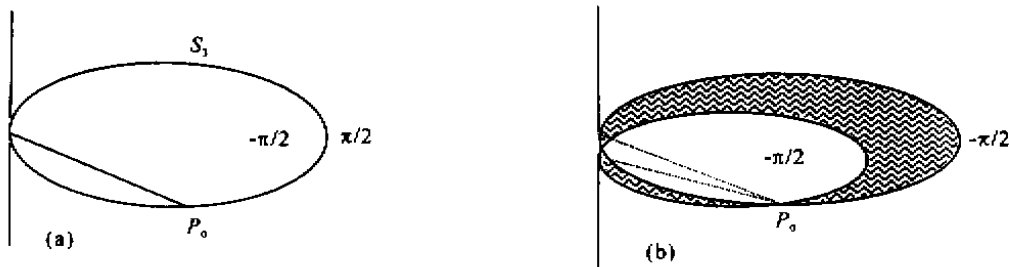


Fig.3 The section plane of the phase anomaly structure for the converging wave. (a) The surface corresponding to an arbitrary point on the opening ;(b) The zone corresponding to all the points on the opening

结论 本文从波动方程出发, 在基尔霍夫边界条件下, 根据积分的物理意义, 简明地研究了发散和会聚球面波的相奇异区域分布。分析表明, 无论是发散波还是会聚波, 在边界条件束缚下, 均产生相奇异现象。对于发散波, 其相奇异区域位于入射空间。在相奇异区域的不同部分, 相奇异规律不同, 源点位于相奇异规律发生变化的分界线上。对于会聚波, 相

奇异区域位于像空间, 相奇异规律单一, 焦点是相奇异区域内的一个特殊点。对于会聚波焦点处的相奇异现象已有较多研究, 而对焦点以外的区域及发散波的相奇异现象研究, 不但对实验专家设计实验进行验证具有指导作用, 有利于拓宽相奇异现象的研究区域, 在理论上也为相关的光学现象的解释提供新的思路。

参 考 文 献

- [1] Feng S , Winful H G . Physical origin of the Gouy phase shift. *Opt. Lett.* , 2001 , **26** (8) 485 ~ 488
- [2] Linfoot E H , Wolf E . Phase distribution near focus in an aberration-free diffraction image. *Proc. Phys. Soc.* , 1956 , **69** 823 ~ 832
- [3] Rubinowicz A . On the anomalous propagation of phase in the focus. *Phys. Rev.* , 1938 , **54** 931 ~ 936
- [4] Boyd B W . Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams. *J. Opt. Soc. Am.* , 1980 , **70** (7) : 877 ~ 880
- [5] Hariharan P , Robinson A . The Gouy phase shift as a geometrical quantum effect. *J. Mod. Opt.* , 1996 , **43** (2) 219 ~ 221
- [6] McGowan R W , Cheville R A , Grischkowsky D . Direct observation of the Gouy phase shift in THz impulse ranging. *Appl. Phys. Lett.* , 2000 , **76** (6) 670 ~ 672
- [7] Born M , Wolf E . *Principles of Optics* (7th edition). Oxford : Pergamon Press , 1999
- [8] Ganci S . An experiment on the physical reality of edge-diffracted waves. *Am. J. Phys.* , 1989 , **57** (4) 370 ~ 371

Characteristics of the Phase Anomaly Zones of Spherical Waves

Sun Cunying Zhao Daomu Wang Shaomin

(Department of Physics , Zhejiang university , Hangzhou 310028)

(Received 13 December 2001 ; revised 15 January 2002)

Abstract : The phase anomaly zones are investigated on the basis of the integral theorem of Helmholtz and Kirchhoff in terms of the Kirchhoff's boundary conditions and the physical meaning of the integral for the diverging and converging spherical waves. For the diverging spherical wave , the phase anomaly zone exists in the source space , the phase variations is different in the different parts of the zone , and the point source is a special point of the zone. On the other hand , the phase anomaly zone is in the image space , the phase variation is consistent in all the zones , and the focus is a special point of the phase anomaly zone for the converging spherical wave.

Key words : Kirchhoff's boundary conditions ; diverging spherical wave ; converging spherical wave ; phase anomaly