

文章编号 : 0253-2239(2002)10-1236-05

哈特曼-夏克传感器的泽尼克模式波前复原误差*

李新阳 姜文汉

(中国科学院光电技术研究所自适应光学研究室, 成都 610209)

摘要: 利用哈特曼-夏克传感器测量圆孔径内波像差时, 通常使用泽尼克模式复原算法。推导了一般情况下哈特曼-夏克传感器泽尼克模式波前复原误差的计算公式。用哈特曼-夏克传感器测量一个像差板的随机静态像差, 通过与 ZYGO 干涉仪的测量结果比较, 得到不同泽尼克模式复原阶数下的波前复原误差的实验结果, 并与理论计算结果进行了对比。

关键词: 哈特曼-夏克传感器; 模式波前复原; 泽尼克多项式

中图分类号: TB95 文献标识码: A

1 引 言

哈特曼-夏克型波前传感器是目前常用的测量静态或动态波前像差的工具^[1-4]。它的基本原理是把波前划分为若干个子孔径, 在各个子孔径上分别测量两个正交方向上的波前偏导值, 即波前斜率, 然后根据子孔径上的波前斜率进行波前复原计算, 得到整孔径上的波前像差。常用的波前复原算法有模式法和区域法等^[1-4]。

泽尼克(Zernike)多项式是圆孔径上模式波前复原时最常用的数学工具之一^[5,6]。但是哈特曼-夏克传感器的泽尼克模式复原误差问题始终没有得到透彻的研究。国内外关于哈特曼-夏克传感器测量误差的文献中, 侧重于子孔径斜率测量精度的分析, 关于模式波前复原误差的分析较少, 并且缺乏通用性^[7-9]。所以长久以来, 人们在对哈特曼-夏克传感器进行泽尼克模式波前复原时, 常常凭经验选择模式复原阶数。本文试图建立一套一般情况下哈特曼-夏克传感器泽尼克模式波前复原误差的计算公式, 并对计算公式的准确性进行实验验证。

2 利用哈特曼-夏克传感器测量波前像差

众所周知, 泽尼克多项式在圆域内是正交完备的。任意波前像差都可以描述为一系列正交泽尼克

多项式的线性组合^[5,6]。考虑最一般的情况, 一个动态波前像差可以表示为:

$$\varphi(r, t) = \sum_{k=1}^p a_k(t) z_k(r), \quad (1)$$

其中 $z_k(r)$ 是多项式的第 k 项, 或称为第 k 阶泽尼克模式, $a_k(t)$ 是模式系数, t 是时间序列, p 是波前像差中包含的泽尼克模式阶数。通常为了准确描述某种像差需要的模式阶数很多, 达到几十或上百项。泽尼克模式的特性由径向频率数 n 和角向频率数 m 决定。本文中泽尼克模式的定义与 Noll 相同, 只是本文以波前倾斜 ($m = n = 1$) 为第一项开始排列, 而 Noll 文献中以波前平移 ($m = n = 0$) 为第一项开始排列^[5,6]。因为哈特曼-夏克传感器无法测量波前平移, 而且多数光学系统 (如自适应光学系统) 中也不考虑波前平移影响, 所以本文不讨论波前平移。

哈特曼-夏克传感器的基本工作原理如图 1 所示。一组孔径大小和焦距相同的微透镜阵列把主孔径划分为若干个子孔径分别成像, 用 CCD 相机等面阵探测器件测量出每个子孔径上像点与标定位置的

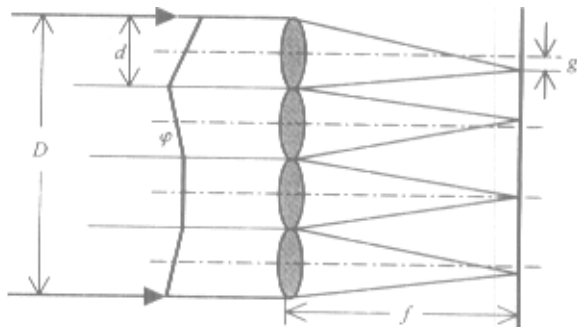


Fig. 1 The principle diagram of Hartmann-Shack wavefront sensor

* 国家 863 高技术计划激光领域资助课题。

E-mail: xyli@ioe.ac.cn

收稿日期 2001-06-20; 收到修改稿日期 2001-11-12

偏移量, 换算出波前斜率。子孔径上的波前斜率与整个圆孔径上波前像差间的关系为:

$$g_{ai} = \int dr W_i(r) [\nabla \varphi(r, t) \cdot a], \quad (2)$$

其中 $W_i(r)$ 是第 i 个子孔径的归一化权重函数, ∇ 是斜率算子, a 是表示斜率测量方向的单位向量, 通常定义在 x 、 y 两个正交方向上。子孔径波前斜率与泽尼克模式系数间的关系为:

$$g_{ai} = \sum_{k=1}^p a_k \int dr W_i(r) \partial z_k(r) \partial a, \quad (3)$$

上式可以表示为矩阵形式

$$g = ({}^p Z \chi {}^p a), \quad (4)$$

其中 $g = [g_{x1} \ g_{y1} \ r \dots g_{xm} \ g_{ym}]^T$ 是哈特曼-夏克传感器的子孔径波前斜率向量, m 是探测器的子孔径数, ${}^j a = [a_i \ a_{i+1} \ r \dots a_j]^T$ 是第 i 到 j 阶泽尼克模式系数向量, ${}^j Z$ 是子孔径波前斜率与第 i 到 j 阶泽尼克模式系数间的关系矩阵, 其中矩阵元素

$$Z_{ika} = \int dr W_i(r) \partial z_k(r) \partial a.$$

一旦哈特曼-夏克传感器的子孔径布局形式确定, Z 矩阵的各个元素就可以事先精确计算出来。

通常情况下待测像差中包含的模式阶数 p 未知, 波前复原时测量者凭经验选择的模式阶数 q 不一定等于 p 。根据最小方差准则, 从哈特曼-夏克传感器子孔径波前斜率复原计算 q 阶泽尼克模式系数的过程为:

$${}^q a' = ({}^q Z)^+ g, \quad (5)$$

其中 ${}^q a' = [a'_1 \ a'_2 \ r \dots a'_q]^T$ 为复原出的模式系数向量, q 是复原模式阶数, 矩阵 $({}^q Z)^+$ 为矩阵 ${}^q Z$ 的广义逆。根据复原出的泽尼克模式系数得到波前像差的测量结果为:

$$\varphi(r, t) = \sum_{k=1}^q a'_k(t) z_k(r). \quad (6)$$

3 哈特曼-夏克传感器的模式波前复原误差

哈特曼-夏克传感器中, 经模式复原出的波前与待测原始波前间的误差为:

$$\sigma^2(q) = \int dr \left[\sum_{i=1}^p a_i(t) z_i(r) - \sum_{j=1}^q a'_j(t) z_j(r) \right]^2, \quad (7)$$

其中 \cdot 表示信号的时间系综平均。泽尼克模式具有在圆孔径上互相正交的性质 $\int dr z_i(r) z_j(r) =$

δ_{ij} , 所以上式展开为

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2(q) &= \sum_{i=1}^p a_i(t)^2 + \sum_{i=1}^q a'_i(t)^2 - \\ &2 \sum_{i=1}^s a'_i(t) a_i(t), \\ s &= \min(p, q), \end{aligned} \right\} (8)$$

如果令 ${}^j C_{aa} = ({}^j a \chi {}^j a)^T$ 为待测波前像差中第 i 到 j 阶泽尼克模式系数的统计相关矩阵, ${}^q C_{aa'} = ({}^q a' \chi {}^q a')^T$ 为复原出的第 1 到 q 阶模式系数的统计相关矩阵, ${}^s C_{aa'} = {}^s C_{aa'} = ({}^s a' \chi {}^s a)^T$ 为第 1 到 s 阶的复原出模式与原始像差中相应模式的统计相关矩阵。则上式可以表示为:

$$\sigma^2(q) = \text{tr}({}^p C_{aa}) + \text{tr}({}^q C_{aa'}) - 2\text{tr}({}^s C_{aa'}), \quad (9)$$

其中 $\text{tr}(\cdot)$ 表示求矩阵迹运算。不失一般性, 假设 $p > q$ 或 $s = q$ 则:

$$\begin{aligned} \sigma^2(q) &= \text{tr}({}^p C_{aa}) + \\ &\text{tr}({}^q C_{aa} + {}^q C_{aa'} - 2{}^q C_{aa'}) = \\ &\sigma_{\text{cutting}}^2(q) + \sigma_{\text{coupling}}^2(q). \end{aligned} \quad (10)$$

上式中第一项为模式复原阶数不够造成的模式截断误差, 第二项为复原出模式与原始像差中模式间的差异造成的模式混淆误差, 它们都与模式复原阶数 q 有关。在 $q \geq p$ 的情况下, 不存在模式截断误差, 但仍存在模式混淆误差。

通常在子孔径波前斜率测量过程中还会引入测量噪声 n 。一般 n 为高斯白噪声形式, 叠加在真实斜率测量值上, 与真实斜率测量值互不相关, 且满足

$$gn^T = ng^T, \quad nn^T = \sigma_n^2 I, \quad (11)$$

其中 I 为单位矩阵。上式假设各个子孔径上的噪声方差同为 σ_n^2 。易于证明噪声引起的波前模式复原误差也与模式复原阶数 q 有关:

$$\sigma_{\text{noise}}^2(q) = \text{tr}[({}^q Z)^+ ({}^q Z)^T] \sigma_n^2. \quad (12)$$

一般情况下, 传感器的模式波前复原误差是模式截断误差、模式混淆误差、噪声引起的误差总和:

$$\sigma^2(q) = \sigma_{\text{cutting}}^2(q) + \sigma_{\text{coupling}}^2(q) + \sigma_{\text{noise}}^2(q). \quad (13)$$

从上面的分析中可以看到, 哈特曼-夏克传感器的模式波前复原误差与待测波前像差中的模式分布特性密切相关, 即与矩阵 C_{aa} 有关。其中最复杂的情况是包含无数阶模式的动态像差, 如大气湍流畸变波前, 而最简单的情况是只包含有限阶模式的静态像差, 如像差板。这两种情况都可以用(13)式和上面的方法进行分析。限于篇幅, 本文仅分析哈特曼-夏克传感器对静态像差的模式复原误差。

4 哈特曼-夏克传感器对静态像差的测量误差

在利用哈特曼-夏克传感器对光学器件面形加工精度、光学系统的装调像差等进行测量时,可以把待测量的对象看作是只包含有限阶泽尼克模式的静态波前像差。对一个有限 p 阶的静态像差 ${}^p a = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$,用 q 阶模式进行复原,复原模式系数间的关系为:

$${}^q a' = ({}^q Z)^+ ({}^p Z \chi_1^p a), \quad (14)$$

这时:

$${}^p C_{aa} = ({}^p a \chi_1^p a)^T, \quad (15a)$$

$${}^q C_{a'a'} = ({}^q a' \chi_1^q a')^T = ({}^q Z)^+ ({}^p Z \chi_1^p C_{aa} \chi_1^p Z) ({}^q Z)^{+T}, \quad (15b)$$

$${}^s C_{a'a} = ({}^s a' \chi_1^s a)^T = ({}^s Z)^+ ({}^p Z \chi_1^p a' \chi_1^s a)^T, \quad (15c)$$

$$s = \min(p, q),$$

根据(9)式和(15)式可以计算这种情况下的波前复原误差。可见这时的波前复原误差与 $({}^q Z)^+ ({}^p Z)$ 的值密切相关。根据矩阵理论,只有在 $q = p \leq 2m$ 的特殊情况下,两矩阵满足 $({}^q Z)^+ ({}^p Z) = I$,这时复原模式将与待测模式完全一致,模式截断误差和模式混淆误差均不存在。当 $q \neq p$ 时都会存在模式混淆误差。当 $q < p$,某些高阶模式被复原为低阶模式,当 $q > p$,某些低阶模式又被复原为高阶模式。

5 实验和结果分析

本文使用的哈特曼-夏克传感器子孔径划分形式如图2所示。传感器中 CCD 的靶面为 128×128 像素,每子孔径 16×16 像素,12 位数模转换图像的读出速率为 419 帧/秒,共连续采样 1024 帧进行分析。传感器的零点事先用标准平行光源进行标定。

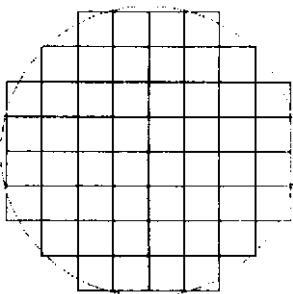


Fig. 2 Subaperture configuration of a Hartmann-Shack wavefront sensor

按照检验哈特曼-夏克传感器测量精度的常用做法,先用 ZYGO 干涉仪对像差板的像差分布情况进行测量,然后用传感器对同一像差板进行测量,并对比两种测量结果。一般认为 ZYGO 干涉仪的测量结果比较准确,可以用作对比的基准。实验中 ZYGO 干涉仪和传感器的测量光源都是波长 $0.6328 \mu\text{m}$ 的氦氖激光,准直成一束标准平行光,光束的强度也调整到比较理想的程度。

本文所用的 ZYGO-III 型干涉仪的测量结果以一种特殊泽尼克多项式的系数表示。这种特殊泽尼克多项式把每阶波前模式的极值归一化为 1,而 Noll 定义的泽尼克多项式把每阶波前模式的方差归一化为 1。另外,两种泽尼克多项式的模式序号排列方式不同。例如 ZYGO 干涉仪的第 15 阶泽尼克多项式对应 Noll 定义的第 21 阶泽尼克多项式(高阶球差)。根据各自的定义,这两种泽尼克多项式的系数间能够一一对应地、无误差地互相转换。

实验所用的像差板是经光学磨制后的普通窗玻璃,包含有静态的随机像差。普通窗玻璃的随机像差大小和像差分布都不易控制,加工后一定要筛选出那些像差大小合适的才能作为像差板使用,所以成品率较低。为了配合实验,特地挑选了一块像差类型比较丰富的像差板作为样品。ZYGO 干涉仪对像差板的波前测量结果如图 3 所示,峰谷值大约 5 个波长,同时给出了用前 15 阶特殊泽尼克多项式系数表示的像差分布情况,以离焦为主要成分。为了方便对比,首先把 ZYGO 干涉仪测量结果转化为 Noll 所定义的泽尼克多项式系数,共 21 阶,如表 1 中所示。其中两个波前整体倾斜项($n=1, m=1; j=1, 2$)无法对比,故没有计算在内。

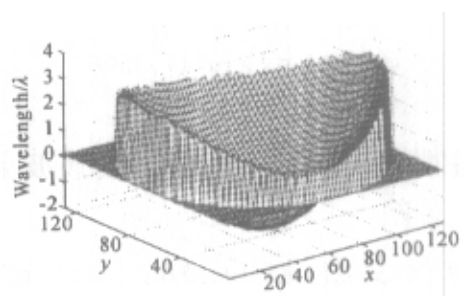


Fig. 3 Measured wavefront of an aberration plate with ZYGO interferometer

接着用哈特曼-夏克传感器对同一块像差板进行测量。分别计算了不同模式复原阶数下的泽尼克复原系数,用 128×128 的网格复原出了波前像差并与 ZYGO 干涉仪的测量结果对比,计算出均方根波

前复原误差。总复原阶数 q 分别是 7、11、35、65 等几种情况下的前 25 阶的泽尼克系数的复原结果如表 1 所示,可见模式混淆误差确实存在。波前复原误差与泽尼克模式复原阶数的关系如图 4 所示。可见在模式复原阶数达到 7 时均方根波前复原误差已经达到 $1/10$ 波长,并且理论结果与实际计算结果符合得非常好。但实验结果显示当复原阶数等于 11 时,均方根波前复原误差达到最小值约 $1/30$ 波长;而理论计算结果表明当复原阶数等于 15 时,均方根波前复原误差的最小值约 $1/250$ 波长。理论结果与实际计算结果都显示,随着复原阶数的继续增加,波前复原误差持续变大。但当复原阶数大于 10 后,均

方根波前复原误差的理论计算结果优于 $1/100$ 波长,而实验结果在 $1/30$ 到 $1/20$ 波长左右。

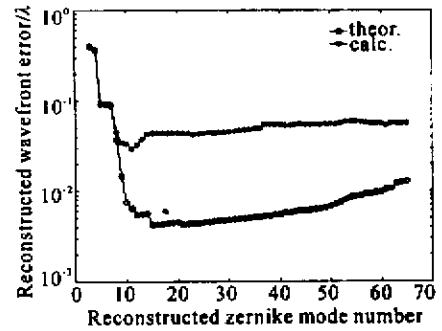


Fig.4 The relationship between reconstructed Zernike mode number and the reconstructed wavefront error

Table 1. Zernike coefficients measured results

| Zernike order | | | ZYGO measured | Hartmann-Shack measured result | | | | |
|---------------|-----|-----|---------------|--------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| j | n | m | | $q = 7$ | $q = 11$ | $q = 21$ | $q = 35$ | $q = 65$ |
| 3 | 2 | 0 | 1.4172 | 1.4172 | 1.4193 | 1.4184 | 1.4187 | 1.4209 |
| 4 | 2 | 2 | -0.1770 | -0.1500 | -0.1500 | -0.1466 | -0.1459 | -0.1477 |
| 5 | 2 | 2 | 0.3510 | 0.3937 | 0.3899 | 0.3899 | 0.3876 | 0.3826 |
| 6 | 3 | 1 | -0.0034 | 0.0050 | 0.0033 | 0.0020 | 0.0034 | -0.0015 |
| 7 | 3 | 1 | 0.0215 | 0.0092 | 0.0096 | 0.0188 | 0.0215 | 0.0076 |
| 8 | 3 | 3 | -0.0807 | | -0.0753 | -0.0775 | -0.0764 | -0.0756 |
| 9 | 3 | 3 | -0.0342 | | -0.0161 | -0.0158 | -0.0131 | -0.0193 |
| 10 | 4 | 0 | -0.0083 | | -0.0021 | -0.0038 | -0.0036 | -0.0028 |
| 11 | 4 | 2 | -0.0027 | | 0.0035 | 0.0035 | -0.0026 | -0.0037 |
| 12 | 4 | 2 | -0.0026 | | | -0.0036 | -0.0016 | -0.0035 |
| 13 | 4 | 4 | 0 | | | 0.0199 | 0.0210 | 0.0220 |
| 14 | 4 | 4 | 0 | | | -0.0210 | -0.0218 | -0.0106 |
| 15 | 5 | 1 | 0.0029 | | | -0.0110 | -0.0112 | -0.0107 |
| 16 | 5 | 1 | 0.0004 | | | 0.0018 | 0.0037 | 0.0039 |
| 17 | 5 | 3 | 0 | | | 0.0003 | 0.0029 | 0.0054 |
| 18 | 5 | 3 | 0 | | | 0.0027 | 0.0060 | 0.0040 |
| 19 | 5 | 5 | 0 | | | -0.0009 | 0.0001 | -0.0000 |
| 20 | 5 | 5 | 0 | | | -0.0000 | 0.0042 | 0.0021 |
| 21 | 6 | 0 | -0.0015 | | | -0.0018 | 0.0017 | -0.0001 |
| 22 | 6 | 2 | 0 | | | | -0.0045 | -0.0020 |
| 23 | 6 | 2 | 0 | | | | 0.0091 | 0.0164 |
| 24 | 6 | 4 | 0 | | | | 0.0007 | 0.0110 |
| 25 | 6 | 4 | 0 | | | | -0.0024 | -0.0024 |

分析造成这种差异的主要原因是 ZYGO 干涉仪的测量误差、仪器的对准误差、哈特曼-夏克传感器的随机测量误差等。首先 ZYGO 干涉仪的测量结果并不是绝对准确的。根据说明书,本试验所用 ZYGO-III 型干涉仪存在约 $1/30$ 波长的峰谷值误差。其次虽然经过仔细调整,像差板在两次装夹过程中仍会有一定的对准误差。另外测量过程中工作环境的气流变化、温度变化、相机的电子噪声等随机因素对传感器的测量精度也有轻微的影响。以上这些因

素使实际情况下哈特曼-夏克传感器不可能达到理论预计的优于 $1/100$ 波长的测量精度。对本文中的哈特曼传感器来说, $1/30$ 波长的测量精度已经非常令人满意了。因此可以说实验中测量结果与理论计算结果间的差异水平是正常的,也说明本文关于哈特曼-夏克传感器模式复原误差的分析方法是正确的。

结论 本文研究了哈特曼-夏克传感器采用泽尼克模式复原算法时的波前复原误差。分析了模式截断

误差、模式混淆误差和噪声引起的复原误差的来源和影响因素。给出了一般情况下计算哈特曼-夏克传感器泽尼克模式复原误差的公式。用哈特曼-夏克传感器实际测量了一个像差板的静态像差,用不同的泽尼克模式阶数进行波前复原,并与 ZYGO 干涉仪的波前测量结果比较。实验结果验证了本文理论分析方法是正确的。该分析方法不仅适用静态像差情形,还可以推广到动态像差的情形。限于篇幅,关于哈特曼-夏克传感器对大气湍流动态畸变波前测量误差的问题,将在另外的文章中进行分析。

目前在使用哈特曼-夏克传感器的过程中,模式复原阶数的选取都凭经验,存在相当大的随意性。通常认为哈特曼-夏克传感器的波前复原精度只与子孔径数目和分割方式有关。本文的分析表明,哈特曼-夏克传感器的波前复原精度还与选择的模式复原阶数和待测像差特性密切相关。原则上子孔径数目越多,采用的泽尼克模式复原阶数越多,波前复原精度会越高,但在相同子孔径条件下,如果模式复原阶数选得过多,模式耦合误差和测量噪声等的影响会增加,最终反而会降低传感器的波前复原精度。例如本文中 52 子孔径的哈特曼-夏克传感器,对静态像差板的最优复原阶数是 15。模式阶数过少或过多都会增加波前复原误差。所以模式复原阶数应该根据实际情况合理选择,才能保证传感器的波前复原精度。

本文中的实验数据由中科院光电所的同事饶长

辉博士提供,同事沈锋博士和饶学军副研究员对本文提供了帮助,在此一并表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Southwell W H. Wavefront estimation from wavefront slope measurements. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1980, **70**(8):998~1006
- [2] Lane R G, Tallon M. Wavefront reconstruction using a Shack-Hartmann sensor. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(32):6902~6908
- [3] Jiang Wenhan, Xian Hao, Yang Zheping *et al.*. Application of Hartmann wavefront sensors. *J. Quant. Electron.*(量子电子学报), 1998, **15**(2):228~235 (in Chinese)
- [4] Hermann J. Cross coupling and aliasing in model wavefront estimation. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1981, **71**(8):989~992
- [5] Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1977, **67**(8):1065~1072
- [6] Wang J W, Silva D E. Wavefront interpretation with Zernike polynomials. *Appl. Opt.*, 1980, **19**(9):1510~1518
- [7] Jiang Wenhan, Xian Hao, Shen Feng. Detecting error of Shack-Hartmann wavefront sensor. *Proc. SPIE*, 1997, **3126**:534~544
- [8] Takato N, Iye M, Yamaguchi I. Wavefront reconstruction errors of Shack-Hartmann sensors. *Publ. Astron. Soc. Pacific.*, 1994, **106**:182~188
- [9] Li Xinyang, Jiang Wenhan, Wang Chunhong *et al.*. Modal reconstruction error of the Hartmann sensor on measuring the atmosphere disturbed wavefront. *High Power Laser and Particle Beams*(强激光与粒子束), 2000, **12**(2):145~148 (in Chinese)

Zernike Modal Wavefront Reconstruction Error of Hartmann-Shack Wavefront Sensor

Li Xinyang Jiang Wenhan

(Lab on Adaptive Optics, Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)

(Received 20 June 2001; revised 12 November 2001)

Abstract: Zernike modal wavefront reconstruction algorithm was used commonly for Hartmann-Shack sensor in circle apertures. Formulas to calculate the modal wavefront reconstruction error of Hartmann-Shack sensor in general condition were deduced. An aberration plate containing random static wavefront aberrations was measured with a Hartmann-Shack sensor and a ZYGO interferometer respectively, then the modal wavefront reconstruction error of Hartmann-Shack sensor while using different Zernike polynomials was obtained. The experimental results were analyzed and compared with theoretical calculations.

Key words: Hartmann-Shack wavefront sensor; modal wavefront reconstruction; Zernike polynomials