文章编号：0253-2239(2002)10-1159-06

双轴晶体主平面上倍频的相位匹配参量

杨胜利
（厦门大学物理学系，厦门 361005）

摘要： 根据折射率椭球方程及双光轴晶体中光波的传播与偏振特性，分析双轴晶体在主平面内激光倍频相位匹配的特性与方法，导出光波在主平面内传播时倍频的相位失配关系，给出双轴晶体中容许相位匹配倍频的相位匹配角及混频的有效非线性系数 d_{eff} 的表达式。利用可相位匹配的类型、相位匹配角公式和有效非线性系数 d_{eff} 表达式的表，容易对任意一具体晶体在一给定波长求出实际能实现相位匹配的类型或偏振组合，算出相位匹配角，比较不同的相位匹配类型或偏振组合的有效非线性系数，选择最佳的相位匹配类型与方向。从相位失配关系可以计算晶体主平面内倍频的接收角、接收光谱宽度等特性参量。

关键词： 双轴晶体；倍频相位匹配；相位失配；有效非线性系数
中图分类号：O437 文献标识码：A

1 引 言

利用非线性光学(NLO)晶体进行倍频(或二次谐波产生-SHG)、参变放大与参变振荡等三波混频效应，至今依然是扩展激光频率范围的常用方法，利用三波光参变产生(OPG)不同波段的高效高质量相干光仍然是现在研究的热点之一[1]。具有许多优良特性的双轴晶体 KTP、LBO 等，得到越来越广泛的应用。对双轴晶体混频相位匹配(PM)方法的分析比单轴晶体复杂得多。已有许多利用双轴晶体进行三波混频相位匹配的研究报道[2～5]。文献[2～4]讨论了双轴晶体相位匹配，给出相位匹配的极射投影图，文献[3]给出三类双轴晶体用球面方位角表示的有效非线性系数，文献[5]给出用偏振方向的方向余弦表示的有效非线性系数。球面方位角及方向余弦的实际应用不太方便。文献[5]从菲涅耳方程求出双轴晶体相位匹配角与主折射率的表达式，关系很复杂，没有归纳出特征量并阐明其物理意义，不便引用。在三波混频研究中，人们往往选用主平面上的相位匹配，其原因一方面是对主平面相位匹配的分析较简单，另一方面是光学参变产生中利用主平面相位匹配时频率调谐较为方便，同时三波混频的最佳相位匹配方向都位于主平面上[6]。但是，还没有见到有关对主平面相位匹配作全面系统分析的报道。

本文根据晶体折射率椭球方程与晶体中光波的偏振特性，分别讨论了在双轴晶体主轴坐标平面内二次谐波产生的所有相位匹配方法，导出了双轴晶体主平面内二次谐波产生的所有可能相位匹配偏振组合下相位失配与传播方向及主折射率的关系，列表归纳出在主平面内所有可能的相位匹配类型，光波的偏振组合、相位匹配角公式及五类常用双轴晶体的有效非线性系数的表达式。利用相位失配关系导出晶体接收角、接收光谱带宽等特性参数。对任一晶体都可以由一给定波长和二次谐波(SH)的主折射率从表中找到所有实际能够实现相位匹配的类型或偏振组合，并算出相位匹配角，并查出相应的有效非线性系数表达式，比较和选取最佳的相位匹配组合或相位匹配方向。至于对于双轴晶体中任意方向上相位匹配的分析讨论，已在文献[7]中给出。

2 晶体中光波的偏振特性与二次谐波产生的相位匹配

至今报道的许多关于双轴晶体相位匹配的研究，都是根据菲涅耳方程来分析相位匹配方法和类型的。菲涅耳方程很复杂，菲涅耳面是双层曲面，因此问题分析变得很复杂，得到的结果物理图像不清晰。实际上，由于折射率椭球面与光波的偏振方向有直接的几何关系，问题的物理图像简明清晰，而且从折射率椭球方向推导数学关系也更简便。这里根据折射率椭球方程及双轴晶体中光波的传播与偏振特性进行分析。主轴坐标系中双轴晶体折射率椭球

E-mail：yshengli@163.com
收稿日期：2001-07-02；收到修改稿日期：2001-11-05

方程为

$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1, \tag{1}$$

$$(n_x \leqslant n_o \equiv n_y \leqslant n_z)$$

显然,过折射率椭球中心、垂直于光轴的两个平面与折射率椭球面的交线都是半径为 $n_o \equiv n_y$ 的圆,称为折射率圆,其交线为 y 轴。n_o 为 o 光折射率。过原点的其他任一平面与折射率椭球的交线为一椭圆。由晶体光学可知,沿不同于光轴的方向 k 传播的光波将分解为两个相速度不同,偏振互相垂直的光波,且两个偏振方向分别与 k 正交的折射率椭圆的长轴和短轴平行。所以,折射率椭圆两个半轴的方向决定沿该椭圆法线 k 传播的两个不同相速度光波的两正交偏振方向,两个半轴长度等于相应偏振光波的折射率。因此只要求出折射率椭圆长轴和短轴的方向和大小,就可以确定三波混频相位匹配的光波的偏振方向、相位匹配角度与主折射率的关系。

下面讨论双轴晶体二次谐波产生共线相位匹配及其特性。从共线相位匹配条件可得到相应的折射率关系为:

Ⅰ 类相位匹配

$$n_p(\omega)+n_p(\omega)=n_q(2\omega), \tag{2a}$$

p、q 为互相垂直的两偏振分量;

Ⅱ 类相位匹配:

$$n_p(\omega)+n_q(\omega)=2n_q(2\omega). \tag{2b}$$

折射率椭球与 $x=0$,$y=0$,$z=0$ 三个主平面的交线为折射率椭圆,方程分别为

$$\frac{y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1, \tag{3a}$$

$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1, \tag{3b}$$

$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{y^2}{n_o^2}=1, \tag{3c}$$

在各主平面上二次谐波产生,可能的相位匹配有Ⅰ类和Ⅱ类。由(3)式得(4)式~(6)式[9]

$$x=0\ \text{平面:}\quad \frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_z^2}=\frac{1}{n^2(\theta,\pi/2)}, \tag{4}$$

$$y=0\ \text{平面:}\quad \frac{\cos^2\theta}{n_x^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_z^2}=\frac{1}{n^2(\theta,0)}, \tag{5}$$

$$z=0\ \text{平面:}\quad \frac{\sin^2\varphi}{n_x^2}+\frac{\cos^2\varphi}{n_o^2}=\frac{1}{n^2(\pi/2,\varphi)}. \tag{6}$$

为叙述和讨论方便,约定折射率数字下标:1、2 分别代表 ω 和 2ω,e 表示折射率随偏振方向(θ,φ)角度变化的异常光。在双轴晶体中,平行于 y 轴方向偏振的光波才是 o 光,所以 $n_y \equiv n_o$ 沿其他任意方向偏振且折射率不等于 n_o 的光波都是非寻常光,虽然沿 x、z 方向偏振的光波也属于非寻常光,但为了把随偏振方向(θ,φ)角度变化的非寻常光与沿固定方向 x、z 方向偏振的 e 光区分,下面用 e 专指随偏振方向(θ,φ)角度变化的非寻常光,而 x、y、z 分别表示沿 x、y、z 方向偏振的光波。

对于 $x=0$ 主平面(即 yz 平面)Ⅰ 类相位匹配,与二次谐波产生有关的光波偏振有两种可能组合:一为两个平行于 x 轴的基频光电矢量 $\boldsymbol{D}(\omega)$,而倍频光为随 θ 角变化的 e 光,$\boldsymbol{D}(2\omega)$ 垂直于 x 轴,且位于 yz 平面内,即:$xx\rightarrow$e。二为 ee$\rightarrow x$ 组合,两基频光是 $\boldsymbol{D}(\omega)$ 随 θ 变化且位于 yz 平面的 e 光,倍频光为沿 x 方向偏振的异常光。

对 $xx\rightarrow$e,倍频光折射率与 θ 有关。相位匹配的折射率关系为

$$n_2(\theta,\pi/2)=n_{1x}, \tag{7}$$

式中 $n_{1x}\equiv n_x(\omega)$,$n_2(\theta,\pi/2)\equiv n(2\omega,\theta,\pi/2)$。上式不可能成立,故不可能实现相位匹配。

对 ee$\rightarrow x$,两基频光折射率都与 θ 有关,倍频光沿 x 轴偏振,其折射率等于 x 轴的主折射率:

$$n_1(\theta,\pi/2)=n_{2x}, \tag{8}$$

式中 $n_1(\theta,\pi/2)\equiv n(\omega,\theta,\pi/2)$,$n_{2x}\equiv n_x(2\omega)$。相位匹配角为

$$\theta_m=\arcsin\left[\frac{n_{1o}^{-2}-n_{2x}^{-2}}{n_{1o}^{-2}-n_{1z}^{-2}}\right]^{1/2}, \tag{9}$$

$$(n_{1z}>n_{2x}\geqslant n_{1o})$$

类似地,$x=0$ 平面 Ⅱ 类 ex-e 偏振组合不可能实现相位匹配,而 ex-x 可能实现相位匹配;$y=0$ 平面上有 4 种可能相位匹配的偏振组合;$z=0$ 平面上所有 4 种偏振组合中,有 2 种不可能实现相位匹配,另两种组合才可能实现相位匹配;这些可能实现相位匹配的偏振组合及其相位匹配角列于表 1。

3 相位失配

从上面分析及表 1 可见,双轴晶体主平面上相位匹配的光波偏振可能组合比单轴晶体多。在同一种双轴晶体中用同一种波长激光倍频,其相位匹配的偏振组合可能有几种。但是不同偏振组合的二次谐波产生,对于基频光的接收角、接收光谱线宽不一样,这些特性与相位失配有关。从上面的折射率关系不难得到相位失配 Δk 与主折射率及相位匹配角 θ 或 φ 的关系:

Table 1. PM angles and general effective NL coefficients $d_{\rm eff}$ for biaxial crystals

k-d	pd	PM angles θ or φ	effective NL coefficient $d_{\rm eff}$
$\varphi=\pi/2$, in yz-plane	Type Ⅰ ee-x	$\theta=\arcsin\left[\frac{n_{1o}^{-2}-n_{2x}^{-2}}{n_{1o}^{-2}-n_{1z}^{-2}}\right]^{1/2}$	$d_{12}\cos^2\theta+d_{13}\sin^2\theta+d_{14}\sin2\theta$
	TypeⅡ xe-x	$\theta=\arcsin\left[\frac{n_{1o}^{-2}-(2n_{2x}-n_{1z})^{-2}}{n_{1o}^{-2}-n_{1z}^{-2}}\right]^{1/2}$	$d_{15}\sin\theta+d_{16}\cos\theta$
$\varphi=0$, in xz-plane	Type Ⅰ oo-e	$q=\arcsin\left[\frac{n_{2x}^{-2}-n_{1o}^{-2}}{n_{2x}^{-2}-n_{2z}^{-2}}\right]^{1/2}$	$d_{12}\cos\theta+d_{32}\sin\theta$
	Type Ⅰ ee-o	$\theta=\arcsin\left[\frac{n_{1x}^{-2}-n_{2o}^{-2}}{n_{1x}^{-2}-n_{1z}^{-2}}\right]^{1/2}$	$d_{21}\cos^2\theta+d_{23}\sin^2\theta+d_{25}\sin2\theta$
	Type Ⅱ oe-o	$\theta=\arcsin\left[\frac{n_{1x}^{-2}-(2n_{2o}-n_{1o})^{-2}}{n_{1x}^{-2}-n_{1z}^{-2}}\right]^{1/2}$	$d_{24}\sin\theta+d_{26}\cos\theta$
	Type Ⅱ oe-e	$(n_{1x}^{-2}-\delta_{1z}\sin^2\theta)^{-1/2}+n_{1o}=2(n_{2x}^{-2}-\delta_{2z}\sin^2\theta)^{-1/2}$	$0.5(d_{14}+d_{36})\sin2\theta+d_{16}\cos^2\theta+d_{34}\sin^2\theta$
$\theta=\pi/2$, in xy-plane	Type Ⅰ zz-e	$\varphi=\arcsin\left[\frac{n_{1z}^{-2}-n_{2o}^{-2}}{n_{2x}^{-2}-n_{2o}^{-2}}\right]^{1/2}$	$d_{13}\sin\varphi+d_{23}\cos\varphi$
	Type Ⅱ ze-e	$(n_{1o}^{-2}+\delta_{1o}\sin^2\varphi)^{-1/2}+n_{1z}=2(n_{2o}^{-2}+\delta_{2o}\sin^2\varphi)^{-1/2}$	$0.5(d_{14}+d_{25})\sin2\varphi+d_{15}\sin^2\varphi+d_{24}\cos^2\varphi$

* $\delta_{ej}=(n_{lx}^{-2}-n_{lj}^{-2}$; $j=$ o, z, $l=1,2$. k-d: k-direction; pd: polarization direction.

$$x=0,\quad \mathrm{ee}\to x:\ \Delta kc=\omega n_{2x}^3(n_{1o}^{-2}-n_{1z}^{-2})\sin2\theta(\Delta\theta),\tag{10}$$

$$x\mathrm{e}\to x:\ \Delta kc=\omega(2n_{2x}-n_{1x})^3(n_{1x}^{-2}-n_{1o}^{-2})\sin2\theta(\Delta\theta),\tag{11}$$

$$y=0,\quad \mathrm{oo}\to \mathrm{e}:\ \Delta kc=2\omega n_{1o}^2(n_{2x}^{-2}-n_{2z}^{-2})\sin2\theta(\Delta\theta),\tag{12}$$

$$\mathrm{ee}\to \mathrm{o}:\ \Delta kc=2\omega n_{2o}^3(n_{1x}^{-2}-n_{1z}^{-2})\sin2\theta(\Delta\theta),\tag{13}$$

$$\mathrm{eo}\to \mathrm{o}:\ \Delta kc=2\omega(2n_{2o}-n_{2o})^3(n_{1x}^{-2}-n_{1z}^{-2})\sin2\theta(\Delta\theta),\tag{14}$$

$$\mathrm{eo}\to \mathrm{e}:\ \Delta kc=2\omega\{2[n_{2x}^{-2}-(n_{2x}^{-2}-n_{2z}^{-2})\sin^2\theta]^{-1/2}(n_{2x}^{-2}-n_{2z}^{-2})-[n_{1x}^{-2}-(n_{1x}^{-2}-n_{1z}^{-2})\sin^2\theta]^{-1/2}(n_{1x}^{-2}-n_{1z}^{-2})\}(\sin2\theta)\Delta\theta,\tag{15}$$

$$z=0,\quad zz\to \mathrm{e}:\ \Delta kc=2\omega n_{1z}^3(n_{2x}^{-2}-n_{20}^{-2})\sin2\varphi(\Delta\varphi),\tag{16}$$

$$z\mathrm{e}\to \mathrm{e}:\ \Delta kc=2\omega[2n_{2e}^3(\pi/2,\varphi)(n_{2x}^{-2}-n_{2o}^{-2})-n_{1e}^3(\pi/2,\varphi)(n_{1x}^{-2}-n_{1o}^{-2})](\sin2\varphi)\Delta\varphi=2\omega[2(n_{2x}^{-2}-\delta_{2o}\sin^2\varphi)^{-1/2}\delta_{2o}-(n_{1x}^{-2}-\delta_{1o}\sin^2\varphi)^{-1/2}\delta_{1o}](\sin2\varphi)\Delta\varphi,\tag{17}$$

上式 $\delta_{ej}=(n_{lx}^{-2}-n_{lj}^{-2})$，$l=1,2$；$j=$ o，z。以上 $\Delta\theta$ 及 $\Delta\varphi$ 称为晶体主平面上的接收角。它们通常定义为 $\Delta kc/\omega=\pi$，θ 或 φ 为相位匹配角的值，是以相位匹配方向（θ 或 φ）为中线主平面上的角宽度。显然，接收角、接收光谱线宽与晶体的主折射率及相位匹配方向有关。

4　有效非线性系数

据上述各种可能相位匹配偏振组合，可导出相应的适于任意类双轴晶体的有效非线性系数表达式，如表1。假定晶体光学主轴坐标系 x、y、z 轴的单位矢量分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=(1,0,0),\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{o}&=(0,1,0),\\ \boldsymbol{z}&=(0,0,1),\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

在 x、y、$z=0$ 平面内偏振的 e 光偏振方向的单位矢量分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_x&=(0,\cos\theta,\sin\theta),\quad \varphi=\pi/2;\\ \boldsymbol{e}_y&=(\cos\theta,0,\sin\theta),\quad \varphi=0;\\ \boldsymbol{e}_z&=(\sin\varphi,\cos\varphi,0),\quad \theta=\pi/2,\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

而

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{x})^*&=(0,0,0,0,\sin\theta,\cos\theta),\\ (\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x)^*&=(0,\cos^2\theta,\sin^2\theta,\sin2\theta,0,0)\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{oo})^{*} &= (0,1,0,0,0,0),\\ (\boldsymbol{oe}_y)^{*} &= (0,0,0,\sin\theta,0,\cos\theta),\\ (\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y)^{*} &= (\cos^2\theta,0,\sin^2\theta,0,\sin2\theta,0),\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{zz})^{*} &= (0,0,1,0,0,0),\\ (\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{z})^{*} &= (0,0,0,\cos\varphi,\sin\varphi,0)\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

式中右边的星号表示括号内并矢的转置，有星号的并矢为行矩阵，则下面无星号的并矢为列矩阵。

1）$\boldsymbol{x}=0$ 平面上，可能相位匹配的偏振组合是：Ⅰ型 ee-x 和 Ⅱ型 ex-x，其二阶有效非线性系数 d_{eff} 分别为

Ⅰ型：ee → x：

$$d_{\mathrm{eff}} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}:\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x = d_{12}\cos^2\theta + d_{13}\sin^2\theta + d_{14}\sin2\theta,\tag{23}$$

Ⅱ型：ex → x：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{15}\sin\theta + d_{16}\cos\theta,\tag{24}$$

式中 d 为 3×6 个元素的二阶非线性极化率张量。

2）在 $y=0$ 平面上。

Ⅰ型：oo → e：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{12}\cos\theta + d_{32}\sin\theta,\tag{25}$$

ee→o：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{21}\cos^2\theta + d_{23}\sin^2\theta + d_{25}\sin2\theta,\tag{26}$$

Ⅱ型：oe→o：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{24}\sin\theta + d_{26}\cos\theta,\tag{27}$$

oe→e：

$$d_{\mathrm{eff}} = 0.5(d_{14}+d_{36})\sin2\theta + d_{34}\sin^2\theta + d_{16}\cos^2\theta,\tag{28}$$

3）在 $z=0$，即 xy 平面内，可能的相位匹配为 Ⅰ型：zz → e 和 Ⅱ型：ez → e 组合。

Ⅰ型：zz → e：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{13}\sin\varphi + d_{23}\cos\varphi,\tag{29}$$

Ⅱ型：ez → e：

$$d_{\mathrm{eff}} = 0.5(d_{14}+d_{25})\sin2\varphi + d_{15}\sin^2\varphi + d_{24}\cos^2\varphi,\tag{30}$$

(23)式～(30)式可看为对于任意对称类双轴晶体或单斜晶体的有效非线性系数。为清楚起见，把这些有效非线性系数归纳在表 1，把 1、2、m、mm2 和 222 等类常见双轴晶体相应于各种可能相位匹配的有效非线性系数归纳在表 2 中。KTP、LBO 晶体都属于 mm2 晶类，是性能优异的常用晶体。KTP 属标准取向，光学主轴 xyz 与电光主轴 XYZ 一样；而 LBO 属非标准取向，光学主轴与电光主轴不一样，对应关系为 $X\to x$，$Y\to z$，$Z\to y$。KTP 在光学主轴与电光主轴坐标系的非线性系数矩阵相同的形式，LBO 与 KTP 在电光主轴坐标系的非线性系数矩阵 $\boldsymbol{d}$ 都为

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&d_{15}&0\\0&0&0&d_{24}&0&0\\d_{31}&d_{32}&d_{33}&0&0&0\end{bmatrix}$$

KTP 和 LBO 晶体都有 4 种可实现相位匹配的偏振组合。KTP 4 种可能组合及其有效非线性系数分别为

$\varphi=\pi/2$，Ⅱ型：ex → x：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{15}\sin\theta,\tag{31}$$

$\varphi=0$，Ⅰ型：oo → e：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{32}\sin\theta,\tag{32}$$

Ⅱ型：oe→o：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{24}\sin\theta,\tag{33}$$

$\theta=\pi/2$，Ⅱ型：ez → e：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{15}\sin^2\varphi + d_{24}\cos^2\varphi,\tag{34}$$

LBO 在光学主轴坐标系上 $\boldsymbol{d}$ 矩阵为

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&d_{16}\\d_{21}&d_{22}&d_{23}&0&0&0\\0&0&0&d_{34}&0&0\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&d^{\mathrm{e}}_{15}\\d^{\mathrm{e}}_{31}&d^{\mathrm{e}}_{33}&d^{\mathrm{e}}_{32}&0&0&0\\0&0&0&d^{\mathrm{e}}_{24}&0&0\end{bmatrix}$$

后者也是在光学主轴坐标系的非线性系数矩阵，但其矩阵元用电光主轴坐标系上的相应矩阵元表示。所以 LBO 的 4 种可能相位匹配偏振组合及对应的有效非线性系数分别为

$\varphi=\pi/2$，Ⅱ型：xe → x：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{16}\cos\theta,\tag{35}$$

$\varphi=0$，Ⅰ型：ee → o：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{21}\cos^2\theta + d_{23}\sin^2\theta,\tag{36}$$

Ⅱ型：oe→e：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{34}\sin^2\theta,\tag{37}$$

$\theta=\pi/2$，Ⅰ型：zz → e：

$$d_{\mathrm{eff}} = d_{23}\cos\varphi,\tag{38}$$

LBO 在两个坐标系坐标对应关系为：$x\to X$，$y\to Z$，$z\to Y$。于是，LBO 在光学主轴坐标系上的非线性系数矩阵元（d_{ij}）与电光主轴坐标系（d^{e}_{kl}）的对应关系为：$d_{16}=d^{\mathrm{e}}_{15}$，$d_{21}=d^{\mathrm{e}}_{31}$，$d_{22}=d^{\mathrm{e}}_{33}$，$d_{23}=d^{\mathrm{e}}_{32}$，$d_{34}=d^{\mathrm{e}}_{24}$。

KTP 与 LBO 的各四种可能相位匹配偏振组合

中，仅第一种相同，其他三种组合不同。考虑到具体主折射率的关系时，一种晶体 4 种可能的偏振组合不一定都能实现相位匹配；同一种晶体在不同波段的主折射率及双折射随波长变化，一种可能的偏振组合在某一波长范围可以实现相位匹配，在另一范围则可能不行。KTP、LBO 都属 mm2 类晶，即使在同样温度下，对同一波长的光波，两者的主折射率不同，前者为正双轴晶体，后者为负双轴晶体。由 KTP 或 LBO 等晶体的主折射率代入四种可能相位匹配的相应公式，容易判断能否实现相位匹配，同时计算相位匹配角，并从表中的有效非线性系数关系求得相位匹配的偏振组合 d_{eff}的大小。根据几种参量的计算结果可以进而选取最终的最佳相位匹配类型。

表 1 中给出的所有偏振组合不难从折射率椭球方程及光波传播方向(波矢)与两个正交偏振方向的关系来检验。考虑三个主折射率关系后，立即可看出所有可能偏振组合中有的相位匹配角无实数角。这里的结果与用文献[7]给出的二次谐波产生-相位匹配的折射率关系分别化为三主平面的情况得到的可能相位匹配偏振组合及其相位匹配角关系一致；但与从文献[3,5]得到的不一致。原因是文献[3,5]中关于 $\cot\mathrm{an}2\delta$ 公式与文献[7]中推导的公式分母差一负号。文献[7]中关于 $\cot\mathrm{an}2\delta$ 的公式可化为

$$\cot\mathrm{an}2\delta = \frac{\cot\mathrm{an}^2\Omega\sin^2\theta + \cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos\theta\sin2\varphi}, \quad (39)$$

与文献[8] 给出的相同，而文献[5] 中 $\cot\mathrm{an}2\delta$ 的公式分母则为$(\cos\theta - \sin2\varphi)$。如果 $\cot\mathrm{an}2\delta$ 的公式换为上式，则从文献[3,5] 得到的相位匹配偏振组合、相位匹配角及 d_{eff} 的关系也与这里的结果一致。

小结　由上面的结果可见，从折射率椭球方程讨论双轴晶体相位匹配，问题变得简单，物理意义清晰，光波传播与偏振方向与折射率椭球的几何关系直接明了，因此便于理解。相比之下，菲涅耳方程就很复杂，对应的菲涅耳曲面是双层曲面，光波传播与偏振方向与它没有简单的联系，因此利用菲涅耳方程和曲面分析同样的相位匹配问题也就很复杂。上面得到了各种可能实现相位匹配的偏振组合，给出各可能实现相位匹配的相位失配及有效非线性系数的普遍关系，其中五类双轴晶体的 d_{eff}归纳在表 2 中。

Table 2. The effective NL coefficients d_{eff} for five classes of biaxial crystals

k-d	pd and type	effective NL coefficient d_{eff}					
		1	2 standard orient.	m standard orient.	mm2 KTP	mm2 LBO	222
$\varphi=\pi/2$, in yz plane	Ⅰ: ee-x	$d_{12}\cos^2\theta + d_{13}\sin^2\theta + d_{14}\sin2\theta$	$d_{14}\sin2\theta$	$d_{12}\cos^2\theta + d_{13}\sin^2\theta$	0	0	$d_{14}\sin2\theta$
	Ⅱ: xe-x	$d_{15}\sin\theta + d_{16}\cos\theta$	$d_{16}\cos\theta$	$d_{15}\sin\theta$	$d_{15}\sin\theta$	$d_{16}\cos\theta$	0
$\varphi=0$, in xz-plane	Ⅰ: oo-e	$d_{12}\cos\theta + d_{32}\sin\theta$	0	$d_{12}\cos\theta + d_{32}\sin\theta$	$d_{32}\sin\theta$	0	0
	Ⅰ: ee-o	$d_{21}\cos^2\theta + d_{23}\sin^2\theta + d_{25}\sin2\theta$		0	0	$d_{21}\cos^2\theta + d_{23}\sin^2\theta$	0
	Ⅱ: oe-o	$d_{24}\sin\theta + d_{26}\cos\theta$	0	$d_{24}\sin\theta + d_{26}\cos\theta$	$d_{24}\sin\theta$	0	0
	Ⅱ: oe-e	$0.5(d_{14} + d_{36})\sin2\theta + d_{16}\cos^2\theta + d_{34}\sin^2\theta$		0	0	$d_{34}\sin^2\theta$	0
$\theta=\pi/2$, in xy-plane	Ⅰ: zz-e	$d_{13}\sin\varphi + d_{23}\cos\varphi$	$d_{23}\cos\varphi$	$d_{13}\sin\varphi$	0	$d_{23}\cos\varphi$	0
	Ⅱ: ze-e	$0.5(d_{14} + d_{23})\sin2\varphi + d_{15}\sin^2\varphi + d_{24}\cos^2\varphi$	$0.5(d_{14} + d_{25})\sin2\varphi$	$d_{15}\sin^2\varphi + d_{24}\cos^2\varphi$		0	$0.5(d_{14} + d_{25})\sin2\varphi$

(23)式～(30)式已包括了所有对称类双轴晶体的有效非线性系数关系式。由相位失配可以求得晶体的接收角与接收光谱宽度等特性参量。对具体对称类晶体的相位匹配，只要通过查表的简单手续，把主折射率代入实现相位匹配的条件，判断是否满足，由此可以确定容许的相位匹配方法，并求得其相应的相位匹配角、有效非线性系数的关系式。如果相位匹配条件满足，即可以找出容许的相位匹配的所有方法，根据给出的公式直接算出相位匹配角，同时得到有效非线性系数 d_{eff} 公式；并比较不同相位匹配方法、特性的优劣，选取最佳的相位匹配方法、相位匹配方向或类型。上面给出的有效非线性系数忽略了电位移矢量与电场方向的偏差，关系简洁，便于初步的分析设计。考虑这偏差的问题，将在另外的文章讨论。

参　考　文　献

[1] Danielius R, Piskarskas A, Trapani P D *et al*.. A collinearly phase-matched paramitric generator/amplifier of visible femtosecond pulses. *IEEE J. Quant. Electron.*,

1998, **34**(3): 459~464

[2] Hobden M V. Phase-matched SHG in biaxial crystals. *J. Appl. Phys.*, 1967, **38**(11): 4365~4372

[3] Ito H, Naito H, Inaba H. Generalized study on angular dependence of induced second order NLO polarizations and PM in biaxial crystals. *J. Appl. Phys.*, 1975, **46**(9): 3992~3998

[4] Zumsteg F C, Bierlein J D, Gier T E. $K_xRb_{1-x}TiOPO_4$: A new nonlinear optical material. *J. Appl. Phys.*, 1976, **47**(11): 4980~4985

[5] Yao J Q, Fahlen T S. Caculation of optimum PM parameters for biaxial crystals $KTiOPO_4$. *J. Appl. Phys.*, 1984, **55**(1): 65~68

[6] Yao Jianquan, Sheng Weidong, Shi Weiqiang. Accurate calculation of optimum PM parameters in 3-wave interactions with biaxial NLO crystals. *J. Opt. Soc. Am.* (*B*), 1992, **9**(6): 891~902

[7] Yang Shengli, Chen Mouzhi. Collinear phase matching of SHG in arbitrary directions of biaxial crystals. *Chin. J. Laser*, 2002, **B11**(1): 23~26

Phase Matching Paramiters for Doublings in Principal Planes of Biaxial Crystals

Yang Shengli
(*Phys. Dept. of Xiamen Univ.*, *Xiamen* 361005)
(Received 2 July 2001; revised 5 November 2001)

Abstract: Based on index ellipsoid equation and characteristics of optical wave propagation and polarization in a biaxial crystal, methods of the collinear phase matching (PM) permitted for frequency doubling in principal planes of biaxial crystals are discussed and analysed. The general expressions of the effective nonlinear coefficients d_{eff} and phase mismatchs for all the allowed PMs are derived for all kinds of biaxial crystals. By using the Table, in which possible PM types or polarization combinations, respective PM angle formula and effective nonlinear coeficients are involved, realizable PM methods may be found and respective PM angles can be calculated. Finally effective nonlinear coeficients for allowed PMs can be compared and optimal PM types or directions can be selected easily.

Key words: biaxial crystal; phase matching (PM) paramiter; phase mismatch; effective nonlinear (NL) coefficient