第 22 卷 第 1 期
2002 年 1 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol.22, No.1
January, 2002

文章编号：0253-2239(2002)01-0024-06

渐变折射率波导传播特性微扰计算的代数递推公式*

余守宪 王 健 张思炯 吴 柳

(北方交通大学物理系，北京 100044)

摘要： 应用量子力学的超位力定理(HVT)和赫尔曼-费恩曼(Hellmann-Feynman)定理(HFT)，导出了用微扰法计算渐变折射率平面波导传播常数各级近似值的代数递推公式，并给出了由传播常数近似值计算模场近似表达式的代数公式。计算了几个典型实例。此法的特点是便于直接计算任意级近似的传播常数及模场分布，且可推广到二维波导的计算。

关键词： 渐变折射率波导；传播常数；模场；微扰方法；代数递推公式

中图分类号：TN252 **文献标识码**：A

1 引 言

考虑某个扩散平面波导，波导厚度沿 x 方向，折射率分布函数为 $n(x)$，则模场 $\psi(x)$ 满足方程：

$$\mathrm{d}^2\psi/(\mathrm{d}x^2) + [k^2 n^2(x) - \beta^2]\psi = 0, \tag{1}$$

其中 β 为传播常数，$k = 2\pi/\lambda$ 为真空中的波数。设波导剖面折射率分布由下式给出：

$$n^2(x) = n_s^2 + (n_0^2 - n_s^2)f(x), \tag{2}$$

其中 n_0 为表面最大折射率，n_s 为衬底折射率，$f(x)$ 为单调下降函数，$f(0) = 1$，$f(\infty) = 0$。设 a 为扩散深度，引入无量纲参数

$$V = ka\sqrt{n_0^2 - n_s^2}, \qquad b = \frac{N^2 - n_s^2}{n_0^2 - n_s^2}, \tag{3}$$

这里，$N = \beta/k$，V 称为归一化宽度，b 称为归一化传播常数，并作变量变换：

$$\xi = (\sqrt{V}/C)(x/a), \tag{4}$$

C 为非零常量，可根据需要选定。于是，可定义归一化折射率分布 $\mu(\xi)$ 和归一化本征值 ε_m：

$$\mu(\xi) = C^2 V[n_0^2 - n^2(Ca\xi/\sqrt{V})]/(n_0^2 - n_s^2) = C^2 V[1 - f(Ca\xi/\sqrt{V})], \tag{5}$$

$$\varepsilon_m = C^2 V(1 - b_m), \tag{6}$$

其中 m 为模数，b_m 为波导 TE_m 模的归一化传播常数，则(1)式化为本征值方程：

$$H\psi_m = \varepsilon_m\psi_m. \tag{7}$$

对渐变折射率分布 $\mu(\xi)$，H 是厄米算符

$$H = -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}\xi^2 + \mu(\xi). \tag{8}$$

于是，(7)式与一个具有势能 $\mu(\xi)$ 及本征值 ε_m 单粒子束缚态的定态薛定谔方程相当。这里，本征函数 $\psi_m(\xi)$ 即 TE_m 模的模场分布，而由本征值 ε_m 通过(6)式可求得相应的传播常数 b_m。众所周知，仅当 $\mu(\xi)$ 为直线、抛物线和指数等几种函数形式时(7)式才有精确解[1]。一般情况下，只能用数值计算或近似方法求解[2~10]。常见的瑞利-薛定谔(R-S)微扰法，需借助定态波函数计算能级近似值，计算较为复杂。近年来，在布里渊-维格纳微扰论的基础上发展了一种迭代微扰法[11]，可用计算机编程进行数值计算；Scherer[12]提出的超收敛微扰法在量子力学中对阐明是否存在李变换具有重要的理论意义，但实际计算比较繁琐。

Swenson 和 Danforth[13] 曾将超位力定理(HVT)和赫尔曼-费恩曼定理(HFT)引入瑞利-薛定谔微扰计算，该方法只需做代数运算而不必知道态函数的具体表达式，简便易行。我们曾将该方法引入高斯型渐变折射率平面波导导模的计算[14]。本文在此基础上，以抛物线和线性折射率分布为基础(作为零级近似)，计算了可展开为幂级数的任意折射率剖面的传播常数各级近似值的代数递推公式，并导出了由所求得的传播常数近似值计算相应导模场分布近似表达式的代数公式。给出了应用代数递推公式进行计算的几个典型实例。本文方法的特点是：便于直接计算任意级近似的传播常数与模场分布，而且可以推广到二维等情况。

2 理 论

$x = 0$ 时，$\mu(\xi) = 0$ 的幂级数为

---

* 北方交通大学科技论文基金资助课题。

Email：wbli@center.njtu.edu.cn

收稿日期：2000-12-04；收到修改稿日期：2001-01-15

$$\mu(\xi) = \sum_i a_i \xi^i = \sum_u a_u \xi^u + \sum_v a_v \xi^v . \quad (9)$$

进行微扰计算时，可把幂级数截断成多项式，并取 $H = H_0 + H'$，其中

$$H_0 = -\mathrm{d}^2/(\mathrm{d}\xi^2) + \sum_u a_u \xi^u$$

为算符 H 的未微扰部分，$H_0 \psi_n = \varepsilon_{0n} \psi_n$ 有精确解，ε_{0n} 为第 n 个本征值(即第 n 个导模的本征值)。而

$$H' = \sum_v a_v \xi^v \quad (10)$$

为微扰部分。ε_{0n} 可视为 $H\psi_n = \varepsilon_n \psi_n$ 的本征值 ε_n 的零级近似值，而各级修正则可借助超位力定理与赫尔曼-费恩曼定理求出。下面导出有关计算公式。

为简便起见，略去量子数 n，记 ε_n 为 ε 及 ε_{0n} 为 ε_0，并记 $\langle A \rangle = \langle \psi_n | A | \psi_n \rangle$。于是超位力定理为 :设 W 为任意不显含时间的算符，记 $[H, W] \equiv HW - WH$，而 $H\psi = E\psi$，ψ 为归一化波函数，则有

$$\langle [H, W] \rangle = 0. \quad (11)$$

赫尔曼-费恩曼定理为 :若 H 是某个参量 λ 的函数 $H = H(\lambda)$，则

$$\partial \varepsilon / \partial \lambda = \langle \partial H / \partial \lambda \rangle . \quad (12)$$

下面利用超位力定理和赫尔曼-费恩曼定理求解可展开为 ξ 的幂级数的任意势函数形式 $\mu(\xi)$ 的本征值方程(7) 式。分别取

$$W = \xi^l, \quad W = \xi^l (\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi), \quad l = 0, 1, 2, \cdots, \quad (13)$$

代入(11)式，注意到(9)式，合并整理得超位力定理

$$l\varepsilon \langle \xi^{l-1} \rangle = \sum_u (u/2 + l) a_u \langle \xi^{l-1+u} \rangle + \sum_v (v/2 + l) a_v \langle \xi^{l-1+v} \rangle - \frac{1}{4} l(l-1)(l-2) \langle \xi^{l-3} \rangle . \quad (14)$$

参照瑞利-薛定谔微扰论，设期望值展成 λ 的幂级数

$$\varepsilon = \sum_j \lambda^j \varepsilon_j , \quad \langle \xi^h \rangle = \sum_k \lambda^k \langle \xi^h \rangle_k , \quad (15)$$

并令上式中 $h = 0$，则有

$$\langle 1 \rangle = 1 = \langle 1 \rangle_0 + \lambda \langle 1 \rangle_1 + \cdots , \quad (16)$$

$$\langle \xi^0 \rangle_j = \delta_{j0} = \begin{cases} 1 & j = 0, \\ 0 & j \neq 0. \end{cases} \quad (17)$$

将算符写成

$$H = H_0 + \lambda H' = H_0 + \lambda \sum_v a_v \xi^v , \quad (18)$$

则赫尔曼-费恩曼定理给出

$$\partial \varepsilon / (\partial \lambda) = \langle \partial H / (\partial \lambda) \rangle = \sum_v a_v \langle \xi^v \rangle . \quad (19)$$

将(15) 式代入(19) 式及(14) 式后，令等式两边 λ 的同次幂相等，分别得到

$$j\varepsilon_j = \sum_v a_v \langle \xi^v \rangle_{j-1} , \quad (20)$$

和

$$l \sum_{\substack{j,k \\ (j+k=h)}} \varepsilon_j \langle \xi^{l-1} \rangle_k = \sum_u \left(\frac{u}{2} + l \right) a_u \langle \xi^{l-1+u} \rangle_h + \sum_v \left(\frac{v}{2} + l \right) a_v \langle \xi^{l-1+v} \rangle_{h-1} - \frac{1}{4} l(l-1)(l-2) \langle \xi^{l-3} \rangle_h . \quad (21)$$

利用(20) 式、(21) 式及(17) 式给出的赫尔曼-费恩曼、超位力定理和归一化条件，就能通过代数递推得到 ε 的微扰展开，且展开项中只出现零级近似值 ε_0(即第 n 个模的本征值的零级近似值 ε_{n0})。注意到(9) 式归一化折射率的幂级数展开式的前几项

$$\mu(\xi) = \sum_i a_i \xi^i = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots ,$$

常数项仅仅使本征值增加 a_0 线性项 $a_1 \xi$ 对应的本征值方程有精确解，但对某些折射率分布[如在 $\xi = 0$ 处 $\mu(\xi)$ 有极值时]，$a_1 = 0$ 抛物线项 $a_2 \xi^2$(对应谐振子) 的本征值方程也有精确解，但更高阶项对应的本征值方程没有精确解。所以，下面分别考虑线性和抛物线型折射率分布的本征值方程作为零级近似的情形。对于在 $\xi = 0$ 附近可展开为 ξ 的幂级数的任意渐变折射率分布而言，这是具有普遍意义的。

2.1　以抛物线型折射率分布波导传播的常数作为零级近似值，导出渐变折射率波导传播常数的各级近似值

抛物线型折射率分布的无量纲本征值方程为

$$[-\mathrm{d}^2/(\mathrm{d}\xi^2) + \xi^2] \psi = \varepsilon_0 \psi . \quad (22)$$

其本征值为

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{n0} = 2n + 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \quad (23)$$

下面考虑归一化折射率分布可以展开为如下幂级数形式的波导问题：

$$\mu(\xi) = a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + \cdots , \quad (24)$$

在(4) 式中选取合适的 C 使 $a_2 = 1$。取

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2 , \\ H' &= a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6 + \cdots , \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

即在(20) 式、(21) 式中，$u = 2$，$a_2 = 1$，$v = 3, 4, 5, 6, \cdots$，于是，(21) 式则为

$$l \sum_{\substack{j,k \\ (j+k=h)}} \varepsilon_j \langle \xi^{l-1} \rangle_k = (l+1) \langle \xi^{l+1} \rangle_k + \sum_v \left(\frac{v}{2} + l \right) a_v \langle \xi^{l-1+v} \rangle_{h-1} - \frac{1}{4} l(l-1)(l-2) \langle \xi^{l-3} \rangle_h . \quad (26)$$

利用(26)、(17)、(20) 式，可由递推法依次求出 $\langle \xi^v \rangle_j$

及 ε_j。为求一级微扰修正值，令(26)式中 $h=0$，得

$$\langle\xi^{l+1}\rangle_0=\frac{1}{l+1}[l\varepsilon_0\langle\xi^{l-1}\rangle_0+\frac{1}{4}l(l-1)(l-2)\langle\xi^{l-3}\rangle_0].\quad(27)$$

分别令 $l=0,1,2,\cdots$，并利用(17)式，依次递推得到 $\langle\xi^k\rangle_0(k=1,2,3\cdots)$ 的值如下：

$$\left.\begin{aligned}&\langle\xi^1\rangle_0=\langle\xi^3\rangle_0=\langle\xi^5\rangle_0\cdots=\langle\xi^{2k+1}\rangle_0=0\\&\quad(k=0,1,2\cdots),\\&\langle\xi^2\rangle_0=\varepsilon_0/2,\\&\langle\xi^4\rangle_0=3/[8(\varepsilon_0^2+1)],\\&\langle\xi^6\rangle_0=5/[16(\varepsilon_0^3+5\varepsilon_0)],\\&\langle\xi^8\rangle_0=\frac{5\times7}{(8\times16)(\varepsilon_0^4+14\varepsilon_0^2+9)},\\&\langle\xi^{10}\rangle_0=\frac{7\times9}{(16\times16)(\varepsilon_0^5+30\varepsilon_0^3+89\varepsilon_0)},\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

等，$\varepsilon_0=2n+1$。由(20)式即得一级微扰修正值

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=a_3\langle\xi^3\rangle_0+a_4\langle\xi^4\rangle_0+\\&a_5\langle\xi^5\rangle_0+a_6\langle\xi^6\rangle_0+\cdots=\\&a_4\langle\xi^4\rangle_0+a_6\langle\xi^6\rangle_0+\cdots,\end{aligned}\quad(29)$$

下面来求二级微扰修正值。由(26)式，令 $h=1$，得

$$\begin{aligned}\langle\xi^{l+1}\rangle_1=&\frac{1}{l+1}[l\varepsilon_0\langle\xi^{l-1}\rangle_1+l\varepsilon_1\langle\xi^{l-1}\rangle_0-\\&\sum_{v\geqslant3}\left(\frac{v}{2}+l\right)a_v\langle\xi^{l-1+v}\rangle_0+\\&\frac{1}{4}l(l-1)(l-2)\langle\xi^{l-3}\rangle_1],\end{aligned}\quad(30)$$

分别令 $l=0,1,2,\cdots$，并利用(17)式及(28)式，依次递推得到 $\langle\xi^k\rangle_1(k=1,2,3\cdots)$ 的值如下

$$\left.\begin{aligned}\langle\xi^1\rangle_1=&-(3/4)a_3\varepsilon_0-(15/16)a_5(\varepsilon_0^2+1),\\\langle\xi^2\rangle_1=&-(3/8)a_4(\varepsilon_0^2+1)-\\&(15/32)a_6(\varepsilon_0^3+5\varepsilon_0),\\\langle\xi^3\rangle_1=&-(1/16)a_3(15\varepsilon_0^2+7)-\\&(5/32)a_5(7\varepsilon_0^3+19\varepsilon_0),\\\langle\xi^4\rangle_1=&-(1/64)a_4(34\varepsilon_0^3+134\varepsilon_0)-\\&(1/64)a_6(165\varepsilon_0^4+1770\varepsilon_0^2+945),\\\langle\xi^5\rangle_1=&-(5/32)a_3(7\varepsilon_0^3+19\varepsilon_0)-\\&(1/256)a_5(315\varepsilon_0^4+2170\varepsilon_0^2+1107),\\\langle\xi^6\rangle_1=&-(5/768)a_4(85\varepsilon_0^4+859\varepsilon_0^2+297)-\\&(1/1536)a_6(3454\varepsilon_0^5+51420\varepsilon_0^3+\\&72006\varepsilon_0),\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

而由(20)式，即得二级微扰修正值

$$\varepsilon_2=\frac{a_3\langle\xi^3\rangle_1+a_4\langle\xi^4\rangle_1+a_5\langle\xi^5\rangle_1+a_6\langle\xi^6\rangle_1+\cdots}{2},\quad(32)$$

于是能级的二级近似值为 $\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2$，其中 ε_1 和 ε_2 都可由 ε_0 用(29)式和(32)式算出。

可以指出，利用计算机编程计算，可以直接借助(20)式、(21)式及(17)式用递推法求得任意级近似的能级近似值(参看文献[13 ~ 15])。

2.2 以直线型折射率分布波导的传播常数作为零级近似值，导出渐变折射率波导传播常数的各级近似值

直线型折射率分布的无量纲本征值方程写为

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\right)\psi=\varepsilon_0\psi,\quad\psi(0)=0,\quad\psi(\infty)=0,\quad(33)$$

它的解可用艾里函数表示：$\psi_n(\xi)=A_i(\xi-\varepsilon_{0n})$，且 $\psi_n(0)=A_i(-\varepsilon_{0n})=0$，可见，本征值是艾里函数的零点，可精确求出。其前10个零点如表1所示[15]。

Table 1. Zeros of Airy function $[A_i(-\varepsilon_{0n})=0]$[15]

n	ε_{0n}	n	ε_{0n}
1	2.338	6	9.021
2	4.088	7	10.040
3	5.521	8	11.009
4	6.787	9	11.936
5	7.944	10	12.829

下面我们以艾里函数的零点 $\varepsilon_0=\varepsilon_{0n}$ 作为零级近似，考虑归一化折射率分布可以展开为如下幂级数形式的波导问题：

$$\mu(\xi)=a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+a_4\xi^4+a_5\xi^5+\cdots,\quad(34)$$

这里，$a_1=1$。取

$$\left.\begin{aligned}H_0&=-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}\xi^2+\xi,\\H'&=a_2\xi^2+a_3\xi^3+a_4\xi^4+a_5\xi^5+\cdots,\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

即在(21)式中令 $u=1,a_1=1,v=3,4,5,6,\cdots$。于是，与前述一样由 $\langle\xi^0\rangle_j=\delta_{j0}$ 开始，可依次递推得到 $\langle\xi^k\rangle_0,\langle\xi^k\rangle_1,\langle\xi^k\rangle_2,\cdots(k=1,2,3,\cdots)$ 诸值，从而求得1级，2级，3级 … 微扰修正值 ε_1、ε_2、ε_3，…。

2.3 由导模传播常数近似值求模场分布近似表达式

对于导模而言，场振幅在平面波导的包层和衬底中均随深度增加而急剧减小。因此，由上述代数公式求出各导模传播常数的近似值后，就可以直接应用本征值方程用幂级数法求出导模模场的近似表达式(用幂级数的截断多项式表示)。以下仅以 $\mu(\xi)$

$= \xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4$(近抛物线型折射率剖面)为例，分别对偶模$[\psi'(0)=0,\psi(0)\neq 0]$及奇模$[\psi(0)=0,\psi'(0)\neq 0]$求出模场分布的近似表达式。

偶模：令

$$\psi(\xi) = b_0 + \frac{1}{2}b_2\xi^2 + \frac{1}{3}b_3\xi^3 + \frac{1}{4}b_4\xi^4 + \frac{1}{5}b_5\xi^5 + \frac{1}{6}b_6\xi^6 + \frac{1}{7}b_7\xi^7, \quad (36)$$

代入本征值方程

$$-\mathrm{d}^2\psi/(\mathrm{d}\xi^2) + \mu(\xi)\psi = E\psi, \quad (37)$$

并取 $b_0 = 1$，可求得

$$\psi(\xi) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}\xi^2 + \frac{1}{24}(\varepsilon^2+2)\xi^4 + \frac{1}{20}a_3\xi^5 + \frac{1}{30}\left[a_4 - \frac{5}{24}(\varepsilon^2+2) - \frac{\varepsilon}{2}\right]\xi^6 - \frac{1}{42}a_3\left(\frac{\varepsilon}{20}+\frac{1}{2}\right)a_3\xi^7, \quad (38)$$

作为核验，对于抛物线型折射率分布，$a_3 = a_4 = 0$，$\varepsilon = 2n+1$。当 $n = 0,2,4,\cdots$ 时，(38)式与场分布函数 $\psi_n(\xi) = H_n(\xi)\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$ [$H_n(\xi)$ 为厄米多项式]展开式的前几项完全一致。

奇模：令

$$\psi(\xi) = b_1\xi + \frac{1}{2}b_2\xi^2 + \frac{1}{3}b_3\xi^3 + \frac{1}{4}b_4\xi^4 + \frac{1}{5}b_5\xi^5 + \frac{1}{6}b_6\xi^6 + \frac{1}{7}b_7\xi^7, \quad (39)$$

代入(37)式，并取 $b_1 = 1$，可求得

$$\psi(\xi) = \xi - \frac{\varepsilon}{6}\xi^3 + \frac{1}{120}(\varepsilon^2+6)\xi^5 + \frac{1}{30}a_3\xi^6 + \left[\frac{1}{42}a_4 - \frac{1}{5040}(\varepsilon^3+36\varepsilon)\right]\xi^7, \quad (40)$$

作为核验，对于抛物线型折射率剖面，$a_3 = a_4 = 0$，$\varepsilon = 2n+1$。当 $n = 1,3,5,\cdots$ 时，(40)式也与 $\psi_n(\xi) = H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}$ 展开式的前几项完全一致。

3　应　　用

3.1　实例 1 剖面折射率为对称高斯分布与强非对称高斯分布

这里 $f(x) = \exp(-x^2/a^2)$。由(4)式选取 $C = 1$，得归一化高斯型折射率分布为

$$\mu(\xi) = C^2V[1-\exp(-\xi^2/V)] = \xi^2 + a_4\xi^4 + a_6\xi^6 + a_8\xi^8 + \cdots,$$

其中 $a_4 = -V^{-1}/2$，$a_6 = V^{-2}/6$，$a_8 = -V^{-3}/24$。计算精确到 V^{-2}，需要计算到二级近似，有

$$\varepsilon_0 = 2n+1,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{4}(2n^2+2n+1)a_4 - \frac{5}{8}(4n^3+8n+3)a_6,$$

$$\varepsilon_2 = -(34n^3+51n^2+59n+21)a_4^2/16.$$

而 a_4a_6 为 V^{-3} 量级，a_6^2 为 V^{-4} 量级，a_8 为 V^{-3} 量级，故相应的项均可忽略，$\varepsilon = \varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2$。而

$$b = 1-\varepsilon/V,\quad N^2 = b(n_0^2-n_s^2)+n_s^2,$$

于是，由相应导模的本征值 ε，可求出 b 和 N。

为了对照，取文献[5]所给出的有关数据为例：芯区折射率 $n_o = 1.5953$，包层及衬底折射率 $n_s = 1.512$，膜厚 $a = 2.66\ \mu\text{m}$，$\lambda = 0.6328\ \mu\text{m}$，相应的归一化厚度 $V = 13.4372$，我们计算了直到模数 $n = 9$ 的精确到二级微扰的 b 和 N_2 值，并与文献[5]采用里兹-伽略金(Ritz-Galerkin)法所得 N 值比较。表 2 列出了折射率对称高斯分布($n = 1,2,3,\cdots 9$)和强非对称高斯分布的结果。这里，对于折射率强非对称高斯分布，取包层-薄膜界面处场振幅为 0，则各导模对应于对称高斯分布中的奇模 $n = 1,3,5,7,9$。由表 2 可见，直到截止区附近都符合得很好(相对偏差 η 约为 $10^{-5}\sim10^{-4}$)。

Table 2. TE modes in symmetric and strongly asymmetric Gaussian index profile planar waveguide ($n = 1,3,5,7,9$ for strongly asymmetric Gaussian index profile, $\eta = |1-N_2/N|$)

n	b	N_2	N	η
0	0.92766	1.58942	1.58935	4.4×10^{-5}
1	0.78728	1.57795	1.57775	1.3×10^{-4}
2	0.65564	1.56711	1.56681	1.9×10^{-4}
3	0.53301	1.55695	1.55661	2.2×10^{-4}
4	0.41968	1.54750	1.54717	2.2×10^{-4}
5	0.31593	1.53880	1.53856	1.6×10^{-4}
6	0.22205	1.53089	1.53056	2.0×10^{-5}
7	0.13832	1.52379	1.52417	2.5×10^{-4}
8	0.06502	1.51755	1.51862	7.0×10^{-4}
9	0.00243	1.51221	1.51442	1.5×10^{-3}

表 3 给出了强非对称高斯分布平面波导 TE_0 模归一化传播常数 b 的二级近似值，并与 WKB 近

Table 3. Normalized propagation constants b of TE_0 mode in strongly asymmetric Gaussian index profile planar waveguide

V	b		
	WKB	present method	F.D.
2	0.0105	0.0176	0.0376
3	0.2076	0.2228	0.2267
4	0.3635	0.3733	0.3745
5	0.4716	0.4781	0.4786

似法及有限差分(F.D.)法所得结果进行了比较。可见本文的方法与有限差分法的结果符合,比 WKB 近似好得多。

3.2 实例 2:sech^2 型剖面折射率分布[对称爱泼斯坦(Epstein)分布]

这里 $f(x)=\mathrm{sech}^2(x/a)$。由(4)式选 $C=1$,得归一化折射率分布为

$$\mu(\xi)=C^2V[1-\mathrm{sech}^2(\xi/\sqrt{V})]=\xi^2+a_4\xi^4+a_6\xi^6+\cdots,$$

其中 $a_4=(-2/3)V^{-1}$,$a_6=(17/45)V^{-2}$。为了对照,取文献[5]所给出的有关数据为例:$n_o=2.25$,$n_s=2.20$,$a=2.1716\ \mu\mathrm{m}$,$\lambda=1\ \mu\mathrm{m}$。计算到二级近似精确到 V^{-2} 的项,表 4 列出了前 6 个导模($n=1,2,3,4,5$)的 b 和 N_2 值的计算结果,并与文献[5]采用里兹-伽略金法所得 N 值比较,可见符合得很好。

Table 4. TE modes in sech^2 index profile planar waveguide

n	b	N_2	N
0	0.85630	2.24288	2.24237
1	0.59283	2.22978	2.22935
2	0.37771	2.21902	2.21867
3	0.21087	2.21064	2.21038
4	0.09231	2.20466	2.20449
5	0.02203	2.20111	2.20103

3.3 实例 3 强非对称指数型剖面折射率分布

这里 $f(x)=\exp(-x/a)$。由(4)式选取 $C=V^{-1/6}$,得归一化折射率分布为

$$\mu(\xi)=C^2V[1-\exp(-C\xi/\sqrt{V})]=\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+a_4\xi^4+a_5\xi^5+a_6\xi^6\cdots,$$

其中

$$a_2=(-1/2)V^{-2/3},$$
$$a_3=(1/6)V^{-4/3},$$
$$a_4=(-1/20)V^{-2},$$
$$a_5=(1/120)V^{-8/3},$$
$$a_6=(-1/720)V^{-10/3},$$
$$a_7=(1/1040)V^{-4}.$$

而 $b=1-\varepsilon V^{-2/3}$。由于强指数型和余误差型收敛较高斯型和 sech^2 型慢,微扰计算的级次要多些,相应地展开项数也要多些,这里的计算精确到 V^{-4},需要展开到第 7 项并计算到 6 级近似值。对于 TE_0 模,ε 由艾里函数第一个零点 $\varepsilon_0=2.338$ 给出,表 5 给出了归一化传播常数 6 级近似值 b_6,并与精确数值解(里兹-伽略金法结果)和 WKB 法的结果进行了比较,表明本文方法可以得到较高的精确度。表 6 则给出了 TE_1 模(取 $\varepsilon_0=4.088$)和 TE_2 模(取 $\varepsilon_0=5.521$)的归一化传播常数 5 级近似值 b_5 和 6 级近似值 b_6 的结果,二者已十分接近,表明 6 级近似已能给出较满意的结果。

应该指出,尽管需要计算到 6 级近似,但可以采用代数迭代公式计算,编程比较简单,计算工作量增加不多。因此,本文的方法仍然十分有效。

Table 5. Normalized propagation constants b of TE_0 mode in strongly asymmetric exponential index profile planar waveguide ($\varepsilon_0=2.338$)

V	b_6	exact	WKB
2	0.0523	0.0791	0.0831
3	0.1945	0.2010	0.2054
4	0.2932	0.2950	0.2992
5	0.3662	0.3666	0.3706
6	0.4225	0.4226	0.4263

Table 6. Normalized propagation constants b of TE_1 and TE_2 modes in strongly asymmetric exponential index profile planar waveguide.

V	TE_1 $\varepsilon_0=4.088$		TE_2 $\varepsilon_0=5.521$	
	b_5	b_6	b_5	b_6
4	0.0227	0.0194		
6	0.1457	0.1480	0.0126	0.0090
8	0.2479	0.2457	0.0920	0.0943
10	0.3188	0.3199	0.1663	0.1688
12	0.3775	0.3782	0.2286	0.2306
14			0.2809	0.2823

3.4 实例 4 强非对称余误差型剖面折射率分布

这里 $f(x)=\mathrm{erfc}(x/a)$。由(4)式选取 $C=(\sqrt{\pi}/2)^{1/3}V^{-1/6}$,得归一化折射率分布为

$$\mu(\xi)=C^2V[1-\mathrm{erfc}(-C\xi/\sqrt{V})]=\xi+a_3\xi^3+a_5\xi^5+a_7\xi^7+\cdots,$$

其中

$$a_3=(-1/3)(\sqrt{\pi}/2)^{2/3}V^{-4/3},$$
$$a_5=(1/10)(\sqrt{\pi}/2)^{4/3}V^{-8/3},$$
$$a_7=(-1/42)(\sqrt{\pi}/2)^{2}V^{-4}.$$

而 $b=1-\varepsilon(2/\sqrt{\pi})^{2/3}V^{-2/3}$。

表 7 给出了 TE_0 模和 TE_1 模相应的归一化传播常数。

Table 7. Normalized propagation constants b of TE_0 and TE_1 modes in strongly asymmetric erfc index profile planar waveguide. (b_5, b_6: fifth and sixth order approximation of b)

V	TE_1 $\varepsilon_0 = 2.338$		
	b_5	b_6	exact b
3.0	-0.0320	0.0622	0.0374
3.5	-0.0648	0.0714	0.0855
4.0	0.1264	0.1299	0.1331
4.5	0.1765	0.1782	0.1787
5.0	0.2198	0.2207	0.2210

V	TE_2 $\varepsilon_0 = 4.088$	
	b_5	b_6
7	0.0166	0.0253
8	0.0687	0.0726
9	0.1150	0.1168
10	0.1573	0.1582
11	0.1961	0.1965

参 考 文 献

[1] Sodha M S, Ghatak A K. *Inhomogeneous Optical Waveguides*. New York: Plenum Press, 1977. Chap.3

[2] Gedeon A. Comparison between rigorous theory and WKB-analysis of modes in graded-index waveguides. *Opt. Commun.*, 1974, **12**(3): 329~332

[3] Ankiewicz A. Comparison of wave and ray techniques for solution of graded index optical waveguide problems. *Optica Acta*, 1978, **25**(5): 361~373

[4] Kumar A, Khular E. A perturbation analysis for modes in diffused waveguides with a Gaussian profile. *Opt. Commun.*, 1978, **27**(3): 349~352

[5] Meunier J P, Pigeon J, Massot J N. A numerical technique for the determination of propagation characteristics of inhomogeneous planar optical waveguides. *Opt. & Quant. Electron.*, 1983, **15**(1): 77~85

[6] She Shouxian, Xie Fengchao. A new method for guided modes of graded-index planar waveguides. *Chinese J. Quantum Electron.* (量子电子学), 1992, **9**(2): 181~185(in Chinese)

[7] She Shouxian. Analysis of graded-index profile planar optical waveguides and circular optical fibers by a finite difference method. *Acta Optica Sinica*(光学学报), 1995, **15**(9): 1266~1270(in Chinese)

[8] She Shouxian. An improved WKB method and correction of phase shift. *Acta Optica Sinica*(光学学报), 1999, **19**(8): 1045~1051(in Chinese)

[9] Cao Zhuangqi. Dispersion equations of inhomogeneous planar optical waveguides. *Acta Optica Sinica*(光学学报), 1994, **14**(11): 1223~1226(in Chinese)

[10] Cao Zhuangqi, Zhan Li, Chen Yingli. An accrate analysis of graded index optical waveguides. *Acta Optica Sinica*(光学学报), 1994, **14**(12): 1240~1243(in Chinese)

[11] Xu Gongou, Wang Wen-ge, Yang Ya-tian. Singular behavior at avoided crossing in iterative perturbation. *Phys. Rev.* (*A*), 1992, **45**(8): 5401~5407

[12] Scherer W. Superconvergent perturbation method in quantum mechanics. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **74**(9): 1495~1499

[13] Swenson R J, Danforth S H. Hypervirial and Hellmann-Feynman theorems applied to anharmonic oscillators. *J. Chem. Phys.*, 1972, **57**(4): 1734~1737

[14] Wu Liu, She Shouxian. A perturbation Analysis for modes in graded waveguides by hypervirial and Hellmann-Feynman Theorems. *Opt. Commun.*, 1989, **73**(1): 32~37

[15] Flügge S. *Practical Quantum Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1974. Chapter Ⅱ. Problems. 30, 35, 38, 39, 40

Algebraic Recursion Formulas for Perturbation Calculation of Propagation Characteristics of Graded-Index Optical Waveguides

She Shouxian　Wang Jian　Zhang Sijiong　Wu Liu

(*Department of Physics*, *Northern Jiaotong University*, *Beijing* 100044)

(Received 4 December 2000; revised 15 January 2001)

Abstract: Algebraic recursion formulas for perturbation calculation of successive order approximate propagation constants of graded-index profile planar optical waveguides are derived by the use of hypervirial theorem (HVT) and Hellmann-Feynman theorem (HFT) in quantum mechanics. Algebraic formulas for calculation of modal field with given approximate value of propagation constant are also presented. Numerical results for several typical examples are given. The merit of the present method is that it can be applied to straightforward calculation of propagation constants and the corresponding modal fields in perturbation order.

Key words: graded-index optical waveguides; propagation constant; modal fields; perturbation method; algebraic recursion formulas