

文章编号 : 0253-2239(2002)01-0014-05

# 单轴晶体 I 类匹配相位畸变光束二次谐波理论分析

侯 静<sup>1)2)</sup> 张雨东<sup>1)</sup> 姜文汉<sup>1)</sup> 凌 宁<sup>1)</sup>

(1), 中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)  
(2), 国防科技大学理学院, 长沙 410073

摘要 : 理论上研究了单轴晶体 I 类匹配时相位畸变光束二次谐波的转换, 其中考虑了衍射、离散效应, 给出了相位畸变小信号解。在此基础上, 以 KDP 晶体为例分析并给出了有像差高斯光束的转换效率随晶体长度的变化规律。对于任意光强分布和有任意相位畸变光束的谐波转换也是同样适用的。

关键词 : 二次谐波 ; 相位畸变 ; 小信号解

中图分类号 : O734+.1 文献标识码 : A

## 1 引 言

1961 年, Franken 等<sup>[1]</sup>首次实现了激光的二次谐波转换, 迄今人们已对此进行了广泛的研究。成熟的理论都以平面波、高斯光束为研究基础, 但实际情况下光束都不可能这样理想, 非理想平面波或某种经整形后的特定光束二次谐波转换后的光束质量如何, 也是实际工作中常常需要了解的, 因此相位畸变光束二次谐波的理论研究是非常有价值和实际意义的。对于高斯光束人们通过引入更多参数、修改平面波模型的方法来研究, 但更一般化的情况却无法通过同样方法处理。Eimerl 等<sup>[2]</sup>建立了单轴晶体二次谐波的傍轴理论, 用于研究寻常波与非寻常波在晶体中的传播, 并对其进行了数值模拟, 但计算主要建立在平面波上, 对衍射、离散效应等作了重点考虑。钱列加等<sup>[3]</sup>应用空间频谱方法处理相位畸变光束的非线性耦合问题, 也建立了一个相位畸变光束谐波转换的理论模型, 但并未给出解的形式。

本文在 Eimerl 等人建立的二次谐波的傍轴理论基础研究了单轴晶体 I 类匹配时, 考虑衍射、离散等效应, 基波的相位畸变引起光束全口径范围内的波矢匹配的变化对谐波产生的影响, 首先只考虑基波相位畸变对二次极化波的产生和二次谐波传播过程的影响, 给出了小相位畸变小信号解, 在此基础上, 考虑了二次谐波传播过程中因相位畸变引起的光束口径内各处折射率的差异, 用微扰法进一步求得相位畸变小信号解。本文分析并给出了相位畸变

高斯光束的转换效率随晶体长度变化的曲线。对于任意光强分布和有任意相位畸变光束的谐波转换也是同样适用的。

## 2 理论模型

晶体的主轴坐标系和光线传输坐标系如图 1 所示。

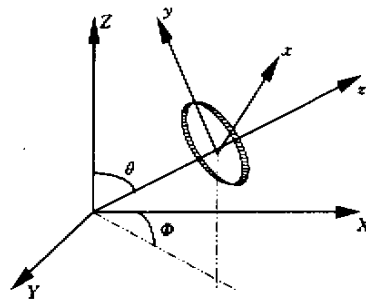


Fig.1 Principal dielectric axes XYZ and 'propagation system' axis xyz for a uniaxial crystal (z is direction of propagation, Z is optic axis)

电场强度  $E$  在晶体主轴坐标系 XYZ 中可写为

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A_i(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + C.$$

对于 o 光, 在光线传播坐标系中,

$$A_x(x, y, z) = F_x(x, y, z) \exp[in_{o,\omega} \omega z / c],$$

$$A_y(x, y, z) = F_y(x, y, z) \exp[in_{o,\omega} \omega z / c].$$

对于 e 光, 在光线传播坐标系中,

$$A_x(x, y, z) = H_x(x, y, z) \exp[in_{e,\omega}(\theta) \omega z / c],$$

$$A_y(x, y, z) = H_y(x, y, z) \exp[in_{e,\omega}(\theta) \omega z / c],$$

$$A_z(x, y, z) = H_z(x, y, z) \exp[in_{e,\omega}(\theta) \omega z / c],$$

式中  $c$  为光速。在近轴近似和慢变幅近似下, I 类匹配 o 光复振幅  $F$  和 e 光复振幅  $H$  所满足:

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F + 2in_{o,\omega} \frac{\omega}{c} \frac{\partial F}{\partial z} = - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\chi} F^* H \exp(i\Delta kz), \\ & \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + [1 - \beta_{2\omega}(\theta) \sin^2 \theta] \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + 2in_{e,2\omega}(\theta) \frac{2\omega}{c} [1 - \beta_{2\omega}(\theta) \cos^2 \theta]^{1/2} \left[ \frac{\partial H}{\partial z} + \rho_{2\omega}(\theta) \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \\ & \quad - \frac{(2\omega)^2}{2c^2} \bar{\chi} F^2 \exp(-i\Delta kz), \\ & \frac{1}{n_{e,\omega}^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}, \quad \Delta k = \frac{2\omega}{c} [n_{e,2\omega}(\theta) - n_{o,\omega}], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $\beta_{2\omega}(\theta) = 1 - \frac{n_{e,2\omega}^2(\theta)}{n_o^2}, \quad \rho_{2\omega}(\theta) = \frac{-\beta_{2\omega}(\theta) \sin 2\theta / 2}{1 - \beta_{2\omega}(\theta) \cos^2 \theta}, \quad \bar{\chi} = -\chi \sin \theta \sin 2\phi.$

由于考虑的是相位畸变光束的倍频,基波  $F(x, y, z) = A(x, y, z) \exp[i\Phi(x, y, z)]$ , 这里  $\Phi(x, y, z)$  是相位因子, 随  $x, y, z$  变化而变化, 则  $\chi(x, y), n_e(x, y), \Delta k(x, y), \beta(x, y), \rho(x, y), \bar{\chi}(x, y)$  等都是光束全口径内随波前变化而变化的。可见, 分析求解一般相位畸变光束的倍频过程是相当复杂的。

### 3 小信号解

#### 3.1 小相位畸变小信号解

如果考虑相位畸变不严重的情况, 即相位因子

$\Phi(x, y, z)$  在  $x, y$  方向的变化引起  $\chi(x, y)$  的变化很小, 以至于  $n_e$  可近似认为在全口径范围内不变, 在这种近似下, 实质是只考虑基波相位畸变对二次极化波的产生(相位畸变对光束口径内有效非线性系数大小分布的影响)和二次谐波传播过程的影响, 而忽略了二次谐波在晶体中传播因相位畸变引起的光束口径内各处折射率的差异, 及由其导致的光束口径内各处传播速度的不同。

又因

$$[1 - \beta_{2\omega} \cos^2 \theta]^{1/2} \approx 1, \quad 1 - \beta_{2\omega} \sin^2 \theta \approx 1,$$

则(1)式简化为

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F + 2in_{o,\omega} \frac{\omega}{c} \frac{\partial F}{\partial z} = - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\chi} F^* H \exp(i\Delta kz), \\ & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H + 2in_{e,2\omega} \frac{2\omega}{c} \left[ \frac{\partial H}{\partial z} + \rho_{2\omega}(\theta) \frac{\partial H}{\partial y} \right] = - \frac{(2\omega)^2}{2c^2} \bar{\chi} F^2 \exp(i\Delta kz). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

将谐波方程两边作傅里叶变换:

$$\begin{aligned} & 2in_{e,2\omega} \frac{2\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} H(f_x, f_y, f_z) - [f_x^2 + f_y^2 + 2n_{e,2\omega} \frac{2\omega}{c} \rho_{2\omega}(\theta) f_y] H(f_x, f_y, f_z) = \\ & \quad - \frac{(2\omega)^2}{2c^2} P(f_x, f_y, f_z) \exp(-i\Delta kz), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $P(f_x, f_y, f_z) = \mathcal{F}[\bar{\chi}(x, y) F^2(x, y, z)]$ ,  $\mathcal{F}$  表示傅里叶变换。 $f_x, f_y$  为空间频率域中的分量。(3)式是带参变量  $f_x, f_y$  的  $H(f_x, f_y, f_z)$  关于  $z$  的一阶常微分方程, 其通解为:

$$H(f_x, f_y, f_z) = - \frac{\omega}{2in_{e,2\omega} c} \exp[-iA_f(f_x, f_y)z] \int \exp\{-iz[\Delta k - A_f(f_x, f_y)]\} P(f_x, f_y, f_z) dz + C. \quad (4)$$

其中

$$A_f(f_x, f_y) = \frac{f_x^2 + f_y^2}{2n_{e,2\omega}(2\omega/c)} + \rho_{2\omega}(\theta) f_y.$$

考虑二次谐波小信号的情况, 即  $F(x, y, z) = F(x, y, 0)$  则

$$P(f_x, f_y, f_z) = P(f_x, f_y, 0) = \bar{\chi}(x, y) F^2(x, y, 0)$$

故  $P(f_x, f_y, f_z) = P(f_x, f_y, 0)$ , 代入(4)式有

$$H(f_x, f_y, f_z) = - \frac{\omega}{2in_{e,2\omega} c} \frac{\exp\{-[\Delta k - A_f(f_x, f_y)z]\}}{\Delta k - A_f(f_x, f_y)} P(f_x, f_y, 0) \exp[-iA_f(f_x, f_y)z] + C..$$

由初始边界条件  $H(x, y, 0) = 0$  得:  $C = \frac{\omega}{2in_{e,2\omega} c} \frac{P(f_x, f_y, 0)}{\Delta k - A_f(f_x, f_y)}$ 。故

$$\begin{aligned}
 H(f_x, f_y, z) &= -\frac{\omega}{2in_{e,2\omega}c} \frac{1 - \exp\{-iz[\Delta k - A_f(f_x, f_y)]\}}{\Delta k - A_f(f_x, f_y)} P(f_x, f_y, 0) \exp[-iA_f(f_x, f_y)z] = \\
 &= \frac{\omega}{2in_{e,2\omega}c} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta k - A_f(f_x, f_y)}{2}z\right] \exp\left[-iz\frac{\Delta k - A_f(f_x, f_y)}{2}\right] P(f_x, f_y, 0) \exp[-iA_f(f_x, f_y)z] = \\
 &= \frac{\omega}{2in_{e,2\omega}c} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta k_{\text{eff}}(f_x, f_y)z}{2}\right] \exp\left[-i\frac{\Delta k_{\text{eff}}(f_x, f_y)z}{2}\right] P(f_x, f_y, 0) \exp[-iA_f(f_x, f_y)z], \quad (5)
 \end{aligned}$$

其中  $\Delta k_{\text{eff}}(f_x, f_y) = \Delta k - A_f(f_x, f_y)$  称为等效相位匹配因子。基波的相位畸变和离散效应不仅影响转换过程中全口径内的相位匹配,而且也决定了谐波在晶体中的传播规律。从(5)式可以看出,  $H(f_x, f_y, z)$  在形式上大部分与一维平面波小信号解类同,但多出一项因子  $\exp(-iA_f z)$ ,这是因为三维耦合方程组考虑了衍射效应。 $\exp(-iA_f z)$  类似于自由空间光波衍射角谱理论中的角谱传播因子,其物理意义是反映了谐波在晶体内频域的衍射传播规律。在自由空间光传播,观察面上的场分布等于各惠更斯子波源发出的带有不同权重的球面子波的相干叠加;在非线性晶体中,观察面上的场分布等于子波源发出的带有不同权重的椭球面子波的相干叠加,且权重因子的大小与基波的光强分布、相位分布、晶体的结构类型、极化过程等密切相关。

将(5)式转化到空间域,有

$$\begin{aligned}
 H(x, y, z) &= \\
 \iint H(f_x, f_y, z) \exp[i(f_x x + f_y y)] df_x df_y. \quad (6)
 \end{aligned}$$

很明显,对无像差的平面波  $f_x = f_y = 0$  则有

$$H(x, y, z) = -\frac{\omega}{2in_{e,2\omega}c} \frac{1 - \exp(-i\Delta kz)}{\Delta k} P(x, y, 0),$$

结论与经典的二次谐波的理论相同。

当基波相位发生畸变,  $H(x, y, z)$  取决于相位畸变的具体情况,波前畸变的空间频率不同,则谐波转化效率不同。如果基波仅有倾斜像差时,从(5)式看出  $\Delta k_{\text{eff}} = \Delta k - A_f$  为常数,与基波入射角有一变化等效,显然,这也是符合实际的。总之基波存在相位畸变时,谐波光强分布、相位分布和转化效率都会发生变化。

### 3.2 相位畸变小信号解

如果考虑进由于相位畸变引起  $n_e$  在全口径范围内的变化,则  $n'_{e,2\omega} = n'_{e,2\omega}(x, y)$ ,  $\Delta k' = \Delta k(x, y)$  等都是在光束全口径内随波前变化而变化的。在不考虑离散效应的情况下,用一阶微扰法,设  $H(x, y) = H(x, y) + \delta H(x, y)$ ,  $n'_{e,2\omega}(x, y) = n_{e,2\omega} + \delta n_{e,2\omega}(x, y)$ ,  $\Delta k'(x, y) = \Delta k + \delta k(x, y)$ , 代入(1)式中,忽略二阶以上的微扰项,则有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) H + 2in_{e,2\omega} \frac{2\omega}{c} \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{(2\omega)^2}{2c^2} \chi F^2 \exp(-i\Delta kz), \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \delta H + 2in_{e,2\omega} \frac{2\omega}{c} \frac{\partial \delta H}{\partial z} = -\frac{(2\omega)^2}{2c^2} \chi F^2 \exp(-i\Delta kz) [\exp(-i\delta kz) - 1] - 2i\delta n_{e,2\omega} \frac{2\omega}{c} \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (8)$$

以(7)式代入(8)式,用前述同样方法并忽略小项,解(8)式可得

$$\begin{aligned}
 \delta H(f_x, f_y, z) &= \frac{\omega z}{2in_{e,2\omega}c} \operatorname{sinc}\left[\frac{(\Delta k - A_f)z}{2}\right] \exp\left[-i\frac{(\Delta k - A_f)z}{2}\right] \delta P(f_x, f_y, z) \exp(-iA_f z) = \\
 &= \frac{\omega z}{2in_{e,2\omega}c} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta k_{\text{eff}} z}{2}\right] \exp\left[-i\frac{\Delta k_{\text{eff}} z}{2}\right] \delta P(f_x, f_y, z) \exp(-iA_f z), \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中  $A_f(f_x, f_y) = \frac{f_x^2 + f_y^2}{2n_{e,2\omega}(2\omega/c)}$ ,  $\delta P(f_x, f_y, z) = \mathcal{F}[\delta P(x, y, z)]$  而

$$\delta P(x, y, z) = \bar{\chi}(x, y) F^2(x, y, z) \left\{ \exp[i\delta k(x, y)z] - 1 - \frac{\delta n_{e,2\omega}(x, y)}{n_{e,2\omega}} \right\}.$$

综上所述,我们得到

$$\begin{aligned}
 H(f_x, f_y, z) &= H(f_x, f_y, z) + \delta H(f_x, f_y, z) = \\
 &= \frac{\omega z}{2in_{e,2\omega}c} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k_{\text{eff}} z}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\Delta k_{\text{eff}} z}{2}\right) [P(f_x, f_y, 0) + \delta P(f_x, f_y, z)] \exp[-iA_f(f_x, f_y)z]. \quad (10)
 \end{aligned}$$

同样 经过傅里叶反变换 有

$$H(x, y, z) = \iint H(f_x, f_y, z) \exp[i(f_x x + f_y y)] df_x df_y.$$

由此 我们得到小信号情况下相位畸变光束的解。

## 4 举例分析

从(5)式、(10)式都可反推回原平面波的小信号解。通过以上方法可分析高斯光束相位受到调制的光束的小信号谐波转换,还可以分析任意光强分布和任意相位畸变光束的小信号谐波转换。例如,对 KDP 倍频晶体,入射面为  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ ,高斯光束半径为  $w_0 = 0.5\text{ cm}$ ,相位匹配为 I 类,  $\theta = 41.19^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ ,非线性系数  $\chi = -0.78\text{ pm/V}$ 。基波波长为  $1054\text{ nm}$ ,为满足小信号的要求,峰值功率密度取为  $1\text{ MW/cm}^2$ , $x$ 、 $y$  方向均为高斯分布,  $A(x, y) = A_0 \exp[-(x^2 + y^2)/w_0^2] \exp[-i2\pi\Phi(x, y)]$ 。我们对有一定相位失配 ( $\theta = 41.15^\circ$ ) 对基波有不同像差时的谐波转化效率进行了计算。如图 2 所示。

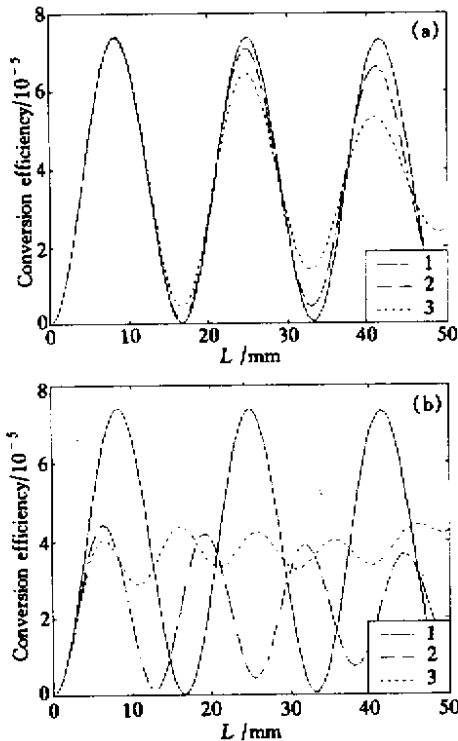


Fig.2 Conversion efficiency of second-harmonic generation. (a) Pump beam with defocus; (b) Pump beam with aberration  $\Phi(x, y) = 0.5 \sin(2\pi T_y)$

图 2(a)中曲线 1 是无像差时转换效率随晶体长度的变化而变化的情况,与经典的结论  $\eta \propto L^2 \text{sinc}^2(\Delta kL)$  相符合,曲线 2、3 分别是基波有离焦像差  $\Phi(x, y) = \sqrt{3}[\chi(x^2 + y^2) - 1]$  且峰谷值分别

为 0.5、1 的情况,图 2(b)中曲线 1 相同于图 2(a)中曲线 1,曲线 2、3 分别是基波有像差  $\Phi(x, y) = 0.5 \sin(2\pi T_y)$  且  $T$  值分别为 0.1、0.2 的情况。

可见,由于每一种像差在光束全口径内带来的相位失配不同,所以对谐波的转换效率有着不同的影响效果,曲线的周期、峰值等都有不同程度的变化。像差的空间频率越高,对于曲线影响越大,同样像差,晶体长度越长,对于曲线影响越大,峰值比经典平面波的情况有所下降,而谷值却有所上升。主要原因是:倍频过程中,基频光进入非线性光学晶体,在光路的每一位置都将产生二次极化波,这些极化波发出与之相同频率的二次谐波。由于晶体色散的原因,晶体中二次谐波总是跟不上二次极化波的传播。二次谐波相互干涉的结果,决定了实验中观察到的二次谐波的强度,这个强度与二次谐波的相位差有关。相位差为零时即相位匹配,则二次谐波不断加强;当相位差为  $180^\circ$  时,不会有任何输出。相位畸变的基波产生相位畸变的二次谐波,由于晶体色散又导致不同位置产生的二次谐波在传播过程中相位发生不同的变化,从而导致全口径相位差不一致,相干性下降。传播距离越长相位发生的变化越大,相位差不一致性越大,相干性下降越多,因此,最后干涉结果使得二次谐波的输出强度起伏的峰值比经典平面波的情况有所下降,而谷值却有所上升,如图 2 的情况。空间频率越高时,光束全口径上相位在传播过程中发生的变化越复杂,因而像差的空间频率越高,对于曲线形态影响越大。

结论 从基本的三波相互作用方程出发,研究了相位畸变光束的二次谐波,给出了相位畸变光束小信号解,这对相位畸变光束二次谐波的理论分析、数值模拟和实验设计,对某些特定光强分布和相位畸变的光束的谐波转换分析都是十分有意义的,对于大信号和 II 类匹配的情况,解析解包括小信号情况都是很难得到的,需用数值分析和计算机模拟的方法对三波相互作用耦合方程组进行计算。

## 参 考 文 献

- [1] Franken P A, Hill A E, Perters C W *et al.*. Generation of optical harmonic. *Phys. Rev. Lett.*, 1961, 7(1):118 ~ 123
- [2] Eimerl D, Auerbarch J M. Paraxial wave theory of second and third harmonic generation in uniaxial crystal. I. Narrowband pump field. *J. Modern Optics*, 1995, 42(5):1037 ~ 1067

[3] Qian Liejia, Zhu Baoqiang, Zhang Zhuhong *et al.*.  
Harmonic generation of phase aberrated laser. *Acta Optica*

*Sinica*(光学学报), 1995, 15(4):417~420(in Chinese)

## Second-Harmonic Generation of Phase Aberrated Laser Beams by Type I Phase Matching in Uniaxial Crystals

Hou Jing<sup>1)2)</sup> Zhang Yudong<sup>1)</sup> Jiang Wenhan<sup>1)</sup> Ling Ning<sup>1)</sup>

(1), *Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209*

(2), *Institute of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073*

(Received 26 October 2000; revised 15 January 2001)

**Abstract:** The second-harmonic generation theory of phase aberrated laser beam in uniaxial crystals is discussed, including the effects of diffraction and transverse walkoff. The solutions of the undepleted-pump approximation is given. The conversion efficiency of Gauss beams with aberrations is calculated according to the solutions. The solution can be used under any assumptions of intensity distribution and phase aberration of the pumping wave.

**Key words:** second-harmonic generation; phase aberration; solution under the small signal condition