第 21 卷 第 9 期
2001 年 9 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol.21, No.9
September, 2001

文章编号: 0253-2239(2001)09-1065-03

# 像差与斯特列耳比的极限曲线

侯 静[1),2)] 姜文汉[1)] 凌 宁[1)]

(1), 中国科学院光电技术研究所, 成都 610209
2), 国防科技大学理学院, 长沙 410073)

**摘要**: 通过建立离散波面像差函数与斯特列耳比的最优化问题数学模型,分析了二者的关系,利用最优化方法数值求解得到波面像差峰谷值与斯特列耳比最小值以及波面像差均方根值与斯特列耳比最小值的极限曲线。

**关键词**: 像差;斯特列耳比;最优化

**中图分类号**: O435 **文献标识码**: A

## 1 引 言

斯特列耳(Strehl)于 1894 年提出了一个判断光学系统质量的指标,即用有像差时的点衍射图形中最大亮度与无像差时最大亮度之比来表示系统成像质量,该比值被称为斯特列耳比(SR)。描述波面像差时,常用波面像差峰谷值(PV)和均方根值(RMS)来表示。瑞利于 1879 年提出"实际波面和参考波面之间的最大波面像差不超过 $\lambda/4$ 时,此波面可看作是无缺陷的",这被称为瑞利判据,即当 $PV<\lambda/4$ 时,$SR>0.8$。瑞利判据中有特征意义的是波面像差的峰谷值,但这是不严密的,因为它不考虑波面上的缺陷部分在整个面积中所占的比例。如占整个波面的比值近于零的缺陷可引起很大的局部像差,这按瑞利判据是不允许的,而实际对成像无明显的影响;而大面积的小值像差,也可能引起像质的严重下降。马雷夏尔 1947 年研究了波面像差均方根值与斯特列耳比的关系,得到当 $RMS<\lambda/14$ 时,$SR>0.8$的结论,这被称为马雷夏尔判据。具有相同峰谷值或均方根值的不同波面像差可以有不同的斯特列耳比,那么产生特定大小的斯特列耳比所需最小的波面像差峰谷值或均方根值是多少?特定大小的波面像差峰谷值或均方根值产生的最小斯特列耳比又是多少?文献[1]中利用对二值化波面像差的特例得到波面像差峰谷值与斯特列耳比最小值以及均方根值与斯特列耳比最小值的关系。本文在此基础上,离散化波面像差函数,通过建立波面像差与斯特列耳比的最优化问题数学模型,分析了二者的关系,利用最优化方法数值求解得到波面像差峰谷值与斯特列耳比最小值以及均方根值与斯特列耳比最小值的极限曲线。曲线上各点的波面像差函数可能在物理上不存在,但曲线表明了一种极限情况,实际存在的波面像差的峰谷值或均方根值与斯特列耳比的关系都限制在极限情况以内。

## 2 理论与数学模型

设入射光波为 $E=A(x,y)\exp[\mathrm{i}\Phi(x,y)]$,斯特列耳比的定义为

$$SR=\text{实际峰值强度}/\text{衍射极限峰值强度}=\left|\frac{\iint A(x,y)\exp[\mathrm{i}\Phi(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint A(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right|^2. \tag{1}$$

可以将斯特列耳比的表达式改写为

$$SR=\iiiint A(x_1,y_1)A(x_2,y_2)\times \exp\{[\Phi(x_1,y_1)-\Phi(x_2,y_2)]\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2, \tag{2}$$

其中设 $A(x,y)=\begin{cases}1 & \text{光瞳 S 内},\\ 0 & \text{其他},\end{cases}$,

光瞳 S 总面积为 1。文献[1]中假设在像差函数为二值化的特殊情况下:

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in\alpha,\\ 2\pi w & (x,y)\in(1-\alpha),\end{cases}$$

其中 $w$ 以波长数表示(以下波面像差峰谷值、均方根值也以波长数表示),$(x,y)\in\alpha$ 表示满足条件的 $(x,y)$ 占光瞳 S 总面积的比例,由(2)式可得到

$$SR=(1-\alpha)^2+\alpha^2+2\alpha(1-\alpha)\cos 2\pi w,$$

则有 $SR_{\min}=0.5(\cos 2\pi w+1)$,并以此为基础展开

收稿日期:2000-05-30;收到修改稿日期:2000-07-28

了分析。接下来分析是否有可以得到更小的 $SR_{min}$ 的其它像差函数存在,作者始终假设

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in(0.5-\alpha),\\ 2\pi w_1 & (x,y)\in\alpha(\text{其中 } w_1<w_2,)\\ 2\pi w_2 & (x,y)\in 0.5,\end{cases}$$

或

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in 0.5\\ 2\pi w_1 & (x,y)\in\alpha(w_1<w_2),\\ 2\pi w_2 & (x,y)\in(0.5-\alpha).\end{cases}$$

为什么可以始终假设有一区域所占光瞳面积的比例为 0.5,文献[1]的作者没有加以说明。实质上

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in\alpha_1,\\ 2\pi w_1 & (x,y)\in\alpha_2(w_1<w_2),\\ 2\pi w_2 & (x,y)\in(1-\alpha_1\alpha_2).\end{cases}$$

才是有普遍意义的假设,我们推广之,将任意形式的 $\Phi(x,y)$ 像差函数离散化:

$$\Phi_n(x,y)=\begin{cases}2\pi w_1 & (x,y)\in\alpha_1,\\ 2\pi w_2 & (x,y)\in\alpha_2,\\ \cdots\cdots\cdots & \\ 2\pi w_n & (x,y)\in\alpha_n\end{cases}$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1. \tag{4}$$

当 $n=3$,$w_1=0$ 时,(4) 式即为(3) 式;当 $n\to\infty$ 时,$\Phi_n(x,y)\to\Phi(x,y)$,则

$$SR_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\cos 2\pi(w_i-w_j);$$

当 $n\to\infty$ 时,$SR_n\to SR$。

求解在(3) 式或(4) 式条件下波面像差峰谷值等于常数或波面像差均方根值等于常数时斯特列耳比的最小值,都是属于具有非线性约束条件的最优化问题。

### 2.1 有确定波面像差峰谷值的情况

当有确定波面像差峰谷值等于常数 $C$ 时,问题的数学模型为:

设
$$w_1=\min(w_1,w_2,\cdots,w_n),$$
$$w_n=\max(w_1,w_2,\cdots,w_n)$$

目标函数

$$\min SR_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\cos 2\pi(w_i-w_j), \tag{5}$$

约束条件

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1,$$
$$w_n-w_1=C,\quad \alpha_1>0\quad \alpha_n>0.$$

### 2.2 有确定波面像差均方根值的情况

当有确定波面像差均方根值等于常数 $C$ 时,问题的数学模型为:

波面像差的均值为

$$\bar{w}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i,$$

目标函数

$$\min SR_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\cos 2\pi(w_i-w_j), \tag{6}$$

约束条件

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(w_i-\bar{w})^2=C^2.$$

## 3 数值求解结果

对以上最优化问题(5)式、(6)式进行数值求解,为了方便,设 $-0.5\leqslant w_i\leqslant 0.5$,$i=1,2,\cdots,n$,结果分别如图 1、2 所示。从求解结果可以看出,波面像差峰谷值与斯特列耳比最小值以及均方根值与斯特列耳比最小值的极限曲线有类似的变化规律。$SR\approx 0.8$ 对应的 $PV=0.1476\lambda$,$RMS=0.0738\lambda$,与文献[1]由二值化像差函数得到的结果相同。

图 1 中曲线上 $PV=0.1476\lambda$,$SR_{min}\approx 0.8$,即是说任意像差满足 $PV<0.1476\lambda$,则有 $SR>0.8$,而 $PV=0.25\lambda$,则 $SR_{min}\approx 0.5$,这似乎与瑞利判据有所违背。这是因为二者针对的像差有所不同,这里是泛指任意类型的像差,但有固定的波面像差峰谷值,其可能产生的最小斯特列耳比;而瑞利判据是仅针对初级球面像差而使得出射光瞳处的波阵面偏离高斯参考球不到 $0.25\lambda$ 的情况,故有 $SR>0.8$。瑞利判据只是图 1 所示极限曲线限制内的一种情况。

图 2 中 $RMS=0.0738\lambda$,$SR_{min}\approx 0.8$,这与马雷夏尔判据相差不大。马雷夏尔判据是假设像差充分小的情况下,即 $RMS\leqslant 0.25\lambda$ 的前提下,近似得到

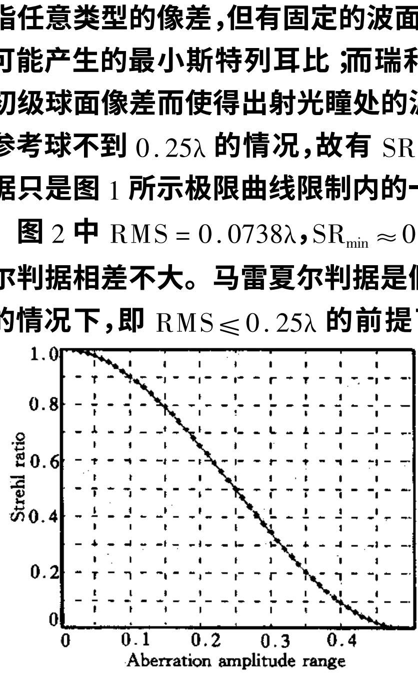


Fig. 1 PV value versus minimum of Strehl ratio

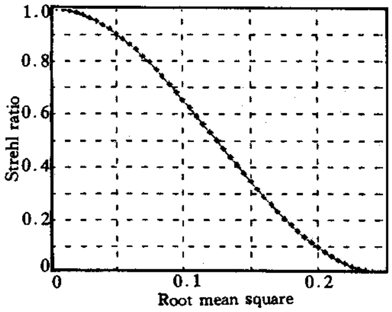


Fig.2　RMS value versus minimum of Strehl ratio

$RMS < \lambda/14$ 时，$SR > 0.8$。应该说通过最优化求解得到的结果与马雷夏尔判据相比更精确。

达到极限曲线的像差物理上也许是不存在的，实际的波面像差函数在图中的对应点都位于极限曲线的上方。对像差函数作任意的限定后得到的曲线也一定都位于极限曲线上方，至多与之重合。例如当均值 $|\bar{w}|$ 确定时，即以上最优化问题的约束条件增加"$\bar{w}$ 等于常数 $C_0$"，数值仿真结果如图 3 所示。

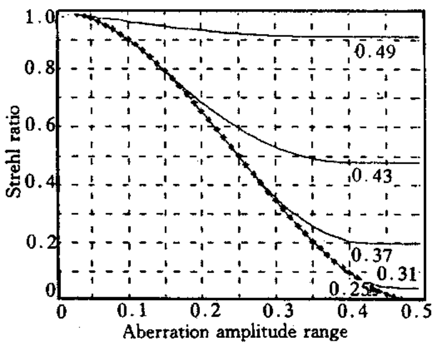


Fig.3　PV aberration value versus minimum of Strehl ratio, when the mean values of aberrations are constants 0.49, 0.43, 0.37, 0.31, 0.25 etc. (solid line). Star: ultimate curve

图 4 表示了波面像差 $\Phi(x, y)$ 为高斯分布的情况，$SR = \exp[-(2\pi RMS)^2]$[3] 所得曲线也位于极限曲线的上方。

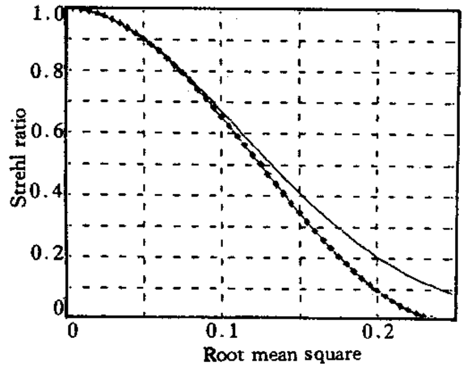


Fig.4　Aberration $\Phi(x, y)$ has Gaussian distribution, RMS value versus minimum of Strehl ratio. solid line: Gaussian distribution; star: ultimate curve

**结论**　建立波面像差与斯特列耳比的最优化问题数学模型，利用最优化方法数值求解得到波面像差峰谷值与斯特列耳比最小值以及均方根值与斯特列耳比最小值的极限曲线，与用二值化像差函数分析相比在物理与数学上都要更严密、更严谨。极限曲线的得到对于分析光学系统的性能与设计光学系统都会有帮助。

## 参　考　文　献


[1] van den Bos A. Aberration and the Strehl ratio. *J. Opt. Soc. Am.* (*A*), 2000, **17**(2): 356 ~ 358

[2] van den Bos A. Rayleigh wave-front criterion: Comment. *J. Opt. Soc. Am.* (*A*), 1999, **16**(9): 2307 ~ 2309

[3] 玻恩 M，沃尔夫著 E. 光学原理(下册). 黄乐天，陈熙谋，陈秉乾译校. 北京 科学出版社，1981. 616 ~ 617


# Ultimate Curves of Aberration and Strehl Ratio


Hou Jing[1),2)]　Jiang Wenhan[1)]　Ling Ning[1)]

(1), *Institute of Optics and Electronics*, *The Chinese Academy of Sciences*, *Chengdu* 610209
2), *Institute of Science*, *National University of Defense Technology*, *Changsha* 410073)


(Received 30 May 2000; revised 28 July 2000)


**Abstract:** Mathematic optimization models of discrete aberration functions and Strehl ratio have been set up, and the relationships between them are analyzed. A quantitative study provides ultimate curve of peak-to-valley aberration value and Strehl ratio. Ultimate curve of root-mean-square aberration value and Strehl ratio is presented.


**Key words:** aberration; Strehl ratio; optimization