第 21 卷 第 8 期
2001 年 8 月
光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA
Vol. 21, No. 8
August, 2001

文章编号:0253-2239(2001)08-0929-04

有限维希尔伯特空间非简谐振子广义相干态

于国臣 薄夫军 王连水 马中波
(解放军济南医学高等专科学校数理教研室,济南 250022)

摘要: 在有限维希尔伯特空间中构造了非简谐振子的广义相干态,并研究了其量子统计特性。详细地讨论了该量子态的压缩效应和反聚束效应,得到了出现压缩的条件并给出了反聚束效应与有限维希尔伯特空间维数关系的数值计算结果。理论计算表明该量子态存在压缩效应和反聚束效应,这与通常的无限维空间中的广义相干态是完全不同的。

关键词: 有限维希尔伯特空间;广义相干态;压缩效应;反聚束效应
中图分类号:O431.2　　**文献标识码:**A

1 引　言

近几年来,对非简谐振子广义相干态和奇偶广义相干态的量子统计特性进行了系统的研究[1~4]。人们发现,非简谐振子广义相干态是最小测不准态并且是相干的,非简谐振子奇偶广义相干态都可以出现压缩和反聚束现象。本文的目的是把这方面的研究推广到有限维希尔伯特空间中去。

按文献[5],非简谐振子无量纲形式的哈密顿算符为:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{A}{x^2} \quad (A > 0), \tag{1}$$

与之对应的非简谐振子势场中粒子的自然坐标算符和自然动量算符分别为:

$$Q = x^2 - H, \quad P = \frac{1}{2i}\left(x\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}x\right), \tag{2}$$

它们满足对易关系

$$\left.\begin{aligned} [H,Q] &= -2iP, \\ [H,P] &= 2iQ, \\ [Q,P] &= 2iH. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

引入阶梯算符

$$b_{\pm} = \frac{1}{2}(Q \mp iP), \tag{4}$$

可得

$$[H, b_{\pm}] = \pm 2b_{\pm}, \qquad [b_-, b_+] = H, \tag{5}$$

这正是 $SU(1,1)$ 李代数。

设 $|n\rangle$ 为非简谐振子的能量本征态,由(5)式可以推出[1]

$$\left.\begin{aligned} H|n\rangle &= (2n + 2k)|n\rangle, \\ b_-|n\rangle &= \sqrt{n(n + 2k - 1)}\,|n - 1\rangle, \\ b_+|n\rangle &= \sqrt{(n + 1)(n + 2k)}\,|n + 1\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中

$$k = (1 \pm \sqrt{A + 1/4})/2^{[1,6]},$$

本文取

$$k = (1 + \sqrt{A + 1/4})/2.$$

由(6)式可以把本征态 $|n\rangle$ 表示为

$$|n\rangle = \frac{b_+^n}{\sqrt{n!(2k)_n}}|0\rangle, \tag{7}$$

其中

$$(2k)_n = (2k)(2k + 1)\cdots(2k + n - 1) = \frac{\Gamma(2k + n)}{\Gamma(2k)}.$$

$\Gamma(z)$ 是第二类欧勒积分(Γ 函数)。广义相干态定义为湮灭算符 b_- 的本征态

$$b_-|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle, \tag{8}$$

不难算出

$$|\beta\rangle = [F(|\beta|^2)]^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!(2k)_n}}\beta^n|n\rangle, \tag{9}$$

其中

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(2k)_n}.$$

2 有限维希尔伯特空间非简谐振子的广义广义相干态

按文献[6,8],引入$(2s + 1)$-维希尔伯特空间

$$\sum\nolimits_{2s+1} = \{|n\rangle, n = 0,1,2,\cdots,2s\},$$

收稿日期:2000-01-04;收到修改稿日期:2000-05-15

其中 s 为任意正整数。在这空间中，非简谐振子的湮灭和产生算符为

$$\left.\begin{aligned} b_- &= \sum_{n=1}^{2s} \sqrt{n(n+2k-1)}\,|n-1\rangle\langle n|, \\ b_+ &= \sum_{n=0}^{2s-1} \sqrt{(n+1)(n+2k)}\,|n+1\rangle\langle n|, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

满足下面的对易关系

$$[b_-,b_+] = \sum_{n=1}^{2s} 2(n+k)|n\rangle\langle n| - (2s+1)(2s+2k)|2s\rangle\langle 2s|, \tag{11}$$

它们对福克(Fock)态的作用为

$$\left.\begin{aligned} & b_-\,|n\rangle = \sqrt{n(n+2k-1)}\,|n-1\rangle, \\ & b_-\,|0\rangle = 0, \\ & b_+\,|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2k)}\,|n+1\rangle, \\ & b_+\,|2s\rangle = 0, \\ & |n\rangle \in \textstyle\sum_{2s+1}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

定义有限维希尔伯特空间非简谐振子的广义相干态

$$|\beta,s\rangle = [F(R,2s)]^{-1/2} \sum_{n=0}^{2s} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!(2k)_n}}|n\rangle, \tag{13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} F(x,m) &= \sum_{n=0}^{m} \frac{x^{2n}}{n!(2k)_n}, \\ \beta &= R\exp(\mathrm{i}\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

容易算出两个不同相干参量的有限维希尔伯特空间非简谐振子的相干态的内积为

$$\langle\beta,s|\beta',s\rangle = \frac{F(\sqrt{\beta^*\beta'},2s)}{\sqrt{F(R,2s)F(R',2s)}}, \tag{15}$$

上式在一般情况下并不为零，所以该广义相干态仍是非正交的，但是采用密度算符的方法可以证明它是完备的[4]。在广义相干态 $|\beta,s\rangle$ 中，粒子处于第 n 个能级的几率为

$$P_n(R,s) = |\langle n|\beta,s\rangle|^2 = \frac{R^{2n}}{n!(2k)_n F(R,2s)}, \tag{16}$$

其密度算符为 $\rho = \sum_{n=0}^{2s} P_n|n\rangle\langle n|$， (17)

其中

$$P_n = \iint P_n(\beta,s)\,\mathrm{d}^2\beta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\infty} R\,\mathrm{d}R\,\frac{|\beta|^{2n}}{n!(2k)_n F(R,2s)} = \frac{2\pi}{n_1(2k)_n}\int_0^{\infty}\frac{R^{2n+1}}{F(R,2s)}\mathrm{d}x, \tag{18}$$

所以

$$\rho = \sum_{n=0}^{2s}\frac{2\pi}{n!(2k)_n}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\,\frac{R^{2n+1}}{F(R,2s)}|n\rangle\langle n|, \tag{19}$$

则

$$\iint \mathrm{d}^2\beta|\beta\rangle\langle\beta| = \sum_{n,m=0}^{2s}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!(2k)_n(2k)_m}}\times \int_0^{\infty}\mathrm{d}R\,\frac{R^{n+m+1}}{F(R,2s)}\int_0^{2\pi}\exp[\mathrm{i}(n-m)\varphi]\mathrm{d}\varphi = \sum_{n=0}^{2s}\frac{2\pi}{n!(2k)_n}|n\rangle\langle n|\int_0^{\infty}\frac{R^{2n+1}}{F(R,2s)}\mathrm{d}R = \sum_{n=0}^{2s}P_n|n\rangle\langle n| = \rho, \tag{20}$$

即

$$\rho^{-1}\iint|\beta,s\rangle\langle\beta,s|\,\mathrm{d}^2\beta = 1. \tag{21}$$

3 压缩特性

由(13)式和(14)式可以算出

$$\left.\begin{aligned} & b_-\,|\beta,2s\rangle = \\ & \beta[F(R,2s)]^{-1/2}\sum_{n=0}^{2s-1}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!(2k)_n}}|n\rangle, \\ & b_-^2\,|\beta,2s\rangle = \\ & \beta^2[F(R,2s)]^{-1/2}\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!(2k)_n}}|n\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

易知有限维希尔伯特空间广义相干态不再是 b_- 的本征态了。定义 $\sum_{2s+1}$ 空间的一对正交算符

$$X = \frac{1}{2}(b_- + b_+),\quad Y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(b_- - b_+), \tag{23}$$

对易关系为

$$[X,Y] = \frac{\mathrm{i}}{2}[b_-,b_+], \tag{24}$$

所以它们的广义测不准关系为

$$\langle(\Delta X)^2\rangle\langle(\Delta Y)^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}|\langle[X,Y]\rangle|^2 = \frac{1}{16}|\langle[b_-,b_+]\rangle|^2. \tag{25}$$

如果满足

$$\left.\begin{aligned} & S_X = \langle(\Delta X)^2\rangle - \frac{1}{4}|\langle[b_-,b_+]\rangle| < 0 \\ & \text{或} \\ & S_Y = \langle(\Delta Y)^2\rangle - \frac{1}{4}|\langle[b_-,b_+]\rangle| < 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

就称在该量子态下，X 或 Y 分量存在压缩效应。

经过冗长但平凡的计算可得

$$\langle(\Delta X)^2\rangle = \frac{1}{2}R^2[F(R,2s)]^{-2}\times \{[F(R,2s)F(R,2s-2) - F^2(R,2s-1)]\cos2\varphi + F(R,2s)F(R,2s-1) - F^2(R,2s-1)\} + \frac{1}{4}\langle[b_-,b_+]\rangle, \tag{27}$$

$$\langle[b_-,b_+]\rangle = 2k + 2[F(R,2s)]^{-1}\times \left[\sum_{n=1}^{2s}\frac{nR^{2n}}{n!(2k)_n} - \frac{(2s+1)(s+k)R^{4s}}{(2s)!(2k)_{2s}}\right], \tag{28}$$

令

$$A(R,2s) = \frac{1}{2}R^2\{[F(R,2s)]^{-1}F(R,2s-2) - [F(R,2s)]^{-2}[F(R,2s-1)]^2\},$$

$$B(R,2s) = \frac{1}{2}R^2\{[F(R,2s)]^{-1}F(R,2s-1) - [F(R,2s)]^{-2}[F(R,2s-1)]^2\},$$

$$C(R,R) = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}[F(R,2s)]^{-1}\times \left[\sum_{n=1}^{2s}\frac{nR^{2n}}{n!(2k)_n} - \frac{(2s+1)(s+k)R^{4s}}{(2s)!(2k)_{2s}}\right], \tag{29}$$

有

$$S_X = A(R,2)\cos2\varphi + B(R,s) + C(R,s) - |C(R,s)|. \tag{30}$$

同理可得

$$\langle(\Delta Y)^2\rangle = \frac{1}{2}x^2[F(R,2s)]^{-2}\times \{-[F(R,2s)F(R,2s-2) - F^2(R,2s-1)]\cos2\varphi + F(R,2s)F(R,2s-1) - F^2(R,2s-1)\} + \frac{1}{4}\langle[b_-,b_+]\rangle, \tag{31}$$

由(28) 式可知,$\langle[b_-,b_+]\rangle$ 与 φ 无关,所以

$$S_Y(R,s,\varphi) = S_X(R,s,\varphi+\pi/2), \tag{32}$$

因此只讨论 S_X 即可。

下面具体讨论 $s = 1$ 的特殊情况。容易算出

$$C(R,1) = \frac{-R^4 + 2(k+1)R^2 + 4k^2}{[2/(2k+1)]R^4 + 4R^2 + 8k} \geqslant 0 \quad (当\ R \leqslant \sqrt{k+1}), \tag{33}$$

由(30)式可知压缩条件为

$$S_X = A(R,1)\cos2\varphi + B(R,1) < 0, \tag{34}$$

从而得到产生压缩的条件为

$$R^4 + 2kR^2 < 2[(k+1)R^2 + 2k(2k+1)]\cos2\varphi, \tag{35}$$

若取 $\cos2\varphi = 1$,出现压缩现象的条件为

$$R < \sqrt{1+\sqrt{1+4k(2k+1)}}. \tag{36}$$

再考虑到(33) 式,可知出现压缩现象的条件为

$$R \leqslant \sqrt{k+1}.$$

可见,对有限的 s,在 R 的一定范围内可以出现压缩现象。当 $s\to\infty$ 时,态$|\beta,s\rangle$成为通常的广义相干态$|\beta\rangle$,是最小测不准态,不存在压缩效应。

4　反聚束效应

在有限维希尔伯特空间中,非简谐振子的二阶相关函数为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle\beta,s|b_+^2\, b_-^2|\beta,s\rangle}{\langle\beta,s|b_+\, b_-|\beta,s\rangle^2}, \tag{37}$$

可以算出

$$g^{(2)}(0) = \frac{F(R,2s)F(R,2s-2)}{[F(R,2s-1)]^2}. \tag{38}$$

若 $g^{(2)}(0) < 1$,称该量子态呈现反聚束效应。

下面对 $s = 1$ 和 $s\to\infty$ 两种特殊情况作进一步的分析。

1) 当 $s = 1$ 时,(37) 式化为

$$g^{(2)}(0) = \frac{F(R,0)F(R,2)}{[F(R,1)]^2} = \frac{1+\frac{R^2}{2k}\left[1+\frac{R^2}{2(2k+1)}\right]}{1+\frac{R^2}{k}\left(1+\frac{R^2}{4k}\right)}, \tag{39}$$

可以看到,由于我们取 $k > 0$,当 $R \neq 0$ 时,有 $g^{(2)}(0) < 1$,即存在反聚束效应。

2) 当 $s\to\infty$ 时,易知 $g^{(2)}(0)\to 1$,这正是通常的广义相干态的结果 —— 相干性。

对于有限的 s,用数值分析可知,都存在反聚束效应,如图 1 所示。

结论　本文把非简谐振子广义相干态推广到有限维希尔伯特空间中,研究了 $k = \frac{1}{2}(1+\sqrt{A+1/4})$ 的广义相干态的量子统计特性. 通过研究得出下面结论：

1) 对于有限的 s,有限维希尔伯特空间非简谐振子的广义相干态可以出现压缩现象,压缩现象的强弱与 s 有关。当 s 趋于无穷大时,成为最小测不准态,与通常的非简谐振子的广义相干态一致。

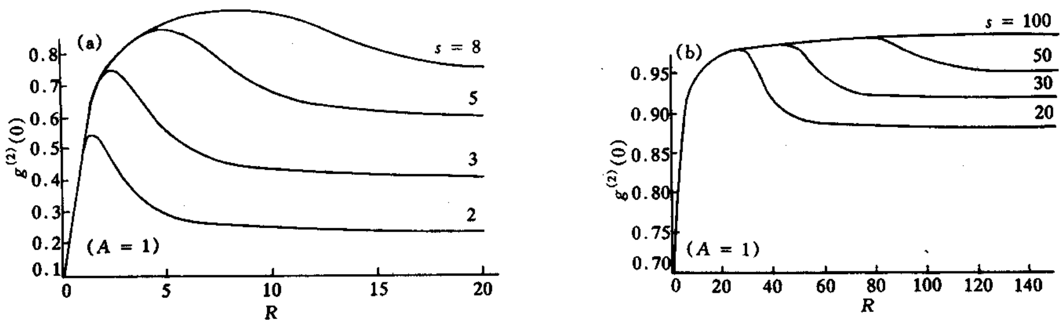

Fig. 1 Antibunching properties of the generalized coherent states of a non-harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space

2）数值计算表明，对于有限的 s，有限维希尔伯特空间非简谐振子的广义相干态可以出现反聚束现象，随着 s 的增加，二阶相关函数越接近 1，当 s 趋于无穷大时二阶相关函数趋于 1。

参 考 文 献

[1] 徐子 . 非简谐振子的奇偶广义相干态. 物理学报，1996，**45**(11)：1807～1811

[2] 倪致祥. 非简谐振子广义相干态的叠加态. 物理学报，1997，**46**(9)：1688～1692

[3] 于肇贤，王继锁，刘业厚. 非简谐振子广义奇偶相干态的高阶压缩效应及反聚束效应. 物理学报，1997，**46**(9)：1693～1698

[4] 徐子 . Q 形变的非简谐振子广义相干态. 高能物理与核物理，1999，**23**(5)：436～444

[5] Zhu Dongpei. A new potential with the spectrum of an isotonic oscillator. *J. Phys.* (A)，1987，**20**(13)：4331～4336

[6] 章介伦，郭奇志. 哈密顿算符随时间演化的有心力势非简谐量子振子的严格解. 量子光学学报，2000，**6**(1)：18～22

[7] Zhu Jiuyun，Kuang Leman. Even and odd coherent states of a harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space and their squeezing properties. *Phys. Lett.* (A)，1994，**193**(3)：227～234

[8] 朱从旭. 有限维希尔伯特空间 q-畸变谐振子偶相干态及其压缩和反聚束特性. 光学学报，1999，**19**(4)：441～444

Generalized Coherent States of a Non-Harmonic Oscillator in a Finite-Dimensional Hilbert Space

Yu Guochen Bo Fujun Wang Lianshui Ma Zhongbo

(*Teaching Division of Mathematics and Physics*，*People's Liberation Army Jinan Junior College of Medicine*，*Jinan* 250022)

(Received 4 January 2000；revised 15 May 2000)

Abstract： Generalized coherent states of a non-harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space are constructed and some quantum statistical properties are studied. Their squeezing effect and antibunching effect are discussed in detail. The condition of squeezing is found，and the relation between antibunching effect and the dimensionality of the Hilbert space is shown by using numerical calculation. Theoretical calculation shows that the coherent states present squeezing effect and antibunching effect，and these quantum statistical properties are very different from those of usual generalized coherent states in infinity-dimensional Hilbert space.

Key words： finite-dimensional Hilbert space；generalized coherent states；squeezing effect；antibunching effect