

文章编号 : 0253-2239(2001)08-0905-04

# 光学简并三波混频中的量子非破坏测量\*

王丹翎<sup>1)</sup> 龚旗煌<sup>1)</sup> 汪凯戈<sup>2)</sup> 杨国健<sup>2)</sup>

(1), 北京大学物理系人工微结构和介观物理国家重点实验室, 北京 100871)  
(2), 北京师范大学物理系, 北京 100875

摘要: 运用半经典量子理论方法建立了光学简并三波混频在两输入场均不为零的情况下的理论模型, 讨论了在两输入场均不为零时系统的动力学行为以及相应的量子非破坏测量(QND)特性。研究表明, 该系统的最佳量子非破坏测量工作点与以往的情况不同, 不是出现在非线性共振点处而是在双稳转变点。

关键词: 简并光学三波混频; 量子非破坏测量; 非线性共振态; 双稳转变点

中图分类号: O437 文献标识码: A

## 1 引 言

近年来, 在非线性光学系统中的量子非破坏测量的理论和实验研究引起了广泛的注意。量子非破坏测量的关键在于它对量子系统执行多次重复测量, 而不改变系统的量子态<sup>[1]</sup>。它的理论研究起源于海森伯测不准关系, 当两个力学量  $A, B$  不对易 (即  $AB \neq BA$ ) 对其中某个力学量进行测量均会引起另一个力学量的起伏, 从而破坏了对这个力学量再次测量的精确性。70 年代, Braginsky 等人<sup>[2]</sup>为了解决这个问题, 提出了用于探测天体物理微弱引力波的量子非破坏测量。80 年代中期, 随着量子光学的出现及非线性光学的迅速发展, 人们开始提出光学系统的量子非破坏性测量方案<sup>[3]</sup>。在现有的量子非破坏性测量中, 主要采用由强激光束携带微弱信号的非理想型的量子非破坏测量<sup>[4-7]</sup>, 它所依据的是 Holland 等提出的判别实现量子非破坏测量的三个标准, 这些标准由输入与输出光束之间的量子关联程度来定义。

非理想型的光学量子非破坏测量, 可通过探测光、信号光和非线性介质的相互作用来实现。已经证明, 在二阶非线性  $\chi^{(2)}$  介质中也可以讨论量子非破坏的测量情况<sup>[8-12]</sup>。本文主要讨论简并三波混频这种二阶非线性模型量子非破坏的测量情况。有些文献中已经讨论了简并三波混频的动力学行为<sup>[13]</sup>, 本文将进一步讨论其静态解的稳定性并以此系统作为一个量子非破坏的测量装置进一步研究它在两输

入场均不为零情况下的量子非破坏测量状况, 从而得到实现量子非破坏测量的状态和相应的条件。

## 2 两输入场均不为零时三波混频模型 的描述

简并三波混频效应是一种二阶非线性电极化过程, 即两种相同频率的单色相干光波入射, 在二阶非线性晶体内产生第三种频率(和频或差频)单色相干辐射的过程。对应的哈密顿量的表达式为<sup>[14]</sup>

$$H = \hbar \left[ \sum_{j=1}^2 \kappa_j \Delta_j a_j^+ a_j + i \frac{g}{2} (a_1^+ a_2 - a_1^2 a_2^+) + (\epsilon_2 a_2^+ - \epsilon_2^* a_2) \right], \quad (1)$$

此时无量纲失谐参数是

$$\Delta_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\kappa_1}, \quad \Delta_2 = \frac{\omega_2 - 2\omega_0}{\kappa_2}, \quad (2)$$

其中  $a_j$  和  $a_j^+$  是腔模  $j$  在频率  $\omega_j$  ( $\omega_2 \approx 2\omega_1$ ) 相应的场算符,  $\epsilon_j$  为两相关驱动场在相应频率处的振幅,  $g$  是非线性耦合系数,  $\kappa_j$  是腔模  $j$  的衰变比,  $\omega_0$  和  $\omega_2$  是两输入场的频率。定义归一化的无量纲变量

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= g a_1 / \sqrt{2\kappa_1 \kappa_2}, & A_2 &= g a_2 / \kappa_2, \\ E_1 &= g \epsilon_1 / \kappa \sqrt{2\kappa_1 \kappa_2}, & E_2 &= g \epsilon_2 / (\kappa_1 \kappa_2), \\ \tau &= \kappa_1 t, & \kappa &= \kappa_2 / \kappa_1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

最后得到半经典动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} (d/d\tau) A_1 &= E_1 - (1 + i\Delta_1) A_1 + A_1^* A_2, \\ (d/d\tau) A_2 &= \kappa [E_2 - (1 + i\Delta_2) A_2 - A_1^2]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

在两输入场  $E_1, E_2$  均不为零(若假设  $\delta_1 = 0$ )时, 上

\* 国家自然科学基金(19774013)资助课题。

收稿日期: 2000-04-24; 收到修改稿日期: 2000-07-17

述方程在满足非线性共振条件下的精确的静态解是

$$|A_1| = \sqrt{\Delta_1 \Delta_2} / |\sin(\delta_2 - 2\delta_1)|, \quad (5a)$$

$$|A_2| = \Delta_1 / \sin(\delta_2 - 2\delta_1). \quad (5b)$$

这里的  $\delta_j$  是输入场  $E_j^{\text{in}}$  的相位,从(5)式可以看出,此时的静态解只与失谐参数  $\Delta_j$  有关。根据非线性共振(NDR)的定义,即在通常情况下,输入场与腔内场有一定的相移  $\phi_1$ ,腔内场与输出场也有一定的相移  $\phi_2$ ;当输入、输出信号光的相位分别是  $\delta_1, \varphi_1^{\text{out}}$  时,在满足  $\varphi_1^{\text{out}} = \delta_1 + \phi_1 + \phi_2$  的条件下,定义相移为零时的状态为非线性共振态;同时作如下假设,即两输入场相位之间满足关系  $\delta_2 - 2\delta_1 = \pi/2$ ,从而得到满足非线性共振定义的相位关系为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{\text{out}} = \delta_1 = \varphi_1 = 0, \\ \varphi_2^{\text{out}} = \delta_2 = \varphi_2 = \pi/2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中  $\varphi_j$  是腔内场的相位,  $\varphi_j^{\text{out}}$  是输出场的相位。

非线性共振条件下腔内场强度静态值为

$$|A_1|^2 = \Delta_1 \Delta_2, \quad |A_2|^2 = \Delta_1^2. \quad (7)$$

联立求解(4)式、(6)式和(7)式,可得此时输入场与腔内场的关系表达式

$$\left. \begin{aligned} E_1 = A_1 = \sqrt{\Delta_1 \Delta_2}, \\ E_2 = i\epsilon_2 = i|A_2| = i\Delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

### 3 量子非破坏测量的三个判据

依据 Holland 等人<sup>[6]</sup>提出的光学系统中量子非破坏测量的三个判据,量子非破坏测量是否可以执行,实际上是依据输入与输出场涨落的归一化正交分量之间的关联来描述的。在频域中,定义哈密顿算符  $p$  和  $q$  的关联系数为

$$C^2(p, q) = \frac{|pq_{\text{sym}}(\omega)|}{V(p)V(q)}, \quad (9)$$

$$pq_{\text{sym}}(\omega) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} p(t)q + qp(t), \quad (10)$$

$$M = \begin{bmatrix} -(1 + i\Delta_1) & A_2 & A_1^* & 0 \\ A_2^* & -(1 - i\Delta_1) & 0 & A_1 \\ -2\kappa A_1 & 0 & -\kappa(1 + i\Delta_2) & 0 \\ 0 & -2\kappa A_1^* & 0 & -\kappa(1 - i\Delta_2) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$D = (g^2/2\kappa_1\kappa_2) \text{diag}\{A_2, A_2^*, 0, 0\}. \quad (16)$$

为实现最佳的量子非破坏测量,必须通过寻找合适的参数、选择适当的正交相位的涨落,再依据三

$$V(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-i\omega t) q(t)p, \quad (11)$$

其中  $V(p)$ 、 $V(q)$  分别是可观测量  $p$ 、 $q$  的压缩谱。

设输入、输出场的涨落算符  $\delta a_j \equiv a_j - \langle a_j \rangle$  的正交分量为

$$\chi_j^{\text{in}} = \frac{1}{2} [\delta a_j^{\text{in}} \exp(-i\theta_j^{\text{in}}) + \text{C.C.}], \quad (12a)$$

$$\chi_j^{\text{out}} = \frac{1}{2} [\delta a_j^{\text{out}} \exp(-i\theta_j^{\text{out}}) + \text{C.C.}], \quad (12b)$$

其中  $\theta_j$  是涨落的正交相位。并假设光束 1 是探测光,光束 2 是信号光,则三个表征量子非破坏测量的关联系数是

$$\left. \begin{aligned} C_1^2 &\equiv C^2(\chi_2^{\text{in}}, \chi_1^{\text{out}}), \\ C_2^2 &\equiv C^2(\chi_2^{\text{in}}, \chi_2^{\text{out}}), \\ C_3^2 &\equiv C^2(\chi_2^{\text{out}}, \chi_1^{\text{out}}). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

输出探测场与输入信号场的关联  $C_1^2$  表示测量的有效性,输出信号场与输入信号场的关联  $C_2^2$  则反映测量过程对信号的破坏程度。当  $1 < C_1^2 + C_2^2 < 2$  时,说明可实现量子非破坏测量。对于线性系统,  $C_3^2$  用于计算条件方差:

$$V_C \chi_2^{\text{out}} | \chi_1^{\text{out}} = V(\chi_2^{\text{out}}) (1 - C_3^2), \quad (14)$$

其中  $V(\chi_2^{\text{out}})$  是输出探测场的方差。条件方差是在给定输出探测场值时,输出信号场的方差,它表示量子态准备的好坏,当它趋于零时,表示量子态已完全准备好。综合上述,只有在同时满足  $C_1^2 = C_2^2 = 1$  和  $V_C \chi_2^{\text{out}} | \chi_1^{\text{out}} = 0$  时方可实现最佳的量子非破坏测量。

### 4 数值分析结果

通过对量子涨落的线性化处理,三个判据可由系统的线性漂移矩阵、扩散矩阵来计算。经过推导可以得到这些矩阵的具体表达式如(15)式、(16)式所示。

个判据公式计算出关联系数。若将输入、输出相位的涨落与期望值之间的不同定义为

$$\Delta\theta_j = \theta_j - \phi_j \quad (j = 1, 2), \quad (17)$$

其中  $\Delta\theta_j = 0, \pm\pi/2$  分别代表振幅的正交分量和相位的正交分量。文中我们只讨论失谐不为零时的最佳量子非破坏的测量情况,通过对双稳转变点和非线性共振点处的两光束的跃迁及相应的量子非破坏测量状况的研究,来分析这两种情况下是否存在能实现最佳量子非破坏测量的工作点。以在零频情况为例,即  $\omega_j = 0$ ,经分析发现三个判只与失谐参数  $\Delta_1, \Delta_2$  有关,其中  $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ 。

可以证明在所有参数都满足非线性共振条件时并不存在有最佳的量子非破坏测量点;但通过对双稳转变点处的量子非破坏测量研究,发现当将失谐参数、 $\Delta\theta_j$  分别取合适的值,例如取为  $\Delta_1 = 8$  和

$\Delta_2 = 1$  及输入、输出信号场和探测涨落场均取振幅分量  $\Delta\theta_1^{out} = \Delta\theta_2^{out} = \Delta\theta_2^{in} = 0$ ;由(8)式可知,当给定失谐参数  $\Delta_1, \Delta_2$ , 则输入场  $E_1^2$  是一定的。扫描输入场  $E_2^2$  的变化,可得到图1~图3(图中物理量是经过归一化后的无量纲变量),从图1~图3中看到在双稳转变点处存在着最佳量子非破坏测量点。通过对图2与图3的对比,可看到此时有两个最佳量子非破坏测量工作点,一个在上转变点  $E_2^2 = 80.68$  处,另一个在下转变点  $E_2^2 = 63.02$  处;而与这两转变点相对应的相移由图2知(如图中箭头所示),均不为零。所以,最佳量子非破坏测量工作点并不象先前的一些模型所说的都在非线性共振点<sup>[1,15]</sup>。

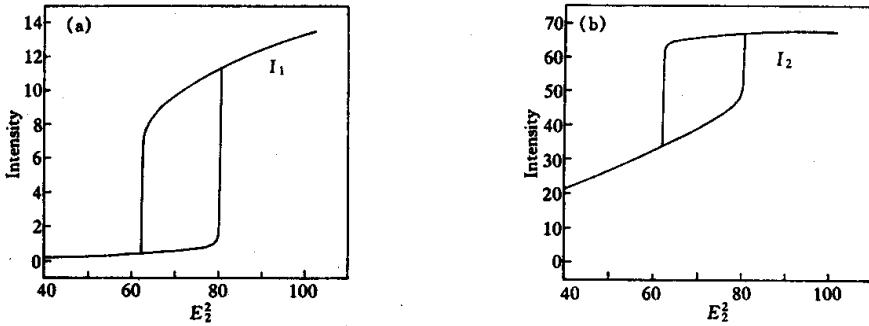


Fig. 1 Stationary intensities of the intracavity mode 1 and mode 2

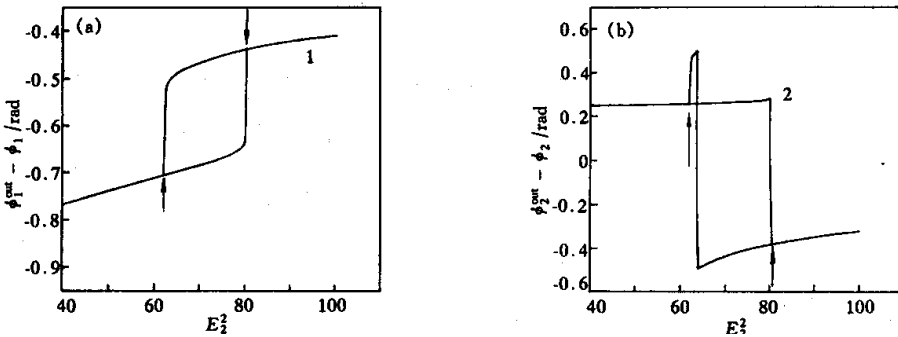


Fig. 2 Phase differences between the output and the intracavity beams

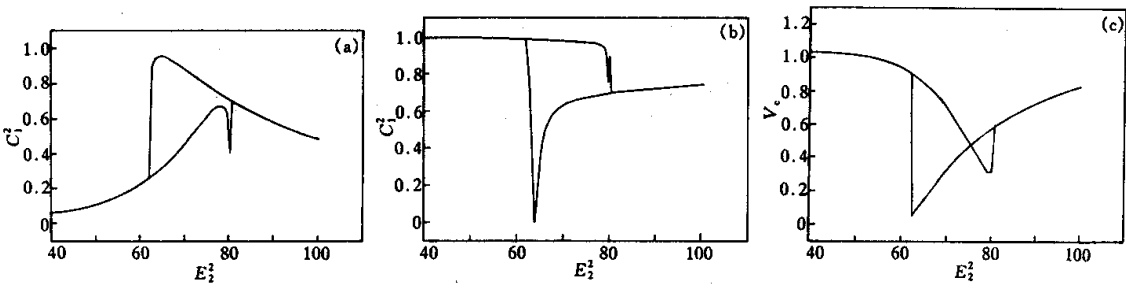


Fig. 3 QND criteria

结论 运用半经典的量子理论研究了存在两输入场的简并三波混频模型的动力学行为和满足非线性共振条件时量子非破坏测量的特性,给出了系统场变

量相应的静态解的解析表达并讨论了在非线性共振点处的量子非破坏测量情况。在此种模型下实现最佳量子非破坏测量并不在预料中的非线性共振点,

而在双稳转变点。这表明了并不是所有的非线性光学系统的最佳量子非破坏测量工作点均在非线性共振点处,从而拓宽了对光学系统的量子非破坏测量认识的思路。

### 参 考 文 献

- [1] 汪凯戈,许秋生,杨国建. 非线性双光束共振时的量子非破坏测量. 物理学报, 1998, **47**(10):1641~1650
- [2] Braginsky V B. Signal to noise ratio in satellite gravitational wave experiment. *Acta Astronautica*, 1975, **2**(6):535~537
- [3] Milburn G J, Walls D F. Quantum nondemolition measurements via quadratic coupling. *Phys. Rev. (A)*, 1983, **28**(4):2065~2070
- [4] Levenson M D, Shelby R M, Reid M *et al.*. Quantum nondemolition detection of optical quadrature amplitudes. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**(20):2473~2476
- [5] Grangier P, Slusher R E, Yurke B *et al.*. Squeezed light-enhanced polarization interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **59**(19):2153~2156
- [6] Holland M J, Collett M J, Walls D F *et al.*. Nonideal quantum nondemolition measurements. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(5):2995~3005
- [7] Grangier P, Roch J E, Roger G. Observation of backaction-evading measurement of an optical intensity in a three-level atomic nonlinear system. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**(11):1418~1421
- [8] Dance M, Collett M J, Walls D F. Quantum nondemolition measurements via second-harmonic generation. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**(9):1115~1118
- [9] Smith P, Collett M J, Walls D F. Quantum nondemolition measurements with an optical parametric amplifier. *Opt. Commun.*, 1993, **102**(1):105~110
- [10] Pereira S F, Ou Z Y, Kimble H J. Backaction evading measurements for quantum nondemolition detection and quantum optical tapping. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(2):214~217
- [11] Bencheikh K, Levenson J A, Grangier P *et al.*. Quantum nondemolition demonstration via repeated backaction evading measurements. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**(19):3422~3425
- [12] Bruckmeier R, Hansen H, Schiller S. Repeated quantum nondemolition measurements of continuous optical waves. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79**(8):1463~1466
- [13] Lugiato L A, Oldano C, Fabre C. Bistability, self-pulsing and chaos in optical parametric oscillators. *Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica D-Condensed Matter Atomic Molecular & Chemical Physics Fluids Plasmas Biophysics*, 1988, **10**(8):959~977
- [14] Fabre C, Giacobino E, Heidmann A *et al.*. Squeezing in detuned degenerate optical parametric oscillators. *Quantum Opt.*, 1990, **2**(2):159~187
- [15] 王丹翎,汪凯戈,杨国建等. 简并参量振荡中的量子非破坏测量. 物理学报, 2000, **49**(8):1484~1489

## Quantum Non-Demolition Measurement in Degenerate Three-Wave Mixing

Wang Danling<sup>1)</sup> Gong Qihuang<sup>1)</sup> Wang Kaige<sup>2)</sup> Yang Guojian<sup>2)</sup>

(1), Mesoscopic Physics Laboratory, Department of Physics, Peking University, Beijing 100871 )  
(2), Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875

( Received 24 April 2000 ; revised 17 July 2000 )

**Abstract :** A quantum theoretical model for the system of degenerate three-wave mixing has been established. The dynamical behavior and the features of the optical quantum non-demolition (QND) measurement were studied by using nonlinear quantum optics. The results show that the efficient QND measurement can not be well performed at the operation of the nonlinear double resonances (NDR) but the nonlinear transformation of the bistability.

**Key words :** degenerate three-wave mixing ; quantum non-demolition measurement ; nonlinear double resonances ; optical bistability