

文章编号 : 0253-2239(2001)07-0800-04

多横模复折射率波导的数值求解*

李建军 陈昌华 廉 鹏 高 国 邹德恕 沈光地

(北京工业大学电子系和北京光电子技术实验室,北京 100022)

摘要: 对多横模复折射率波导 提出了一个将实折射率数值法、微扰法和打靶法有机结合起来 RPS 法,该方法简单实用,求解速度快,精度高,无须在整个复平面上寻找导波模式的复传播常数。通过五层平板波导计算表明,该方法可以精确地求得复折射率波导的所有 TE 和 TM 模式。

关键词: 波导;复折射率;多横模;数值求解

中图分类号: TN252 文献标识码: A

1 引 言

在实际的波导结构中,如多量子阱激光器等,一般都包含多个增益区或损耗区,而增益和损耗与复折射率的虚部相联系,即波导是复折射率波导,因此对波导的严格模式分析应求其复传播常数。一般情况下只考虑实折射率波导是因为折射率虚部与其实部相比对导波过程的影响可以忽略。但在许多情况下必须求解复折射率波导的复本征值即复传播常数,如半导体激光器侧向模式分析,半导体激光放大器的模式分析等。

对于有源波导的模增益系数,可通过先求出实折射率波导的光限制因子,再乘以有源材料的增益系数来获得,对 TE 模式,可用这种方法来近似,但这种方法对 TM 模式并不适用^[1]。模增益的严格计算应求其复传播常数,求复传播常数的一种简单的方法是微扰法^[2],但它的精度却无法确定。用复打靶法^[3]可以精确地求得复传播常数,但对存在多模式的波导,该方法不能确定模式的总数,如果初值选取不当,有可能出现有些模式的解找不到的问题。虽然用散射矩阵法^[4]可以求得所有模式的解,但需要在整个复平面上寻找传播常数的本征值,计算工作量大,编程复杂。

为了求解复折射率波导的多个模式的复传播常数,本文给出了一个将实数数值法(real numerical method)、微扰法(perturbation method)和打靶法

(shooting method)有机结合起来的方法,称之为 RPS 法。该方法利用了实数数值法、微扰法和打靶法各自的优点,解决了各自存在的问题,避免了在整个复平面上寻找本征解的繁杂工作量,可以求出任意波导结构的所有 TE 和 TM 模式的复传播常数。该方法简单实用,计算速度快,且计算结果精确。

2 RPS 法的基本思想

RPS 法的基本思想如图 1 所示。我们通过实数数值方法首先确定只考虑波导各层折射率实部时的所有模式数及各模式的实传播常数 β_r ,得到实数解,然后考虑折射率的虚部用微扰法通过实数解求得各模式复传播常数的近似解 β_p ,最后将微扰法解作为打靶法的初值,进而确定出各模式复传播常数的精确解 β_{RPS} 。

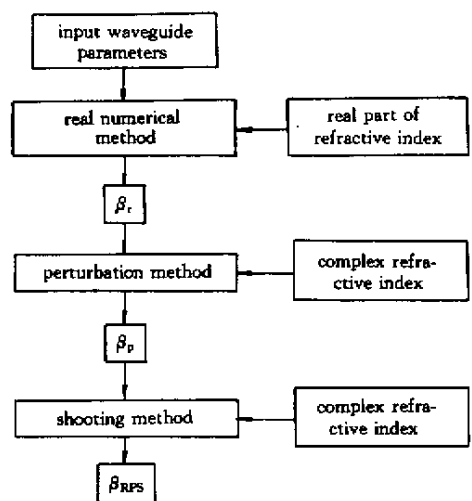


Fig.1 The main idea of RPS

* 国家自然科学基金(69889601、69776033) 国家科委 863(863-307-15-5)高科技和北京市自然科学基金(4982007) 资助项目。

RPS 法的关键点在于利用了通常折射率虚部与其实部相比对导波过程的影响较小的原理,通过实数解首先确定出模式总数,而以微扰法解作为打靶法的初值则解决了打靶法的初值选取问题,无需在整个复平面上寻找初值,最后又利用了打靶法的精确性而得到各模式复传播常数的精确解。模拟精度仅由打靶法中设定的迭代误差确定。

下面给出 RPS 法的具体实现过程。对于图 2 所示的波导结构,导波模式沿 z 方向传播,对于 TE 模式,电场为 y 方向偏振;对于 TM 模式,电场为 x 偏振。当 $x < x_s$ 或 $x > x_e$ 时,折射率分别为复常数 n_s 和 n_e ,下标 s, e 分别代表开始层和结束层。在区间 $[x_s, x_e]$ 内,复折射率为任意分布 $n(x)$ 。下面分别给出实数数值解、微扰法解和打靶法解的求解方法。

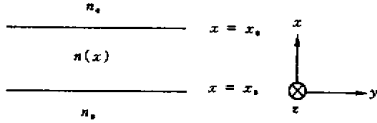


Fig.2 Waveguide structure

2.1 实数解的数值求解

实数解的波动方程为

$$\frac{\partial^2 E_{dr}}{\partial x^2} + k_0^2 [n_r^2(x) - (\beta_r/k_0)^2] E_{dr} = 0, \quad (1)$$

其中 n_r 为折射率的实部, β_r 为仅考虑折射率实部时的波导模式传播常数, E_{dr} 为相应的电场分布,下标 d 表示电场的偏振方向,对 TE 模, d 为 y , 对 TM 模, d 为 x , $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 为自由空间波数。

本文用传输矩阵法来求(1)式的数值解。将整个求解区域划分为 m 个小区间, $x < x_s$ 的部分为第 1 个区间, $x > x_e$ 的部分为第 m 个区间。每一区间的范围取得足够小,使在每个区间内的折射率近似为常数。在第 j 个区间内的电场分布为

$$E_{dr}^j(x) = a_{jr} \exp[\alpha_{jr}(x - x_j)] + b_{jr} \exp[-\alpha_{jr}(x - x_j)], \quad (2a)$$

其中 $\alpha_{jr} = \sqrt{\beta_r^2 - (k_0 n_{jr})^2}$ ($\beta_r > k_0 n_{jr}$)

$$E_{dr}^j(x) = a_{jr} \cos[\alpha_{jr}(x - x_j)] + b_{jr} \sin[\alpha_{jr}(x - x_j)], \quad (2b)$$

其中 $\alpha_{jr} = \sqrt{(k_0 n_{jr})^2 - \beta_r^2}$ ($\beta_r < k_0 n_{jr}$)

其中 a_{jr}, b_{jr} 为待定常数, n_{jr} 为第 j 层的折射率实部, x_j 是第 j 层下边界的位置。利用电场和电场的一阶偏导数在界面处连续的条件:

TE 模

$$\left. \begin{aligned} E_{dr}^j(x_j) &= E_{dr}^{j+1}(x_j), \\ \frac{dE_{dr}^j(x_j)}{dx} &= \frac{dE_{dr}^{j+1}(x_j)}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

TM 模

$$\left. \begin{aligned} n_j^2 E_{dr}^j(x_j) &= n_{j+1}^2 E_{dr}^{j+1}(x_j), \\ \frac{dE_{dr}^j(x_j)}{dx} &= \frac{dE_{dr}^{j+1}(x_j)}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

通过传输矩阵法可求得第 1 层和第 m 层间常数项的关系为

$$\begin{bmatrix} a_{mr} \\ b_{mr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{r11}(\beta_r) & t_{r12}(\beta_r) \\ t_{r21}(\beta_r) & t_{r22}(\beta_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1r} \\ b_{1r} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中 $t_{r11}, t_{r12}, t_{r21}$ 和 t_{r22} 分别是由 β_r 决定的 2×2 矩阵元。对于导波模式,电场在第 1 层和第 m 层的分布为指数衰减形式,所以 $b_{1r} = 0, a_{mr} = 0$ 。 β_r 的求解转化为求 $t_{r11}(\beta_r) = 0$ 的根的问题,通过步进搜索和二分法相结合,即可求得所有的 β_r 。

2.2 微扰法解的求解

用微扰法求复传播常数可表示为^[2]

$$\beta_p^2 = \beta_r^2 + \frac{k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - n_r^2) E_{dr}^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} E_{dr}^2 dx}, \quad (5)$$

式中 n 为波导各层的复折射率, β_r 和 E_{dr} 由实数解获得。在此将复折射率的虚部看成是对实部的微扰,通过实数解得到近似的复传播常数。微扰法可以快速求得复传播常数,但由于 β_p 是用一级微扰法由波动方程得到的,其精确度无法判断,所以求得的 β_p 只能是一个近似。

2.3 打靶法解的求解

考虑复折射率后的波动方程与(1)式有相同的形式,只不过式中的 β_r, n_r 和 E_{dr} 要用复传播常数 β , 复折射率 n 和复电场 E_d 来代替。在第 j 层内电场分布形式为

$$E_d^j(x) = a_j \exp[\alpha_j(x - x_j)] + b_j \exp[-\alpha_j(x - x_j)], \quad (6)$$

式中

$$\alpha_j = \sqrt{\beta^2 - (k_0 n_j)^2}.$$

利用电场和电场的一阶偏导数在界面处连续的条件,同样通过传输矩阵法可得到第 m 层和第 1 层电场的常数项间的关系为

$$\begin{bmatrix} a_m \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}(\beta) & t_{12}(\beta) \\ t_{21}(\beta) & t_{22}(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

其中 t_{11} 、 t_{12} 、 t_{21} 和 t_{22} 分别是由 β 决定的 2×2 矩阵元。对于导波模式, 要求电场在 $x < x_s$ 的区域的电场分布必须是指数衰减形式, 即 $b_1 = 0$, 因此有

$$\begin{bmatrix} a_m \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}(\beta) \\ t_{21}(\beta) \end{bmatrix} a_1. \quad (8)$$

对于任一试探的 $\beta = \beta_r + i\beta_i$, 根据(6)式和(8)式即可确定在 x_e^+ 处(其中 + 表示第 $m-1$ 层和第 m 层界面的 m 层一侧)的电场及其偏导数为

$$\left. \begin{aligned} E_d^m(x_e^+) &= a_m + b_m, \\ \frac{dE_d^m(x_e^+)}{dx} &= \alpha_m(a_m - b_m), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 $\alpha_m = \sqrt{\beta^2 - (k_0 n_e)^2}$.

由于对于导波模式, 同时还要求电场在第 m 层的分布也必须是指数衰减形式, 如果给定的 β 是模式的传播常数, 则 E_d^m 必须满足下式:

$$f(\beta) = f_r(\beta_r, \beta_i) + if_i(\beta_r, \beta_i) = \frac{dE_d^m(x_e^+)}{dx} +$$

$$E_d^m(x_e^+) \sqrt{\beta^2 - (k_0 n_e)^2} = 0. \quad (10)$$

(10)式通过二维牛顿迭代法即可容易地得到

求解^[3], 在迭代中由于偏微分不能用显式表示, 需通过数值法来得到。由于微扰解 β_p 比较接近相应模式的精确解, 用 β_p 作为 β 的初值, 不但可以减少迭代的次数, 而且可以保证求得的解不会跳到其它模式的解上去。

3 应用及讨论

用图3所示的五层平板波导结构^[4]来对RPS法进行验证。表1给出了所有模式的实数解, 微扰法解和RPS解的模式折射率 $n_{\text{eff}} (= \beta/k_0)$ 。为了便于比较, 表中还给出了文献[4]用散射矩阵法(SMA: Scattering Matrix Approach)计算的结果, 可见RPS法和散射矩阵法的计算结果是一致的。由表1可见, 对于TE模, 由微扰法得到的结果还算比较接近, 但对于TM模则将导致错误的结果。例如对于 TM_1 模, 由微扰法得到的模式折射率虚部的符号与散射矩阵法结果相反, 在物理意义上本来该模式应为增益传输, 但微扰法得到的却是损耗传输, 而RPS法的结果与散射矩阵法一致。

Table 1. The calculated effective refractive indices of guided mode for various method

mode	n_{eff}^r	n_{eff}^p	$n_{\text{eff}}^{\text{RPS}}$	$n_{\text{eff}}^{\text{SMA}[4]}$
TE ₀	3.5035135	3.5035010 + i7.1018397 × 10 ⁻³	3.5034433 + i7.1029987 × 10 ⁻³	3.5034433 + i7.1030010 × 10 ⁻³
TE ₁	3.3373277	3.3373251 - i2.2912350 × 10 ⁻⁴	3.3372869 - i2.2949241 × 10 ⁻⁴	3.3372869 - i2.2949110 × 10 ⁻⁴
TE ₂	3.2516435	3.2516412 - i5.3161401 × 10 ⁻⁴	3.2516853 - i5.3051366 × 10 ⁻⁴	3.2516852 - i5.3051478 × 10 ⁻⁴
TE ₃	3.1042640	3.1042597 + i1.3475890 × 10 ⁻³	3.1042515 + i1.3379858 × 10 ⁻³	3.1042514 + i1.3379863 × 10 ⁻³
TE ₄	2.8786258	2.8786227 - i1.7587958 × 10 ⁻⁴	2.8786369 - i1.7372970 × 10 ⁻⁴	2.8786368 - i1.7372989 × 10 ⁻⁴
TE ₅	2.6281238	2.6281189 + i1.5834542 × 10 ⁻³	2.6281394 + i1.5486446 × 10 ⁻³	2.6281393 + i1.5486443 × 10 ⁻³
TE ₆	2.2439623	2.2439574 + i7.3441047 × 10 ⁻⁴	2.2439515 + i7.0837744 × 10 ⁻⁴	2.2439514 + i7.0837796 × 10 ⁻⁴
TE ₇	1.7681716	1.7681655 + i1.4428402 × 10 ⁻³	1.7681912 + i1.3532174 × 10 ⁻³	1.7681910 + i1.3532172 × 10 ⁻³
TE ₈	1.0742819	1.0742761 + i3.0570532 × 10 ⁻³	1.0742623 + i2.4578920 × 10 ⁻³	1.0742620 + i2.4578915 × 10 ⁻³
TM ₀	3.4967439	3.4967400 + i6.6407201 × 10 ⁻³	3.4966838 + i6.5439798 × 10 ⁻³	3.4966838 + i6.5439817 × 10 ⁻³
TM ₁	3.3307270	3.3307245 - i2.7371771 × 10 ⁻⁴	3.3306972 + i3.5185421 × 10 ⁻⁵	3.3306971 + i3.5186422 × 10 ⁻⁵
TM ₂	3.2243029	3.2243004 - i3.4584038 × 10 ⁻⁴	3.2243381 - i1.7448172 × 10 ⁻⁴	3.2243380 - i1.7448261 × 10 ⁻⁴

判断计算结果正确与否的一个最直接的方法就是看其近场特性, 如果是正确的解, 当 x 趋向正负无穷时, 电场应趋于零。图4同时给出了对于图3所示波导结构用RPS法算得的TE₀至TE₈各模式的近场相对强度 P 的分布, 可见, 当 x 趋向正负无穷时, 近场趋于零, 因此求解结果可用来表征各导波模式。

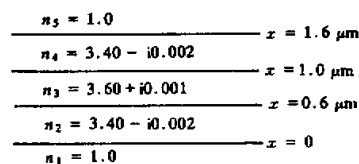


Fig.3 Five-layer waveguide

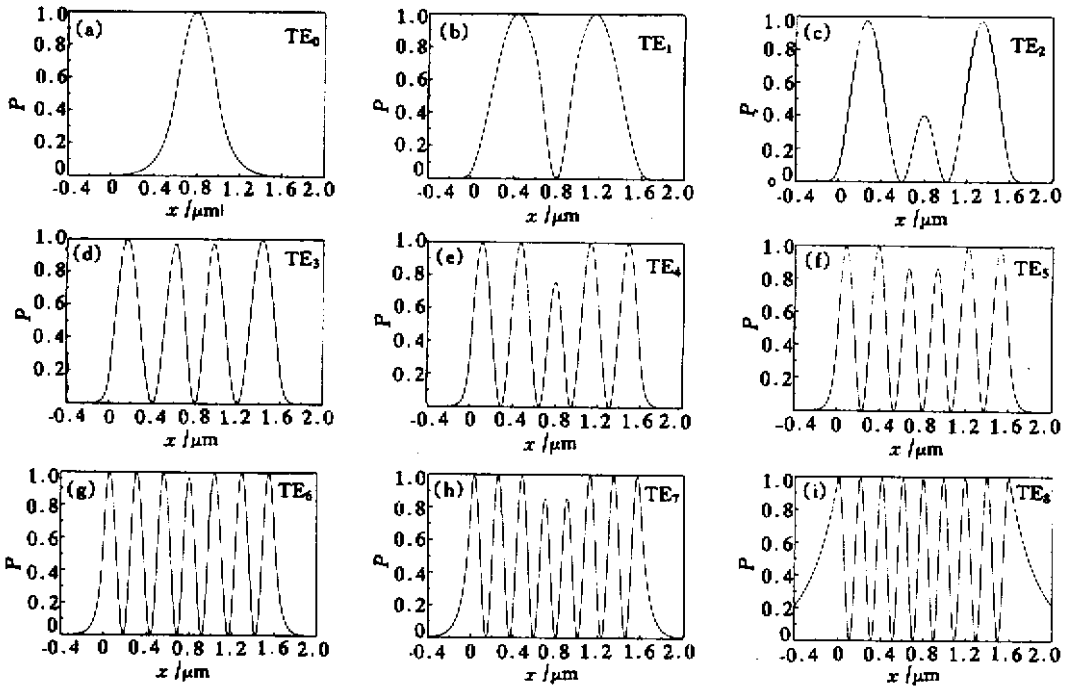


Fig.4 Near field distribution for all TE mode

结论 将实折射率数值法、微扰法和打靶法各自的优点有机结合起来 RPS 法可以求解具有多横模复折射率波导的模式传播常数,该方法简单实用,求解速度快,精度高,避免了在整个复平面上寻找特征根。模拟结果表明,对 TM 模式,用微扰法有可能得到错误的结果,但利用 RPS 法则不论对 TE 模式还是对于 TM 模式,都能得到正确的结果。该方法是求解复传播常数的有效方法。

参 考 文 献

[1] Visser T D, Demenlaere B, Haes J *et al.*. Confinement

and modal gain in dielectric waveguides. *J. Lightwave Technol.*, 1996, **14**(5): 885 ~ 887

[2] Burke S V, Adams M J, Kendall P C *et al.*. Design of ridge waveguide couplers with carrier injection using discrete spectral index method. *Electron. Lett.*, 1992, **28**(9): 841 ~ 843

[3] 陈昌华, 杨国文, 徐俊英等. 求复折射率本征值的打靶法. *光学学报*, 1997, **17**(5): 630 ~ 634

[4] Visser T D, Blok H, Lenstra D. Modal analysis of a planar waveguide with gain and losses. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1995, **31**(10): 1803 ~ 1810

A Numerical Method for Analyzing Multi-Transverse Modes of a Complex Index Waveguide

Li Jianjun Chen Changhua Lian Peng Gao Guo Zou Deshu Shen Guangdi
(Electrical Engineering Department of Beijing Polytechnic University and
Beijing Optoelectronic Technology Laboratory, Beijing 100022)

(Received 7 April 2000; revised 12 May 2000)

Abstract: In order to analyze multi-transverse modes of a complex index waveguide, a numerical method named RPS is proposed. It integrates real index numerical method, perturbation method and shooting method rationally. The method is simple, fast and precise, and it avoids searching the solution in the whole complex plane. Numerical example shows that all mode solution can be obtained precisely for either TE mode or TM mode of a complex index waveguide.

Key words: waveguide; complex index; multi-transverse modes; numerical solution