

文章编号: 0253-2239(2001)05-0609-06

空间载频条纹相位分析法中的相位不确定性

钟 金 刚 张 永 林 李 丰 丽 狄 红 卫

(暨南大学物理系, 广州 510632)

摘要: 分析了单频、双频空间载频光学条纹相位分析技术中的相位不确定性问题, 提出采用两频率之比为无理数的双频载频条纹, 相位可完全确定, 并提出了基于两频率之比为无理数的空间载频条纹相位确定算法, 给出了实验结果。

关键词: 条纹分析; 相位不确定性; 相位去包; 双频率
中图分类号: O436 文献标识码: A

1 引 言

单频空间载频光学条纹相位分析技术, 是近几年发展起来的条纹自动分析技术。针对这一技术, 已提出多种相位自动解调算法, 如傅里叶变换法^[1]、空间相移法^[2]、次条纹积分法^[3]等。由于原理的局限性, 相位解调算法只能给出包裹在 $-\pi$ 到 $+\pi$ 范围内的相位值, 超过这一范围的相位值是不确定的。通常的相位去包裹算法只适用于相位连续分布情况, 而对包含有突变的相位分布, 将会给出错误的去包结果。因此这种技术用来分析含有突变相位分布的光学条纹时, 有很大的困难, 如用载频干涉条纹法测块规的绝对长度, 用光栅投影法测带有台阶面的物体面形等。为了解决这一问题, Sansoni^[4]、Li^[5] 和 Zhao^[6] 提出采用双频空间载频条纹, 其中一个条纹频率是另一个条纹频率的 N 倍, 低频条纹用来确定突变的相位值。但采用低频条纹将影响测量精度和不容易实现自动测量。Hao^[7] 提出采用两频率稍微不同的双频空间载频条纹, 根据非线性小数重合法来确定相位, 但没有分析频率与最大可确定相位的关系。Gushov^[8] 和 Takeda^[9] 根据数论理论中的孙子剩余定理, 分别针对载频干涉条纹和光栅投影载频条纹, 提出了双频空间载频条纹相位确定算法(简称为 G-T 算法), 为了满足孙子剩余定理条件, 要求两频率之比等于两个互为质数的整数之比, 并分析了最大可确定相位的范围, 此时相位值还是不完全确定的, 只是可确定的相位范围比 2π 增大了。由于孙子剩余定理是针对整数的, 而相位值一般是非整数的, 这导致 G-T 算法有一明显的缺点, 即在相位

值接近整数的点, 微小的测量误差将被放大。

本文将分析单频、双频空间载频光学条纹相位分析技术中的相位不确定性问题, 指出采用两频率之比为无理数的双频载频条纹时, 相位可完全确定, 并提出了基于双频空间载频条纹相位确定算法, 给出了实验结果。

2 基于单频空间载频条纹的相位不确定性

对单一频率的载频条纹, 其强度可表示为

$$I_0(x, y) = a_0(x, y) + b_0(x, y) \cos[2\pi f_x x + 2\pi f_y y + \varphi_0(x, y)], \quad (1)$$

式中 $a_0(x, y)$ 、 $b_0(x, y)$ 是与条纹背景和对比度有关的缓变的信号, f_x 、 f_y 为条纹在 x 和 y 轴方向上的空间频率, $\varphi_0(x, y)$ 为载频条纹的初相位。

经被测对象(如物体面形、折射率场)调制后, 载频条纹场产生畸变, 可表示为

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi f_x x + 2\pi f_y y + \varphi(x, y)]. \quad (2)$$

式中 $a(x, y)$ 、 $b(x, y)$ 是与条纹背景和对比度有关的缓变的信号, $\varphi(x, y)$ 为经被测对象调制后产生的条纹相位。

条纹的畸变量可以用相位差 $\Delta\varphi(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi_0(x, y)$ 精确表示。相位解调算法只能给出在 $-\pi$ 到 $+\pi$ 范围内的相位包裹值 $\Delta\phi(x, y)$, 而实际相位值 $\Delta\varphi(x, y)$ 应为

$$\Delta\varphi(x, y) = 2n\pi + \Delta\phi(x, y), \quad (3)$$

其中 n 为整数。要得到真实的相位值 $\Delta\varphi(x, y)$, 必须通过相位去包以确定 n 值。通常的去包处理过程

如图 1 所示,将后一点的相位值与前一点的相位值进行比较,如落后 2π ,则将后一点的相位值加 2π ,如超前 2π ,则将后一点的相位值减 2π 。图 1(a)表示相位包裹值,图 1(b)表示去包后真实相位分布值。这种去包处理只适用于相位连续分布或相位突变量小于 2π 的情况,也就是条纹的畸变量不超过一个条纹间隔。如果在某处相位突变超过了 2π ,这种相位去包算法无法确定突变后的相位值,如图 2 所示。其中图 2(a)表示真实相位值,图 2(b)表示相位包裹值,图 2(c)表示去包后得到的错误相位分布值。

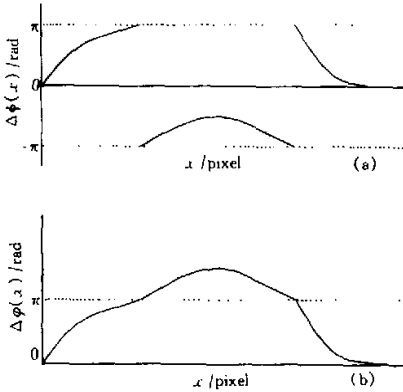


Fig. 1 Results of phase unwrapping for phase data with continuous distribution

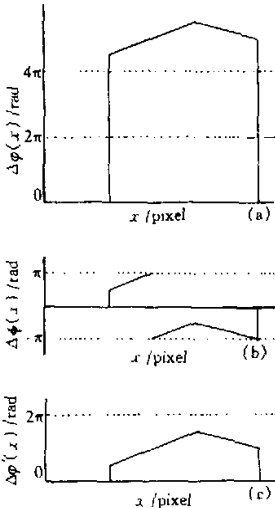


Fig. 2 Results of phase unwrapping for phase data with discontinuous distribution

解决单频空间载频条纹的相位不确定性问题,途径之一是采用彩色载频条纹,使得每根条纹能够分辨,如白光干涉条纹、彩色光栅投影条纹等,但条纹的形成和条纹的自动探测都使装置复杂化。时间

域的相位去包处理也可以解决这一问题^[10],但必须拍摄多幅条纹图,装置复杂且只能分析静态的对象。另一途径是采用下面将分析的双频空间载频条纹。

3 基于双频空间载频条纹的相位不确定性

对于两种不同频率的空间载频条纹,其强度可分别表示为

$$I_{01}(x, y) = a_{01}(x, y) + b_{01}(x, y) \cos[2\pi f_{1x}x + 2\pi f_{1y}y + \varphi_{10}(x, y)], \quad (4)$$

和

$$I_{02}(x, y) = a_{02}(x, y) + b_{02}(x, y) \cos[2\pi f_{2x}x + 2\pi f_{2y}y + \varphi_{20}(x, y)]. \quad (5)$$

经同一被测对象调制后,畸变的条纹场可分别表示为

$$I_1(x, y) = a_1(x, y) + b_1(x, y) \cos[2\pi f_{1x}x + 2\pi f_{1y}y + \varphi_1(x, y)], \quad (6)$$

和

$$I_2(x, y) = a_2(x, y) + b_2(x, y) \cos[2\pi f_{2x}x + 2\pi f_{2y}y + \varphi_2(x, y)]. \quad (7)$$

尽管条纹为二维分布,但表示条纹畸变量的相位差可沿一维 x 或 y 方向解调获得,分别为

$$\Delta\varphi_1(x, y) = \varphi_1(x, y) - \varphi_{10}(x, y), \quad (8)$$

和

$$\Delta\varphi_2(x, y) = \varphi_2(x, y) - \varphi_{20}(x, y). \quad (9)$$

相位包裹值分别为 $\Delta\phi_1(x, y)$ 和 $\Delta\phi_2(x, y)$, 且有

$$\Delta\varphi_1(x, y) = 2n_1\pi + \Delta\phi_1(x, y), \quad (10)$$

和

$$\Delta\varphi_2(x, y) = 2n_2\pi + \Delta\phi_2(x, y). \quad (11)$$

由于相位差 $\Delta\varphi_1(x, y)$ 和 $\Delta\varphi_2(x, y)$ 表示的条纹畸变是经同一被测对象调制后形成的,其值与空间载频条纹频率成正比,设相位沿 x 方向解调,那么有

$$\begin{aligned} [2n_1\pi + \Delta\phi_1(x, y)] \frac{1}{f_{1x}} &= \\ [2n_2\pi + \Delta\phi_2(x, y)] \frac{1}{f_{2x}}. \end{aligned} \quad (12)$$

重写(12)式有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left[\Delta\phi_1(x, y) - \left(\frac{f_{1x}}{f_{2x}} \right) \Delta\phi_2(x, y) \right] &= \\ \left(\frac{f_{1x}}{f_{2x}} \right) n_2 - n_1. \end{aligned} \quad (13)$$

由于 $\Delta\phi_1(x, y)$ 和 $\Delta\phi_2(x, y)$ 可以通过相位解调算法获得,(13)式左边为已知量,右边 n_1 和 n_2 为两未

知数,方程不能直接求解。但 n_1 和 n_2 为整数,在一定条件下,可对其求解。下面讨论求解条件和如何求解。

定义:

$$\Delta\phi = \frac{1}{2\pi} \left[\Delta\phi_1(x, y) - \left(\frac{f_{1z}}{f_{2z}} \right) \Delta\phi_2(x, y) \right], \quad (14)$$

和

$$T(n_1, n_2) = (f_{1z}/f_{2z})n_2 - n_1. \quad (15)$$

因为 n_1 和 n_2 为整数,对于任意的 n_1 和 n_2 ,根据(15)式可以列出一表格 $T(n_1, n_2)$,表格中给出的值为方程(13)左边即 $\Delta\phi$ 的可能值。如果表格中给出的值互不相等,可以通过查找表的方法,在表格中找出和 $\Delta\phi$ 相等的值,与这一值对应的 n_1 和 n_2 ,即为(13)式所求解的值。表格中给出的值是否互不相等,与频率 f_{1z} 和 f_{2z} 的比值有一定的关系。一般情况下, f_{1z}/f_{2z} 是一个实数,可以将它表示成一个连分数的形式:

$$\frac{f_{1z}}{f_{2z}} = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{c_n + \dots}}}, \quad (16)$$

这里 $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ 是整数。

如果 f_{1z}/f_{2z} 是一个有理数,(16)式表示的是一个有限连分数:

$$\frac{f_{1z}}{f_{2z}} = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{c_n}}}. \quad (17)$$

对于有限连分数,也可以表示成两个互质数之比

$$\frac{f_{1z}}{f_{2z}} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (18)$$

其中 m_1 和 m_2 是互质的整数。(18)式代入(15)式有

$$T(n_1, n_2) = (m_1 n_2 - m_2 n_1) / m_2. \quad (19)$$

可见,只有当 $0 \leq n_1 \leq m_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq m_2 - 1$; 或 $m_1 \leq n_1 \leq 2m_1 - 1, m_2 \leq n_2 \leq 2m_2 - 1$ 等时,表格中给出的值才互不相等。 n_1 和 n_2 的取值范围也可如图3表示,仅当 n_1 和 n_2 限定在图中每一个方格中取整数时,表格中给出的值才互不相等。这也是在这种情况下(13)式的求解条件。在这一条件下,能确定的相位范围为 $0 \leq \Delta\phi_1(x, y) < 2m_1\pi$ 和 $0 \leq \Delta\phi_2(x, y) < 2m_2\pi$; 或 $2m_1\pi \leq \Delta\phi_1(x, y) < 4m_1\pi, 2m_2\pi \leq \Delta\phi_2(x, y) < 4m_2\pi$ 等等。尽管相位的不确定性还是存在,但可测量的范围比单频空间

载频条纹增大了 m_1 和 m_2 倍。这也是 G-T 算法要求的频率之比等于两个互为质数的整数之比条件,在这里,我们从更一般性的角度推导出了这一条件。

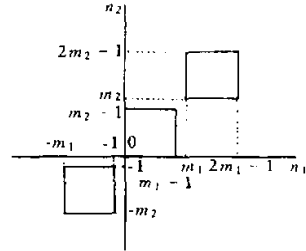


Fig. 3 The ranges of n_1 and n_2

如果 f_{1z}/f_{2z} 是一个无理数,(16)式表示的一定是一个无限连分数。此时,定义:

$$\frac{f_{1z}}{f_{2z}} = \mu, \quad (20)$$

其中 μ 是一个无理数。(20)式代入(15)式有

$$T(n_1, n_2) = \mu n_2 - n_1. \quad (21)$$

对于任意的 n_1 和 n_2 值,给出的 $(\mu n_2 - n_1)$ 值是互不相等的,也就是表格 $T(n_1, n_2)$ 给出的值是互不相等的。那么,在这种情况下(13)式可完全求解。由于 n_1 和 n_2 可取任意值,相位是完全可确定的,因此在理论上可测量的范围是无限的。当然,在实际测量中,测量范围还受光学系统的成像质量、记录系统的分辨率等限制。

4 基于两频率之比为无理数的空间载频条纹相位确定算法

前面我们已推导出,当两频率之比为无理数时,对于任意的 n_1 和 n_2 值,表格 $T(n_1, n_2)$ 给出的值是互不相等的。可以通过查找表的方法,在表格中找出和 $\Delta\phi$ 相等的值,与这一值对应的 n_1 和 n_2 ,即为(13)式所求解的值。(10)式和(11)式中的相位包裹值 $\Delta\phi_1(x, y)$ 和 $\Delta\phi_2(x, y)$,可以通过相移术或傅里叶变换法等相位解调算法解调出。这样,真实相位分布 $\Delta\phi_1(x, y)$ 和 $\Delta\phi_2(x, y)$ 可由(10)式和(11)式获得。

在具体制作表格 $T(n_1, n_2)$ 时,首先应确定表格的大小。尽管 n_1 和 n_2 可取任意值,但为了减少查表时间,可以先粗略估计被测对象的测量范围,来确定 n_1 和 n_2 的最大取值 N_1 和 N_2 。

另外,表格值 $\mu n_2 - n_1$ 中有一无理数 μ ,计算机在处理无理数时,会作位数截断,使其有理化,有理

化的结果也可用两互为质数的整数之比表示:

$$\mu \approx \frac{m_1}{m_2}. \quad (22)$$

将(22)式代入(21)式有

$$T(n_1, n_2) \approx (m_1 n_2 - m_2 n_1) m_2. \quad (23)$$

显然,相位的可确定范围将受 m_1 和 m_2 的限制。如果 $m_1 < N_1$ 和 $m_2 < N_2$, 被测对象的测量范围将超出 m_1 和 m_2 限制的相位可确定范围;但当 $m_1 \geq N_1$ 和 $m_2 \geq N_2$ 时,被测对象的测量范围在 m_1 和 m_2 限制的相位可确定范围之内,因此对相位的解调没有影响。由于在计算机中进行运算的双精度数有 16 位有效数字,因此计算机在对无理数有理化时,给出的有理数其 m_1 和 m_2 都比较大,一般情况下都可满足 $m_1 \geq N_1$ 和 $m_2 \geq N_2$ 的条件,故计算机在对无理数作位数截断时,一般不会影响到相位的解调。也可预先给定满足 $m_1 \geq N_1$ 和 $m_2 \geq N_2$ 条件的 m_1 和 m_2 值,以避免计算机在对无理数作位数截断时,可能发生的 $m_1 < N_1$ 和 $m_2 < N_2$ 情形。因为对任一无理数,都可用(16)式中的前 n 项有限连分数作为其渐近分数, n 越大则渐近程度越高,并且表示渐近分数的 m_1 和 m_2 也越大,如 $\sqrt{2}$ 的渐近分数为: $3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, \dots$ 。因此总可以预先找到一满足 $m_1 \geq N_1$ 和 $m_2 \geq N_2$ 条件的渐近分数,作为无理数的近似值,预先给定用计算机进行计算。

在实际测量过程中,测量误差是不可避免的,由实验测量值决定的 $\Delta f\phi$ 值一般不会严格地和表格 $T(n_1, n_2)$ 给出的值相等,因此在实施查表算法时,必须设置一阈值 τ , 当

$$|\Delta f\phi - T(n_1, n_2)| < \tau \quad (24)$$

时可以认为

$$\Delta f\phi = T(n_1, n_2). \quad (25)$$

阈值 τ 可由下式求得:

$$\tau = \frac{1}{2} \min[|T(n_1, n_2) - T(n_1', n_2')|], \quad (26)$$

其中 $\min[\cdot]$ 为取极小值运算。由(23)式可知

$$\tau = 1/2m_2. \quad (27)$$

5 实验及结果

图 4 表示光栅投影载频条纹用于测量具有突变高度的物体面形的实验装置示意图。实验采用投影和拍摄光轴交叉光路^[1]。条纹场用 CCD 拍摄,经图像卡转换为 8 比特 640×480 像素的数字图像,再送

入计算机处理。

为获得两频率之比为无理数的空间载频条纹图案,则其中一个条纹图案要在另一个条纹图案的基础上旋转一角度,如图 5 所示,图 5(a)和图 5(b)分别与 f_{1x} 和 f_{2x} 对应,在 x 方向的两频率之比 $f_{1x}/f_{2x} = \cos 26^\circ 1'$ 。

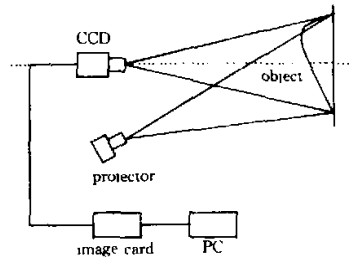


Fig. 4 Schematic diagram of experimental setup

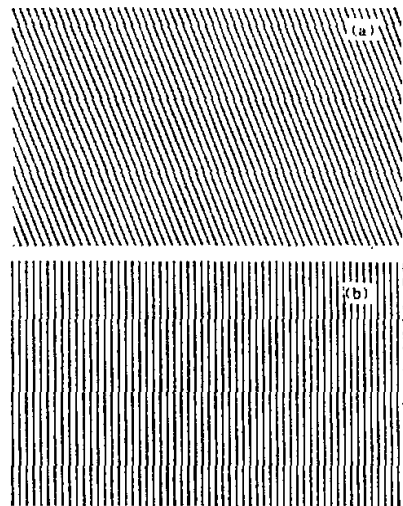


Fig. 5 Carrier fringe patterns with frequencies of (a) f_{1x} and (b) f_{2x}

图 6 表示投影在待测物体表面获得的条纹图案,图中包含一条阴影,其中图 6(a)和图 6(b)分别与 f_{1x} 和 f_{2x} 对应。

图 7 表示通过傅里叶变换法获得的、对应 $y = 255$ 像素的相位包裹值 $\Delta\phi_1(x, y)$ 和 $\Delta\phi_2(x, y)$, 其中图 7(a)和图 7(b)分别与 f_{1x} 和 f_{2x} 对应,图中阴影区的值是不可靠的。图 8 表示用查找表相位确定算法得到的、对应 $y = 255$ 像素的真实相位分布 $\Delta\varphi_1(x, y)$ 和 $\Delta\varphi_2(x, y)$, 其中图 8(a)和图 8(b)分别与 f_{1x} 和 f_{2x} 对应。图 9 表示根据相位与高度的关系获得的待测物体表面高度分布。

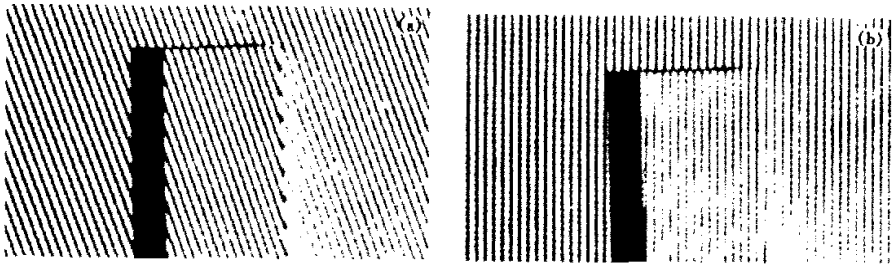


Fig. 6 Carrier fringe patterns projected upon an object surface with frequencies of (a) f_1 , and (b) f_2

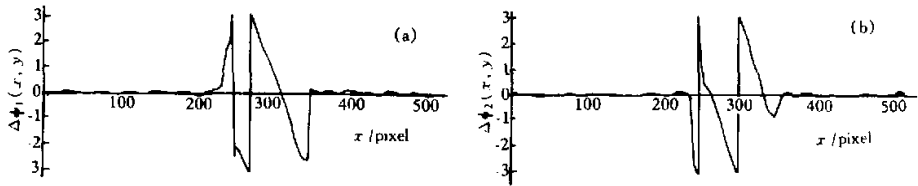


Fig. 7 Wrapped phase distributions at $y=255$ pixel, (a) $\Delta\phi_1(x, y)$ and (b) $\Delta\phi_2(x, y)$ by Fourier transform evaluation

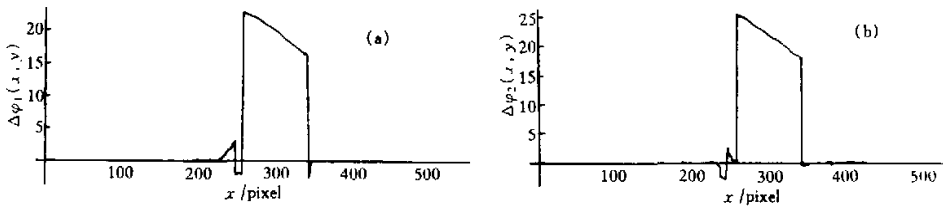


Fig. 8 Unwrapped phase distributions at $y=255$ pixel. (a) $\Delta\phi_1(x, y)$ and (b) $\Delta\phi_2(x, y)$ obtained by a lookup table method

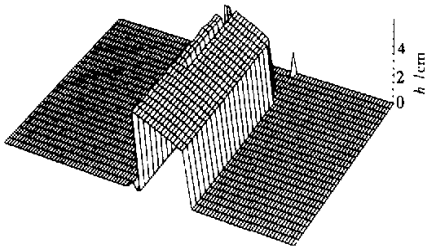


Fig. 9 The object surface's height distribution obtained by unwrapping phase distribution

结论 在双频空间载频条纹相位分析技术中,详细分析了两频率的比值与相位不确定性的关系,得出两频率之比为无理数时,相位可完全确定。并用查找表的方法实现了相位的自动解调。

参 考 文 献

- [1] Takeda M, Mutoh K. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes. *Appl. Opt.*, 1983, 23(24):3977~3982
- [2] Bruning J H, Herriott D R, Gallagher J E *et al.*. Digital

wavefront measurement interferometer for testing optical surfaces and lenses. *Appl. Opt.*, 1974, 13(11):2693~2703

- [3] Wang M, Zhong J. Subfringe integration profilometry of three dimensional diffuse objects. *Opt. Engng.*, 1997, 36(9):2567~2572
- [4] Sansoni G, Biancardi L, Minoni U *et al.*. A novel, adaptive system for 3-D optical profilometry using a liquid crystal light projector. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 1994, 43(4):558~565
- [5] Li J, Su H, Su X. Two-frequency grating used in phase-measuring profilometry. *Appl. Opt.*, 1997, 36(1):277~280
- [6] Zhao H, Chen W, Tan Y. Phase-unwrapping algorithm for the measurement of three-dimensional object shapes. *Appl. Opt.*, 1994, 33(20):4497~4500
- [7] Hao Y, Zhao Y, Li D. Multifrequency grating projectoin profilometry based on the nonlinear excess fraction method. *Appl. Opt.*, 1999, 38(19):4106~4110
- [8] Gushov V I, Solodkin Y N. Automatic processing of fringe patterns in integer interferometers. *Opt. Lasers Engng.*, 1991, 14(4,5):311~324
- [9] Takeda M, Gu Q, Kinoshita M *et al.*. Frequency-multiplex Fourier-transform profilometry: a single-shot three-dimensional shape measurement of objects with large height discontinuities and/or surface isolations. *Appl.*

Opt., 1997, 36(22):5347~5354

[10] Saldner H O, Huntley J M. Temporal phase unwrapping;

application to surface profiling of discontinuous objects.

Appl. Opt., 1997, 36(13):2770~2775

Phase Indeterminacy in Phase Analysis Methods for Spatial Carrier Fringe Pattern

Zhong Jingang Zhang Yonglin Li Fengli Di Hongwei

(*Department of Physics, Jinan University, Guangzhou 510632*)

(Received 9 November 1999; revised 22 February 2000)

Abstract: The phase indeterminacy of single frequency fringe pattern and bi-frequency fringe pattern in phase analysis method has been theoretically analyzed. The phase data can be determined when the ratio of two frequencies is an irrational number in spatial bi-frequency fringe pattern. A simple and robust phase unwrapping by a lookup table method for this bi-frequency fringe pattern is proposed. Experimental results are presented that demonstrate the validity of the method.

Key words: fringe analysis; phase indeterminacy; phase unwrapping; bi-frequency

【编者的话】

本刊加入“万方数据——数字化期刊群”的声明

为了实现科技期刊编辑、出版发行工作的电子化,推进科技信息交流的网络化进程,本刊现已入网“万方数据——数字化期刊群”,所以,向本刊投稿并录用的稿件文章,将一律由编辑部统一纳入“万方数据——数字化期刊群”,进入因特网提供信息服务。凡有不同意者,请另投它刊。本刊所付稿酬包含刊物内容上网服务报酬,不再另付。