

文章编号: 0253-2239(2001)05-0581-05

图像二维运动时的光学传递函数计算

王 俊 王家骥 卢 鐸

(中国科学院长春光学精密机械研究所计算机辅助设计研究室, 长春 130022)

王 昕

(吉林工业大学车辆工程系, 长春 130025)

摘要: 随着空间科学技术的发展,空间遥感、侦察的能力日益提高,对光学成像系统的分辨率的要求也越来越高。但是这种高分辨率成像系统的成像质量要受到机械振动的影响。可用运动光学传递函数来评价存在机械振动的光学系统的成像特性。本文探讨了计算运动光学传递函数的一种新方法——统计矩法,研究了当光学系统所成的像在二维方向上存在运动时的运动光学传递函数的解析与数值方法。该方法可以计算任何形式的图像运动导致的成像质量的下降,而且可以很方便地应用到一维运动的情况。

关键词: 图像运动; 光学传递函数; 统计矩法

中图分类号: TBl33 文献标识码: A

1 引 言

光学系统对景物所成影像的质量受到诸如景物对比度、光学成像、大气扰动、传感器的传递函数、像移补偿的优劣和航天器的机械振动等许多环节的影响。光学系统成像的各个环节,可以看作是空间物体的线性低通滤波器,因此它们的调制传递函数 M 服从如下分布^[1]:

$$M_s = M_o \times M_a \times M_v \times \dots, \quad (1)$$

其中 M_s 为系统总的调制传递函数, M_o 、 M_a 、 M_v 分别为光学系统、大气、振动的调制传递函数,由于机械振动造成的高分辨率光学传感器成像质量下降可能对整个系统的分辨率起到至关重要的作用。因此,对机械振动造成的像移以及由此带来的光学传递函数下降的分析越来越受到重视。目前对这方面的研究主要有以下两种方法。

第一种方法是根据目标通过光学系统成像后的调制度的变化推导解析光学传递函数表达式,可以用来计算匀速直线运动、高频正弦运动形式的图像运动的光学传递函数^[2,3],图像的匀速直线运动导致的光学传递函数为 $\text{sinc}(\pi f v t_e)$ 。而对于低频正弦运动,由于目标与像之间的相对运动与曝光时刻有关,所以很难用统一的传递函数来表示。Wulich 等^[4]采用了一种称为辨识概率的评价方法,通过辨识概率

来评价机械振动对成像质量的影响。

第二种方法是根据曝光时间内运动的概率密度函数计算运动光学传递函数的方法^[5]。这种方法的基本思想是:图像的运动概率密度函数相当于光学系统的扩散函数,而光学系统扩散函数的傅里叶变换就是光学系统的传递函数。对于这种方法,目前只应用于图像的一维运动,而且也只是应用于一些典型的运动形式如直线运动、高频正弦运动。对于低频正弦运动,这种方法根据不同的曝光时刻将曝光过程分成几种情况进行讨论,得到了不同曝光时刻的不同传递函数。

可见,上述两种方法的应用还限制在很小的范围内,对于实际的机械振动,运动形式是相当复杂的,比如包括随机振动、冲击响应的指数衰减振动。特别是对于二维运动形式,用上述方法很难解决。本文基于上述第二种方法的思想,研究了一种计算光学传递函数的新方法——统计矩法。这种方法并不需要计算运动的概率密度函数,而是运用概率论的理论,通过计算运动函数的各阶统计矩,直接得到系统的运动光学传递函数。这种方法的推导是在二维空间进行的,可应用于各种形式的运动。

2 运动光学传递函数计算模型

为了能用运动光学传递函数来描述更多种运动形式对成像质量的影响,而且使求解过程简化,本节

从分析运动的扩散函数入手,研究了用统计矩法计算运动光学传递函数的解析和数值方法,并对该方法的误差进行估计。

2.1 运动的扩散函数

设 $x(t)$ 、 $y(t)$ 是目标与像在垂直于光轴方向的相对运动。由于运动所形成的扩散函数可以描述空间频域内的成像质量的下降,所以首先对扩散函数进行分析。

若目标与像之间只存在一维运动 $x(t)$, 图像的运动导致系统的成像脉冲响应在空间运动。相机曝光的过程就是空间运动脉冲响应对应时间进行积分的过程。在曝光时间内, 脉冲响应的空间运动可用 $x(t)$ 的直方图来描述, 对于某一给定的 $x(t)$, 它所发生的频率是 x 的函数。

对于任意的运动, 都可以找到曝光时间内的 $x(t)$ 的概率密度函数。根据光学系统的线性特性, 当系统的脉冲响应运动时, 也就是由于物点与像面间的运动, 导致物点在像平面上成一系列的像。在像平面上的某一点, 可能同时存在物点的几次成像, 所成像点的数目决定于运动经过该点的次数。这些像的光强度在像平面上叠加。由此可见, 当运动在某一点 $x(t)$ 发生频率越大, 也就是物点在该点成像次数越多, 所叠加的光强度越大, 因此 $x(t)$ 的概率密度函数反映了像面上的光强分布。这与光学系统的线扩散函数是一致的。所以可以认为: 像点运动的线扩散函数就是在曝光时间内 $x(t)$ 的概率密度函数。

同理, 对于二维运动 $x(t)$ 、 $y(t)$ 同时存在的情况, 像点运动的点扩散函数就是在曝光时间内 (x, y) 的概率密度函数。

2.2 运动光学传递函数的解析表达式

运动光学传递函数 $\chi_o(f_x, f_y)$ 是点扩散函数 $\chi_p(x, y)$ 的傅里叶变换:

$$\chi_o(f_x, f_y) = \mathcal{F}[\chi_p(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_p(x, y) \exp[-2\pi j(f_x x + f_y y)] dx dy. \quad (2)$$

利用多重泰勒级数展开公式, 将其展开成麦克劳林级数的形式:

$$\begin{aligned} \chi_o(f_x, f_y) = & \chi_o(0, 0) + \left(f_x \frac{\partial}{\partial f_x} + f_y \frac{\partial}{\partial f_y} \right) \chi_o(f_x, f_y) \Big|_{f_x=0, f_y=0} + \\ & \frac{1}{2!} \left(f_x \frac{\partial}{\partial f_x} + f_y \frac{\partial}{\partial f_y} \right)^2 \chi_o(f_x, f_y) \Big|_{f_x=0, f_y=0} + \dots + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n!} \left(f_x \frac{\partial}{\partial f_x} + f_y \frac{\partial}{\partial f_y} \right)^n \chi_o(f_x, f_y) \Big|_{f_x=0, f_y=0} + R_n(f_x, f_y). \quad (3)$$

将(2)式代入到(3)式, 得到(3)式中的偏微分项(逐项进行讨论):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_o(f_x, f_y)}{\partial f_x} \Big|_{f_x=0, f_y=0} &= \frac{\partial}{\partial f_x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_p(x, y) \times \\ & \exp[-2\pi j(f_x x + f_y y)] dx dy \Big|_{f_x=0, f_y=0} = \\ & -2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \chi_p(x, y) dx dy. \quad (4) \end{aligned}$$

为将上式化简, 对点扩散函数 $\chi_p(x, y)$ 与线扩散函数 $\chi_L(x)$ 和 $\chi_L(y)$ 进行讨论。由点扩散函数与线扩散函数的关系可知:

$$\left. \begin{aligned} \chi_L(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_p(x, y) dy, \\ \chi_L(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_p(x, y) dx. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

根据概率论的边缘分布定义, $\chi_L(x)$ 和 $\chi_L(y)$ 分别为 (x, y) 关于 x 和关于 y 的边缘概率密度, 且有:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_p(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_L(x) dx = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \chi_L(y) dy &= 1, \quad (6) \end{aligned}$$

利用累次积分及(5)式, (4)式将变成:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_o(f_x, f_y)}{\partial f_x} \Big|_{f_x=0, f_y=0} &= 2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \chi_p(x, y) dx dy = \\ & -2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \chi_p(x, y) dy \right] x dx = \\ & -2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} x \chi_L(x) dx, \quad (7) \end{aligned}$$

同理, (3)式中的其他各项系数为:

$$\frac{\partial \chi_o(f_x, f_y)}{\partial f_y} \Big|_{f_x=0, f_y=0} = -2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} y \chi_L(y) dy, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_o(f_x, f_y)}{\partial f_x^2} \Big|_{f_x=0, f_y=0} = (-2\pi j)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \chi_L(x) dx, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_o(f_x, f_y)}{\partial f_y^2} \Big|_{f_x=0, f_y=0} = (-2\pi j)^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \chi_L(y) dy. \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \chi_o(f_x, f_y)}{\partial f_x \partial f_y} \right|_{f_x=0, f_y=0} = (-2\pi j)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \chi_p(x, y) dx dy. \quad (11)$$

按上述方法可对 $\chi_o(f_x, f_y)$ 进行第三阶、第四阶直至第 N 阶的泰勒级数展开。本文暂不列出。

由概率论可知, (7) 式 ~ (11) 式的积分可用统计平均和统计 N 阶矩表示:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \chi_L(x) dx &= E(x^n) = m_n', \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k \chi_p(x, y) dx dy &= \\ E(x^j y^k) &= m_{j,k}' \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

上式中 m_n' 表示随机变量 x 的统计 N 阶矩, 随机变量 x, y 的 $(j+k)$ 阶混合矩用 $m_{j,k}'$ 表示。同时, 也可在时域中表示上述积分, (12) 式可写成:

$$\left. \begin{aligned} m_n' &= E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(t) dt = \\ &= \frac{1}{t_c} \int_{t_i}^{t_i+t_c} x^n(t) dt, \\ m_{j,k}' &= E(x^j y^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^j(t) y^k(t) f(t) dt = \\ &= \frac{1}{t_c} \int_{t_i}^{t_i+t_c} x^j(t) y^k(t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中, $f(t)$ 是时间的概率密度函数, 在曝光时间 t_c 内, $f(t) = 1/t_c$ 。此时便将光学传递函数的计算同像的移动结合在一起。

$$\begin{aligned} \chi_o(f_x, f_y) &= \chi_o(0, 0) + (-2\pi j)(f_x m_1' + f_y m_1') + \\ &= \frac{1}{2!} (-2\pi j)^2 (f_x^2 m_2' + f_y^2 m_2' + 2f_x f_y m_{1,1}'') + \\ &= \frac{1}{3!} (-2\pi j)^3 (f_x^3 m_3' + f_y^3 m_3' + 3f_x f_y^2 m_{1,2}'') + \\ &= 3f_x^2 f_y m_{2,1}' + \\ &= \frac{1}{4!} (-2\pi j)^4 (f_x^4 m_4' + f_y^4 m_4' + \\ &= 4f_x f_y^3 m_{3,1}' + 6f_x^2 f_y^2 m_{2,2}' + \dots + R_m). \end{aligned} \quad (14)$$

由(14)式可见, 运动的像的光学传递函数可通过计算像面上像点二维运动的各阶统计矩得到。而统计矩可通过曝光时间内的运动函数进行计算。对于可用函数表示的连续运动, 可将运动的时间函数直接代入(13)式和(14)式, 求得像点运动的光学传递函数。

2.3 运动光学传递函数的数值方法

对于运动的离散采样序列来说, 不能直接通过(13)式得到运动的统计矩。

根据概率论可知: 若曝光时间 t_c 内, 得到运动的采样序列

$$\{x_i\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, S),$$

则运动的 N 阶统计矩可由下式进行计算:

$$\left. \begin{aligned} m_n' &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S x_i^n, \\ m_{j,k}' &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S x_i^j y_i^k. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

2.4 对泰勒级数展开式余项的讨论

若将 $\chi_o(f_x, f_y)$ 的泰勒级数展开式在第 N 阶截断, 则其余项可表示为:

$$R_m = \frac{1}{(n+1)!} \left(f_x \frac{\partial}{\partial f_x} + f_y \frac{\partial}{\partial f_y} \right)^{n+1} \times \chi_o(f_x, f_y) \Big|_{f_x=\theta f_x, f_y=\theta f_y} \quad (0 < \theta < 1). \quad (16)$$

对(16)式展开化简后, 得到泰勒级数展开的拉格朗日型余项公式为:

$$|R_L(N)| \leq \sum_{p=0}^{n+1} (2\pi)^{n+1} A_p M_p' M_{n+1-p}'', \quad (17)$$

其中,

$$A_p = \frac{1}{(n+1)!} C_{n+1}^p f_x^p f_y^{n+1-p},$$

$$M_p' = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p |\chi_L(x)| dx,$$

$$M_{n+1-p}'' = \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{n+1-p} |\chi_L(y)| dy.$$

当已知 $x(t), y(t)$ 后, 通过(17)式便可以求出泰勒级数展开式的余项, 由此来判断泰勒级数展开的项数, 然后得到运动光学传递函数。

3 对统计矩法的应用与验证

本文以图像的匀速直线运动为例, 用统计矩法计算二维的运动光学传递函数。如图 1 所示, 图像在 $x-y$ 平面内沿 r 方向作匀速直线运动, 运动方向与 x 轴夹角为 α , 运动速度 v , 则 x 和 y 方向的分速度分别为 $v_x = v \cos \alpha, v_y = v \sin \alpha$ 。

在曝光时间内对图像的运动进行采样, 通过(15)式计算运动的各阶统计矩, 然后利用(14)式计算出这一运动形式下的运动光学传递函数如图 2 所示(图像运动速度为 1 mm/s, 曝光时间为 0.01 s, 空

间频率单位为(1/mm)。

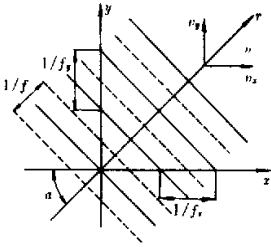


Fig. 1 The notion of image

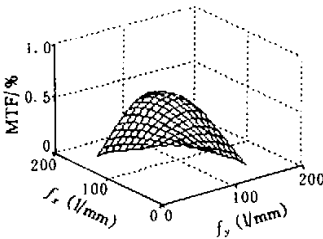


Fig. 2 Two-dimensional MTF

图3为计算光学传递函数时选取不同截断阶次所导致的截断误差,说明这种方法能以较快速度收敛。

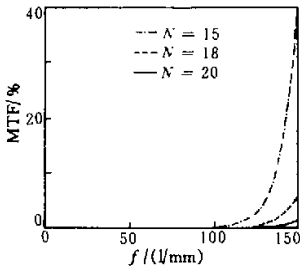


Fig. 3 Truncated error

由于至今没有关于图像运动的二维光学传递函数的成型结论,所以本文采用穷举法进行验证。设一正弦光栅沿 r 向的空间频率为 f , 与 r 垂直的方向上的空间频率为 0(图1), 沿 x 和 y 方向的空间频率分别为 $f_x = f \cos \alpha$, $f_y = f \sin \alpha$ 。对于同一个运动来讲,用二维方式求解的运动光学传递函数应和 r 方向上的一维运动光学传递函数等价^[6]。也就是将 f 、 v 代入 $\text{sinc}(\pi f v t_e)$ 得到运动光学传递函数的解,与将 f_x 、 f_y 、 v_x 、 v_y 代入到(17)式得到的解在数值上应该是一致的。

图4是两种计算方法的结果比较。需要说明的是,当图像运动方向不同时,产生不同的计算结果,经过大量的计算验证,当运动方向不同时,统计矩法始终保持与现有方法计算结果吻合,所以,本文仅列出了 $\alpha = 45^\circ$ 时的计算结果对比。图中纵坐标是计算

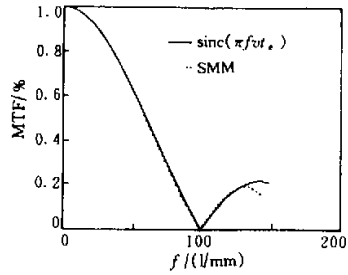


Fig. 4 Comparison of different methods

的运动光学传递函数值,但两条曲线的横轴是不同的, $\text{sinc}(\pi f v t_e)$ 曲线的横坐标为 f , 而统计矩法(SMM)曲线的横坐标为 $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$, 这样将统计矩法的 f_x 和 f_y 两个自变量统一起来,更便于与 $\text{sinc}(\pi f v t_e)$ 曲线进行比较。比较结果可见本文所探讨的方法的精确性。

结论 本文对运动光学传递函数进行了数值分析。这一方法利用运动函数的概率密度是光学系统的运动扩散函数这一思路,进而对扩散函数进行傅里叶变换,得到运动光学传递函数。本文的统计矩法不直接计算运动的概率密度函数,而是通过计算运动的各阶统计矩来求解。这种方法对于各种形式的图像运动都可以很方便地进行分析,尤其对于图像的二维运动,在得到两个垂直方向上的分速度后直接求解,迅速简洁,收敛速度较快。实际应用和验证表明,用统计矩法分析图像二维运动对成像质量的影响是有效、合理的。

参 考 文 献

- [1] 蒋筑英,李敏白,向才新等.用光学传递函数评价成像质量.光学系统成像质量评价及检验文集.北京:中国计量出版社,1988.86~103
- [2] Trott T. The effects of motion in resolution. *Photo. Engng.*, 1960, 26(2):819~827
- [3] Hadar O, Fisher M, Kopeika N S. Image resolution limits resulting from mechanical vibrations, part III: Numerical calculation of modulation transfer functions. *Opt. Engng.*, 1992, 31(3):581~589
- [4] Wulich D, Kopeika N S. Image resolution limits resulting from mechanical vibrations. *Opt. Engng.*, 1987, 26(3):529~533
- [5] Hadar O, Dror I, Kopeika N S. Numerical calculation of image motion and vibration modulation transfer functions—A new method. *Proc. SPIE*, 1991, 1533:61~74
- [6] 杨志文.光学测量.北京:北京理工大学出版社,1995.290~295

Calculation of Optical Transfer Function with Two-Dimensional Image Motion

Wang Jun Wang Jiaqi Lu E

(*Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022*)

Wang Xin

(*Automobile Engineering College, Jilin University of Technology, Changchun 130025*)

(Received 3 December 1999; revised 6 February 2000)

Abstract: With the developing of space science and technology, the ability of remote sensing and reconnaissance are improved. So higher resolution capability of image system is needed. The resolution of some image system is high in static condition. But image motion or mechanical vibration limits the resolution. The degradation of image quality as a result of motion in the image plane can be evaluated by optical transfer function of motion. A new method to calculate optical transfer function——statistic moments method is discussed. Analytical and numerical methods to calculate optical transfer function of motion are studied when the image moves in the image plane two-dimensionally. This method can be used to calculate the degradation of image quality as a result of any kind of image motion in the image plane, and easily used in the case of one-dimensional motion.

key words: image motion; optical transfer function; statistic moments method