

文章编号: 0253-2239(2001)05-0545-07

自适应光学系统的数值模拟: 噪音和探测误差的效应

陈 涉 严海星 李树山

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要: 噪音和探测误差是影响自适应光学系统性能的三个主要因素之一。噪音和探测误差使哈特曼-夏克(Hartmann-Shack)波前传感器所测得的倾斜量产生误差,进而影响整个自适应光学系统的性能。建立了对噪音和探测误差对哈特曼-夏克波前传感器的影响进行数值模拟的理论模型,编制了计算程序,与已有的激光大气传输与自适应光学系统的计算程序相衔接,进行了模拟计算,对有限的离散采样、读出噪音和光子噪音的效应作了数值模拟研究。获得了一些对实际的自适应光学系统的最佳设计有价值的结果。

关键词: 自适应光学; 噪音和测量误差; 数值模拟

中图分类号: '11'202'.7 文献标识码: A

1 引言

自适应光学系统可实时探测和校正相位波前,对改善光波穿过湍流大气的传输、减弱大气湍流的有害影响有重要的作用,在天文观测^[1,2]和激光传输^[1-3]中得到了广泛的应用。实际的自适应光学系统及其工作状态不可能是理想的,从而使相位补偿效果受限。其不足体现在三个方面:自适应光学系统相位探测单元和相位补偿单元的个数有限,使系统空间带宽有限^[4,5];自适应光学系统的响应速度有限,造成时间延迟,使所得到的校正相位波前与需要校正的相位波前有差别,在实际效果上体现在由于靶的运动和横向风的作用使相位补偿效果明显变坏^[4,5],即自适应光学系统只有有限的时间带宽;噪音和测量误差对自适应光学系统性能的影响,主要体现为使哈特曼-夏克波前传感器确定出的光心不准。经分析,可把第三方面(噪音和测量误差对自适应光学系统的影响)分成三部分^[6,7]:个数有限的离散采样所造成的误差(包括两部分:子孔径的个数有限,及用来探测每个子孔径光心的(CCD)像素的个数有限,前者是另文^[4,5]的讨论内容,这里仅讨论后者的影响),读出噪音和光子噪音。文中将首先对这三部分进行理论分析,对读出噪音和光子噪音得出解析式。在理论分析的基础上,提出对三部分影响进行数值模拟的理论模型,引入到已有的自适应光学模拟中^[4,5],编制了计算程序,得到了一批计算结果,给出一些对实际的自适应光学系统有价值的建议。

2 理论分析和计算方案

造成探测误差的原因主要有两方面。首先,对每个子孔径测定光心时采用了离散的、个数有限的CCD像素;其次,像素与像素之间存在死区^[6-8]。参见图1(图中的阴影部分表示CCD像素的活性区域)。对探测误差这一因素的影响不容易获得准确的解析公式;而在数值模拟中,可以方便地对经湍流畸变的光束按照实际的自适应光学系统的每个子孔径所对应的CCD像素的分布进行数值计算(光束聚焦到CCD靶面上,再由各像素上探测到的光电子事件数求出光心的位置,进而得出波前倾斜量),把采样误差的影响自然地完全包括进来。

读出噪音和光子噪音的影响是通过每个像素上的光电子事件数的影响体现出来的^[6,8]。没有误差时,光心位置可以由下面的公式算出:

$$x_c = \frac{\sum_{i,j} x_i n_{ij}}{\sum_{i,j} n_{ij}}, \quad y_c = \frac{\sum_{i,j} y_i n_{ij}}{\sum_{i,j} n_{ij}}, \quad (1)$$

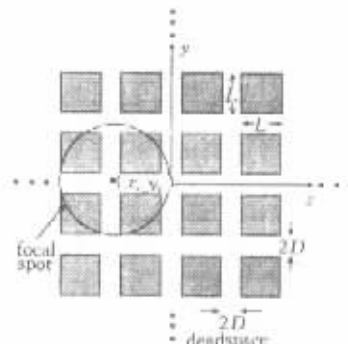


Fig. 1. Diagram of detecting the optical centroid by means of a discrete CCD array

其中 x_i, y_i 和 n_{ij} 分别为第 i 行第 j 列像素的坐标和所探测到光电子事件数, N 为用于每个子孔径的像素总个数。若仅考虑光子噪声和读出噪声的效应, n_{ij} 的方差为

$$\sigma_{n_{ij}}^2 = \sigma_p^2 + \sigma_r^2, \quad (2)$$

其中, σ_p^2 表示读出噪声的方差, σ_r^2 表示光子噪声的方差(光子噪声服从泊松分布, 而泊松分布的方差等于平均值, 即 $\sigma_p^2 = n_{ij}$)。可以推导出 x_c 的方差

$$\sigma_{x_c}^2 = (r_x^2 + \sigma_r^2 f) / \sum_{i,j} n_{ij}, \quad (3)$$

其中 $r_x = (\bar{x}^2 + \bar{x}^2)^{1/2}$,

$$f = \left(\sum_{i,j} x_i^2 + N\bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum_{i,j} x_i \right) / \sum_{i,j} n_{ij}, \quad (5)$$

$$\bar{x} = \left(\sum_{i,j} x_i n_{ij} \right) / \sum_{i,j} n_{ij}, \quad (6)$$

$$\bar{x}^2 = \left(\sum_{i,j} x_i^2 n_{ij} \right) / \sum_{i,j} n_{ij}. \quad (7)$$

(3) 式就是光子噪声和读出噪声在一个子孔径内造成的 x_c 的误差的解析表达式。 y_c 的误差有完全类似的表达式。在进行数值计算时, 我们也采用了这种方案, 称之为公式实现法。具体作法是: 利用(3)式求出 x 方向上光心位置改变量的方差, 再假设这个随机过程服从高斯分布, 随机地得出某一次湍流实现中该子孔径的 x_c 。由于读出噪声和光子噪声的效应所造成的改变, 加到无噪声的 x_c 上, 得到包括噪声效应的光心位置; 并对 y_c 进行类似的计算。后面的计算结果表明, 这种解析表达式在信噪比较高的情况下, 是一种很好的近似; 但当信噪比较低时, 将与实际情况存在一定的偏差。这是由于: 在得到(3)式的推导过程中引入了一些近似; 并且, 在具体计算中, 简单地用高斯分布来替代一个并不明确的随机过程。(3)式给出的方差的解析表达式, 在很多场合(如系统评价、误差估计)会十分有用; 为了节省模拟计算时间, 公式实现法也不失为一种好的替代方法。

在自适应光学系统的数值模拟中可以直接对读出噪声和光子噪声的效应进行数值计算。具体的过程是: 在(1)式中考虑到由于存在方差为 n_{ij} 的服从泊松分布的光子噪声和方差为 σ_r 的服从高斯分布的读出噪声, 而在光电子事件数上增加了一个随机增量 Δn_{ij} , 将无噪声效应的 n_{ij} 加上此随机增量再代入(1)式中, 直接得出包括噪声效应的光心位置。这样所得到的 x_c 和 y_c 将比较准确地表现读出噪声和光子噪声的效应。我们把这种方案称为统计实现法。

对探测误差和噪声效应的数值模拟与我们已有的对激光大气传输和静态自适应光学系统的数值模拟^[4,5]结合起来, 可以对探测误差和噪声效应进行数值模拟研究。我们对激光大气传输和静态自适应光学系统的数值模拟的人意是: 经过大气湍流传输的信标光波的相位波前发生了畸变, 进入自适应光学系统后被由多个子孔径组成的分割镜分割后, 分别聚焦到一定数量的离散的 CCD 像素上成像, 测量出光心相对于无相位畸变时的偏移量, 经过自适应光学系统的相位复原和相位校正后, 相位预先作了校正的发射光波在由于横向风和/或靶目标的运动等原因在一定的延迟时间内造成了一定改变(这种改变通常体现为描述大气湍流的相屏的横向移动)的湍流介质中再次传输, 把靶面上多幅(与多次湍流实现对应, 本文采用 100 次湍流实现的平均)相位补偿光波的光强彼此叠加, 由此长时间曝光的图像可以确定出光心。以此光心为圆心、以在真空中传输所得到的艾里(Airy)斑第一暗环半径为半径的圆内光强的积分与真空传输的艾里斑主瓣内光强积分之比被定义为长时间曝光环能量斯特列耳(Strehl)比, 在本文中用 S 表示。在实验上经常用此长时间曝光光心环能量斯特列耳比表示自适应光学系统的相位校正效果。我们也类似地采用 S 作为比较探测误差和噪声效应的一个重要的评价标准。

在本文中采用的比较探测误差和噪声效应的另一个评价标准被称为相对误差。它是第 k 次采样的第 l 个子孔径由于引入噪声和采样误差所造成的光心偏移量 x'_{ckl}, y'_{ckl} 与原始计算中即在未引入探测误差和噪声效应的条件下(当光波传输的计算格点数为 256×256 时, 对应于每个子孔径的计算格点数为 64×64 , 当光波传输的计算格点数为 512×512 时, 对应于每个子孔径的计算格点数为 128×128), 所得到的光心偏移量 x_{ckl}, y_{ckl} 之间的相对偏差。百分相对误差的计算公式为:

$$E_r(\%) = \frac{100}{L} \left\{ \sum_{l=1}^L \frac{1}{K} \times \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \left[\frac{(x'_{ckl} - x_{ckl})^2}{x_{ckl}^2} + \frac{(y'_{ckl} - y_{ckl})^2}{y_{ckl}^2} \right] \right\}, \quad (8)$$

K 为波前传感器的子孔径总数, L 为总的采样次数。

在下一节中, 以(8)式定义的相对误差和长时间曝光光心环能量斯特列耳比 S 作为评价参数, 列出了探测误差和噪声的某个因素对自适应光学系统的影响。显然, 相对误差 $E_r(\%)$ 可以直接描述该单个因素造成的光心偏移量的改变; 但是, 仅只用这一

参数难以看出该因素对自适应光学系统的最后效果的影响。而 S 是描述自适应光学系统的相位补偿的最终效果的参数，也是自适应光学系统使用者最关心的综合性能指标。尽管，影响 S 的因素很多，也很复杂；但是，在下一节中列出的大多为关于单个因素的影响的结果；所以，由所列出的某个因素对 S 的影响可以评估那个因素对人们感兴趣的自适应光学系统的相位补偿效果的影响。而且，由后面的计算结果可以看到，相对误差远比 S 灵敏。也就是说，在一些条件下，某个因素对相对误差有很大的影响，而对 S 没有明显的影响。把这两个评价参数结合起来，可以更好地评价探测误差和噪音的单个因素或多个因素所造成的误差和对自适应光学系统性能的影响。

3 计算结果

本节中，首先比较不同计算格点密度对计算结

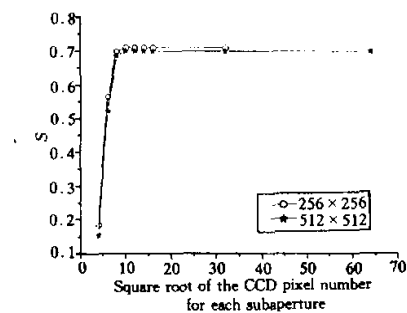
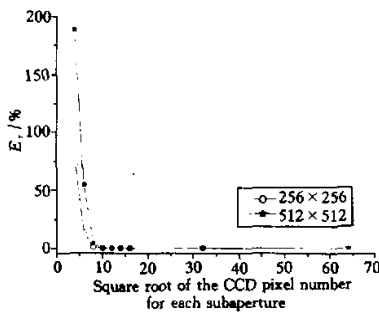


Fig.2 Effects of computation grid density on the computational results of numerical simulation. Horizontal propagation of a laser beam within distance of one kilometer, focused beam, wavelength of both beacon beam and main laser beam is 0.6328 micrometer, 10 phase screens, $c_n^2 = 10^{-14.5} \text{ m}^{-2/3}$, atmospheric coherence length $r_0 = 9.63 \text{ cm}$; adaptive optics system of 61 units (with 48 subapertures), there is no deadspace between the CCD pixels, without the readout noise and the photon noise, lateral wind speed $v = 3 \text{ m/s}$, the delay time $t = 5 \text{ ms}$, 100 turbulence realizations

2) 光斑半径对于校正效果的影响

在数值模拟计算中，当用于每个子孔径探测的 CCD 像素数(采样密度)改变时，在每个子孔径的焦平面(即 CCD 靶面)上光斑半径的不同，即聚焦光斑

的影响，以及子孔径聚焦光斑大小对计算结果的影响。由于噪音和测量误差的影响都不是孤立存在的，彼此之间有许多交叉因素，为了清楚起见，把它们分为四个部分讨论：离散及有限采样的误差；读出噪音的影响；光子噪音的影响；三个因素的综合效应。最后，比较统计实现法与公式实现法的差异。

1) 计算格点密度对于计算结果的影响

在数值计算中必须选择一个适当的计算格点密度，计算格点密度过大会使得计算时间不必要地加长，计算格点密度过小又会使计算结果不能准确地反映噪音和探测误差的影响。图 2 比较了两种不同的计算格点密度的结果。从图 2 看到，两种计算格点密度的结果是可以比较的。特别是当每个子孔径的像素数较大时，两条曲线的差异基本可以忽略。为了比较准确地反映实际情况，在以下的计算中，光波传输的计算格点数采用了较大的值(512×512)。

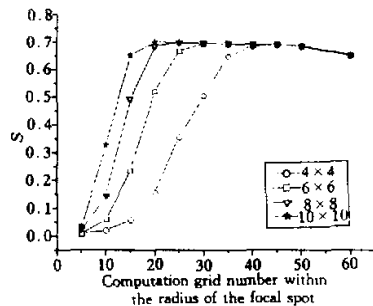
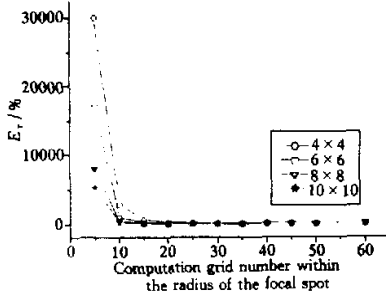


Fig.3 Effects of the radius of focal spot for each subaperture on the computational results of numerical simulation. Computational conditions; same as those in Fig. 2

与 CCD 像素的大小的相对比较不同，会使相位探测和校正的效果不同。我们对感兴趣的几种采样密度进行了计算，结果示于图 3。

应该说明,图 3 中的方框内列出的是用于每个子孔径探测的 CCD 像素数,而用来计算每个子孔径聚焦的计算网格点数为 128×128 。通常,此计算网格点数大于 CCD 像素数,这就是说,一个 CCD 像素内可能包含多个计算网格点。图 3 显示,对每个采样密度存在一个最佳光斑半径(以光斑半径内的计算网格点数表示),在此条件下校正效果达到最佳。在下面的计算中,将在这种最佳条件下对不同的采样密度进行计算。

3) 离散及有限采样的误差

这部分包括两个主要因素:采样密度(用每个子孔径所对应的 CCD 像素数表示)和 CCD 像素之间的死区大小。

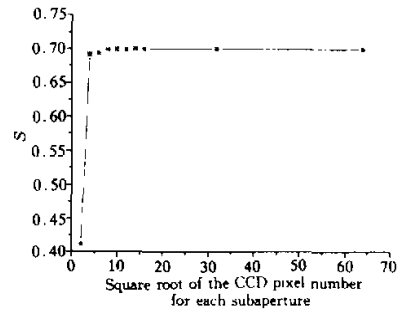
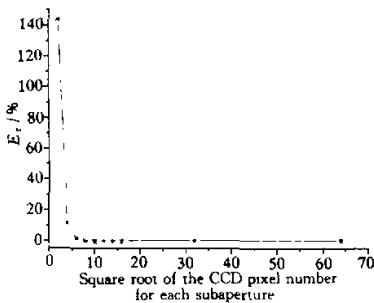


Fig. 4 Effects of the CCD pixel number for each subaperture on the computational results of numerical simulation.

Computational conditions: same as those in Fig. 2

(ii) CCD 像素之间的死区

以下各图中的方框内列出的是用于每个小孔径探测的 CCD 像素数,即采样密度。从图 5 中可以看到,采样密度不同时,死区大小对于系统的影响也是不同的。死区大小用死区比例表示。死区比例定义为死区长度与每个像素的总长度之比。在图 1 中,此比例为 $2D/(2D+L)$ 。随着采样密度不断减少,死区大小的影响不断加大。在像素数较大(8×8)的情况下,即使死区比例达到 0.50,对于自适应光学

系统的性能仍没有非常恶劣的影响。当然,随着死区面积不断增加,相应的 CCD 有效探测面积会不断减少,会使本来非常有限的光电子事件数可以被探测到的部分进一步减少,将使得与光电子事件数有关的噪音增加。在像素数较少的情况下(4×4),死区的影响就比较突出。从实用的角度看,通常的死区比例都在 0.125 以下,在这种情况下死区的影响都是比较小的。

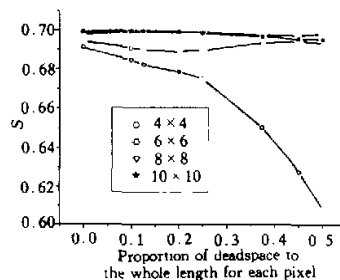
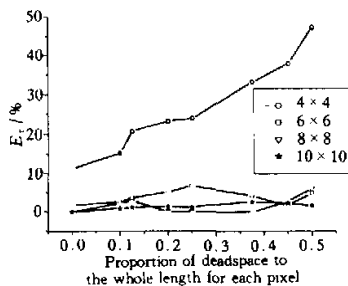


Fig. 5 Effects of the deadspace between two CCD pixels on the computational results of numerical simulation. Computational conditions: same as those in Fig. 2 except for those indicated in the figure

除上述两个因素外,实际的自适应光学系统中还存在另外一些因素,例如 CCD 像素的几何尺寸和

性能的不均匀,个别像素的缺失,以及死区大小的不均匀,等等。这些都会对自适应光学系统的探测结果带来不利的影响。利用本文的数值模拟方法可以方便地对这些因素进行定量的评估和研究。

4) 读出噪音的影响

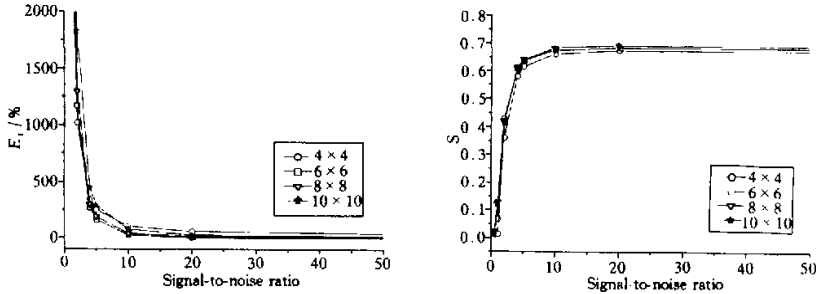


Fig. 6 Effects of the readout noise on the computational results of numerical simulation. Computational conditions: without the photon noise, proportion of the deadspace is 0.125, counts of photon events for each CCD pixel are 10, others are same as those in Fig. 2 except for those indicated in the figure

5) 光子噪音的影响

图 7 的结果和图 6 的结果非常类似,同样可以看出信噪比(信噪比 = $n_p/\sqrt{n_p}$)的水平起到了决定性的作用。当信噪比达到一定水平以后,校正效果

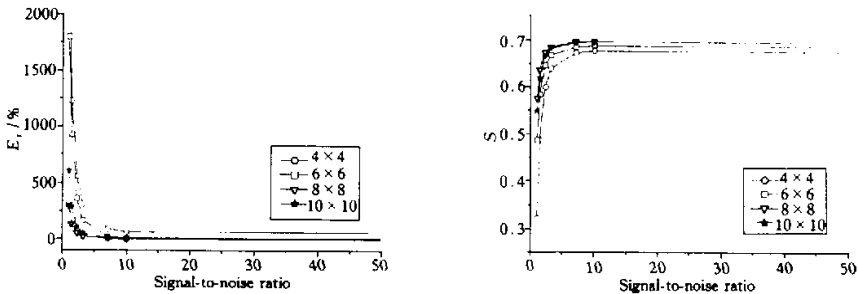


Fig. 7 Effects of the photon noise on the computational results of numerical simulation. Computational conditions: without the readout noise, proportion of the deadspace is 0.125, others are same as those in Fig. 2 except for those indicated in the figure

6) 三个因素的综合效应

上面分别讨论了离散及有限采样、读出噪音和光子噪音三个因素的影响,但是对自适应光学系统真正起作用的是以上三个因素的综合效应。由上面的计算可以知道,CCD 像素之间的死区大小在实用上对于自适应光学系统性能的影响并不大,所以,为了使系统的性能得到提高可以改变的因素只有三个:(i) 信噪比(当读出噪音和光子噪音共同作用时,信噪比为 $n_p/\sqrt{n_p + \sigma_r^2}$);(ii) 用于每个子孔径的 CCD 像素数;(iii) 由于 CCD 像素数变化所引起的延迟时间的相应变化。

首先来考察信噪比对于自适应光学系统性能的影响。从图 8 的计算结果可以看出,在其它情况确定的前提下,为了达到一定的校正效果,自适应光学

由图 6 可以看出当信噪比(信噪比 = n_p/σ_r)达到一定水平以后,校正效果(斯特列耳比)以及相对误差都趋于一个稳定值。虽然在计算过程中选取了一个比较典型的无误差时的光电子事件数,但实践中这个数量的选取是受到信噪比制约的。

(斯特列耳比)以及相对误差都趋于一个稳定值。由于光子噪音仅和光电子事件数相关,所以为了减少光子噪音的影响必须使光电子事件数达到一定的水平。

系统的信噪比不能太小;如果信噪比过小,自适应光学系统的误差将变得无法接受;当高于一个阈值(在这里,信噪比的阈值大约为 10)以后,自适应光学系统的性能的提高也十分有限。

以上所有的讨论都是针对自适应光学系统的校正能力,还没有涉及当用于每个子孔径的 CCD 像素数变化时自适应光学系统延迟时间的相应变化。下面我们将引入这一因素进一步地研究自适应光学系统性能与噪音和探测误差之间的关系。在这里,我们假设自适应光学系统的延迟时间和 CCD 总采样时间与用于每个子孔径的 CCD 像素数成正比。虽然这个假设可能与实际情况有一定差距,但对于自适应光学系统的分析看,这种假设在很大程度上是合理的。另外假定:当用于每个子孔径的 CCD 像素

数为 8×8 时,自适应光学系统的延迟时间为 5 ms。

图 9 给出了读出噪声较小和较大的典型条件下多种因素综合效应的数值模拟计算结果。由图 9 可

看出,信噪比对计算结果有明显的影响;不论读出噪声较大还是较小,只要信噪比相同,就有大致相同的校正效果。

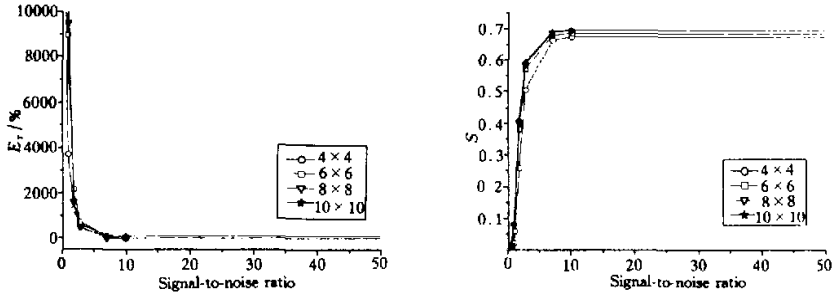


Fig.8 Effects of the photon noise and the readout noise on the computational results of numerical simulation. Computational conditions; proportion of the deadspace is 0.125, $\sigma_r = 2$, others are same as those in Fig. 2 except for those indicated in the figure

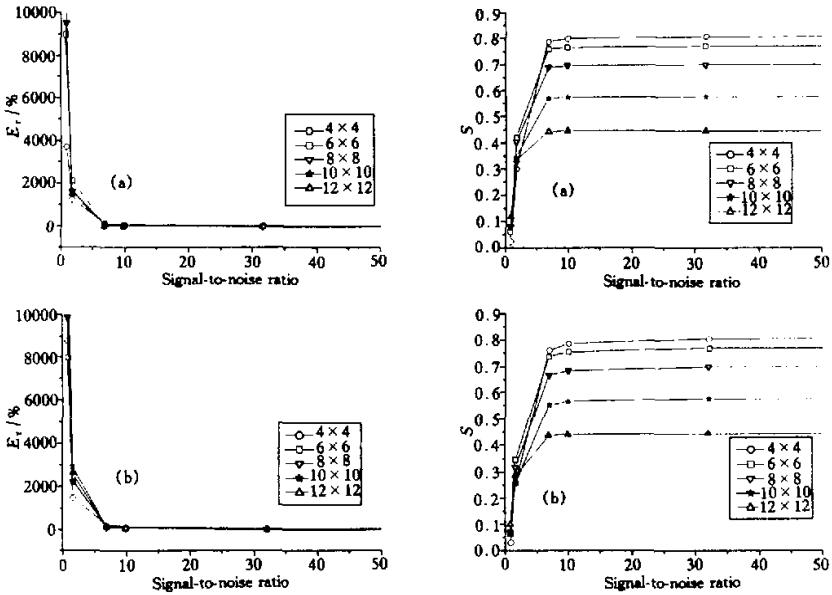


Fig.9 Comprehensive effects of several factors on the computational results of numerical simulations. (a) $\sigma_r = 2$; (b) $\sigma_r = 30$. Computational conditions; proportion of the deadspace is 0.125, the delay time when the pixel number for each subaperture is 4×4 is 1.25 ms, the delay time for the pixel number of 6×6 is 2.81 ms, the delay time for the pixel number of 8×8 is 5 ms, the delay time for the pixel number of 10×10 is 7.81 ms, the delay time for the pixel number of 12×12 is 11.3 ms, others are same as those in Fig.2 except for those indicated in the figure

由图 9 还可以看出,当用于每个子孔径的 CCD 像素数达到 4×4 以后,自适应光学系统基本上已经能够达到必要的探测精度,而由于自适应光学系统的校正能力很大程度上取决于自适应光学系统延迟时间,使得 CCD 像素数的减少相应地带来的自适应光学系统延迟时间上的收益大于探测精度的降低。总之,为了使自适应光学系统处在最佳工作状态,需要综合考虑几个相关因素。

7) 与公式法的比较

表 1 列出的是本文所采用的统计实现方法与公式实现法结果的比较。其中无误差的结果为不包括探测误差和噪声效应的原始计算结果。由表 1 可以看到,当信噪比较大时,基于公式实现法所得到结果与文中所采用的统计实现法相比基本没有偏差;当信噪比较小时,公式法的结果与统计实现法相比存在一定的差别。

Table 1. Comparison of computational results of numerical simulation by using statistics method with that by using formulation method

signal to noise ratio	statistics method		formulation method	
	E_r (%)	S	E_r (%)	S
no error	0	0.6996	0	0.6996
10000	2.891	0.6993	2.883	0.6993
9.806	1.292×10^1	0.6948	1.268×10^1	0.6981
6.804	3.420×10^1	0.6884	4.019×10^1	0.6954
2.673	4.679×10^2	0.5869	7.342×10^2	0.6367
1.667	1.161×10^3	0.4025	2.775×10^3	0.4981
0.816	9.508×10^3	0.07869	1.671×10^3	0.1418
0.447	4.318×10^4	0.01575	6.599×10^4	0.0323

Computational conditions: proportion of the deadspace is 0.125, counts of photon events for each CCD pixel are 10, $\sigma_r = 2$, others are same as those in Fig. 2 except for those indicated in the table

结论 综上所述,可以得到以下结论: 1) 用于每个子孔径的 CCD 像素数必须达到一个必要值, CCD 像素数过大势必造成自适应光学系统的响应速度降低, CCD 像素数过低将带来过大的误差; 2) CCD 像素之间的死区大小在实用上影响不大; 3) 信噪比必须超过一个阈值, 如果低于该阈值, 噪音所造成的误差会变得无法接受。以上结论都是针对一个实际的自适应光学系统得到的。可以看出, 与硬件的实

际实现相比, 数值模拟研究和理论设计需要的投入极少, 而可以获得很多有价值的结果。而且, 本文的数值模拟还有很大的扩展余地。

致谢 对于与北京理工大学曹根瑞教授多次有益的讨论表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Tyson R K. *Principles of Adaptive Optics*. New York: Academic Press, 1991.
- [2] 周仁忠 主编. 自适应光学. 北京: 国防工业出版社, 1996.
- [3] Primmerman C A, Price T R, Humphrey R A *et al.*. Atmospheric-compensation experiments in strong-scintillation conditions. *Appl. Opt.*, 1995, **34**: (12): 2081~2088
- [4] 严海星, 张德良, 李树山. 自适应光学系统的数值模拟: 直接斜率法. *光学学报*, 1997, **17**(6): 758~765
- [5] Yan Haixing, Li Shushan, Zhang Deliang *et al.*. Numerical simulation of an adaptive optics system with laser propagation in the atmosphere. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(18): 3023~3031
- [6] Cao Genrui, Yu Xin. Accuracy analysis of Hartmann-Shack wavefront sensor operated with a faint object. *Opt. Engng.*, 1994, **33**(7): 2331~2335
- [7] Kane T J, Welsh D M, Gardner C S. Wavefront detector optimization for laser guided adaptive telescopes. *Proc. SPIE*, 1990, **1114**: 160~171
- [8] Morgan J S, Slater D C. Centroid position measurements and subpixel sensitivity variations with the MAMA detector. *Appl. Opt.*, 1989, **28**(6): 1178~1182

Numerical Simulation of an Adaptive Optics System: Effect of Noise and Detection Error

Chen She Yan Haixing Li Shushan

(Institute of Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

(Received 3 September 1999; revised 26 May 2000)

Abstract: Effect of noise and detection error is one of three important factors affecting the performances of an adaptive optics (AO) system. In an AO system, noise and detection error can produce errors in the tilt detection of a Hartmann-Shack (H-S) wavefront sensor and have further effects on the performance of the AO System. A theoretical model of numerically simulating the effects of noise and detection error is presented and a computer program has been compiled, which is combined with our existing program of numerical simulation of the laser propagation in turbulent media and an AO system. The effects of detection error, readout noise and photon noise on a practical AO system have been numerically simulated. The results are quite useful for the design of a practical AO system.

Key words: adaptive optics; noise and detection error; numerical simulation