

文章编号: 0253-2239(2001)05-0530-04

与双原子相互作用的双模关联场的相位性质*

郭 红 彭金生

(华中师范大学物理系, 武汉 430079)

摘要: 根据 Pegg 和 Barnett 相位理论研究了与双原子相互作用的双模 $SU(1,1)$ 相干场的相位特性, 证明了光场每个模的相位及两个模的相位差均保持随机分布, 给出了光场两个模的相位和方差的表达式, 揭示了在适当的初始条件下, 系统呈现原子的相干捕获现象。

关键词: 光场两个模相位和与相位差; 双模 $SU(1,1)$ 相干场; 相干捕获

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

1 引 言

双原子系统是研究多原子系统的基础, 原子间的合作效应使得双原子系统具有更加丰富的物理内涵^[1]。双原子系统中单模光场相位的动态特征已引起人们的关注^[2,3]。但关于双原子系统中关联双模场的相位性质却未见详细报道。本文将研究这一问题, 考察处于叠加态的双原子分别与双模 $SU(1,1)$ 相干场的一个模相互作用时光场相位几率分布的演化规律, 证明了光场每个模的相位及两个模的相位差均保持随机分布, 研究了初始条件以及光场与原子耦合强度对光场两个模的相位和方差的影响, 结果表明在适当的初始条件下, 光场与原子退耦合, 系统呈现原子的相干捕获现象。

2 模 型

两个原子分别与双模场中的一个模相互作用时, 系统的哈密顿可写为^[4]

$$H = \sum_{i=1,2} \{ \omega_i a_i^\dagger a_i + \omega_{\omega_i} S_i^- + g_i (a_i S_i^+ + a_i^\dagger S_i^-) \} \quad (\hbar = 1), \quad (1)$$

式中 a_i^\dagger 、 a_i 代表频率为 ω_i 的光场的产生和湮灭算符, 本征跃迁频率为 ω_{ω_i} 的二能级原子由赝自旋算符 S_i^+ 、 S_i^- 表征, g_i 为第 i 个原子与光场第 i 个模的耦合常数。

如果初始时刻两个二能级原子处于叠加态:

* 国家自然科学基金(60078016)、湖北省自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1998-10-26; 收到修改稿日期: 1999-08-19

$$|\psi_A(0)\rangle = \cos(\theta/2) |g, g\rangle - \sin(\theta/2) \exp(i\varphi) |e, e\rangle \quad (0 \leq \theta \leq \pi, -\pi < \varphi < \pi), \quad (2)$$

$|g, g\rangle$ 表示两个原子均处在基态, $|e, e\rangle$ 表示两个原子均处在激发态。而光场为双模 $SU(1,1)$ 相干场^[5]

$$|\psi_t(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^q \exp(in\beta) |n+q, n\rangle \quad (-\pi < \beta \leq \pi). \quad (3)$$

$$F_n^q = (1 - \xi^2)^{(1+q)/2} \left[\frac{(n+q)!}{N!q!} \right]^{1/2} \xi^n \quad (0 \leq \xi \leq 1, q = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

即系统的初态为

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \cos(\theta/2) F_n^q |g, g, n+q, n\rangle - \sin(\theta/2) \exp(i\varphi) F_n^q |e, e, n+q, n\rangle \}, \quad (5)$$

那么在 t 时刻, 原子-光场耦合系统的态矢在相互作用绘景中可表示为

$$|\psi_t(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_{n+q,n}^1(t) |g, g, n+q, n\rangle + C_{n+q-1,n}^2(t) |e, g, n+q-1, n\rangle + C_{n+q,n-1}^3(t) |g, e, n+q, n-1\rangle + C_{n+q-1,n-1}^4(t) |e, g, n+q-1, n-1\rangle \}. \quad (6)$$

将(6)式代入相互作用绘景的薛定谔方程, 在共振条件下($\omega_0 = \omega_i$)可得

$$i\dot{C}_{n+q,n}^1(t) = \lambda C_{n+q-1,n}^2(t) + \lambda' C_{n+q,n-1}^3(t), \quad (7a)$$

$$i\dot{C}_{n+q-1,n}^2(t) = \lambda C_{n+q,n}^1(t) + \lambda' C_{n+q-1,n-1}^4(t), \quad (7b)$$

$$i\dot{C}_{n+q,n-1}^3(t) = \lambda C_{n+q-1,n-1}^4(t) + \lambda' C_{n+q,n}^1(t), \quad (7c)$$

$$iC_{n+q-1,n-1}^4(t) = \lambda C_{n+q,n-1}^3(t) + \lambda' C_{n+q-1,n}^2(t), \quad (7d)$$

这里

$$\lambda = g_1 \sqrt{n+q}, \quad (8a)$$

$$\lambda' = g_2 \sqrt{n}. \quad (8b)$$

根据初始条件(5)式,容易求得(7)式的解:

$$C_{n+q,n}^1(t) = \{ \cos(\theta/2) F_n^\alpha \cos(\lambda t) \cos(\lambda' t) + \sin(\theta/2) \exp[i(\varphi - \beta)] \times F_{n-1}^\alpha \sin(\lambda t) \sin(\lambda' t) \} \exp(in\beta), \quad (9a)$$

$$C_{n+q-1,n}^2(t) = -i \{ \cos(\theta/2) F_n^\alpha \sin(\lambda t) \cos(\lambda' t) - \sin(\theta/2) \exp[i(\varphi - \beta)] \times F_{n-1}^\alpha \cos(\lambda t) \sin(\lambda' t) \} \exp(in\beta), \quad (9b)$$

$$C_{n+q,n-1}^3(t) = -i \{ \cos(\theta/2) F_n^\alpha \cos(\lambda t) \sin(\lambda' t) - \sin(\theta/2) \exp[i(\varphi - \beta)] \times F_{n-1}^\alpha \sin(\lambda t) \cos(\lambda' t) \} \exp(in\beta), \quad (9c)$$

$$C_{n+q-1,n-1}^4(t) = - \{ \cos(\theta/2) F_n^\alpha \sin(\lambda t) \sin(\lambda' t) + \sin(\theta/2) \exp[i(\varphi - \beta)] \times F_{n-1}^\alpha \cos(\lambda t) \cos(\lambda' t) \} \exp(in\beta), \quad (9d)$$

将(9)式代入(6)式,得到 t 时刻的系统态矢 c

3 双模光场的相位性质

根据 Pegg 和 Barnett 的相位理论^[6,7],双模光场相位的本征态为

$$|\theta_{m_1}, \theta_{m_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(s_1+1)(s_2+1)}} \times \sum_{m_1=0}^{s_1} \sum_{m_2=0}^{s_2} \exp[i(n_1\theta_{m_1} + n_2\theta_{m_2})] |n_1, n_2\rangle, \quad (10)$$

这里

$$\theta_{m_i} = \theta_{\alpha_i} + \frac{2\pi m_i}{s_i+1} \quad (m_i = 0, 1, 2, 3, \dots, s_i; i = 1, 2), \quad (11)$$

其中 θ_{α_i} 为一参考相位, $(s_1+1)(s_2+1)$ 为相位本征态矢集张开的希尔伯特空间的维数。那么光场第 i 个模的厄米相位算符可定义为

$$\Phi_i = \sum_{m_1=0}^{s_1} \sum_{m_2=0}^{s_2} \theta_{m_i} |\theta_{m_1}, \theta_{m_2}\rangle \langle \theta_{m_1}, \theta_{m_2}| \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

于是,双原子与双模光场耦合系统的态矢 $|\Psi(t)\rangle$ 按光场相位本征态展开的表达式可写为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m_1, m_2} \{ \langle e, e, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \Psi(t) \rangle | e, e, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} \rangle$$

$$+ \langle g, e, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \Psi(t) \rangle | g, e, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} \rangle + \langle e, g, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \Psi(t) \rangle | e, g, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} \rangle + \langle g, g, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \Psi(t) \rangle | g, g, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} \rangle \}, \quad (13)$$

这里

$$P(\theta_{m_1}, \theta_{m_2}, t) = \{ \langle e, e, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \Psi(t) \rangle \|^2 + \langle g, e, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \Psi(t) \rangle \|^2 + \langle e, g, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \Psi(t) \rangle \|^2 + \langle g, g, \theta_{m_1}, \theta_{m_2} | \Psi(t) \rangle \|^2 \}, \quad (14)$$

代表光场相位几率分布函数,取

$$\left. \begin{aligned} \theta_{\alpha 1} &= \frac{\beta}{2} - \frac{\pi(s+q)}{s+q+1}, \\ \theta_{\alpha 2} &= \frac{\beta}{2} - \frac{\pi s}{s+1}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

利用(6)式、(9)式和(14)式不难得到

$$P(\theta_1, \theta_2, t) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n, n'=0}^s \exp[-i(n-n')(\theta_1 + \theta_2)] \times \{ \cos^2(\theta/2) F_n^\alpha F_{n'}^\alpha \cos[g_1(\sqrt{n+q} - \sqrt{n'+q})t] \times \cos[g_2(\sqrt{n} - \sqrt{n'})t] + \sin^2(\theta/2) F_{n-1}^\alpha F_{n'-1}^\alpha \times \cos[g_1(\sqrt{n+q} - \sqrt{n'+q})t] \times \cos[g_2(\sqrt{n} - \sqrt{n'})t] \} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n, n'=0}^s \cos[(n-n')(\theta_1 - \theta_2) + (\varphi - \beta)] \times \sin\theta F_n^\alpha F_{n'-1}^\alpha \sin[g_1(\sqrt{n+q} - \sqrt{n'+q})t] \times \sin[g_2(\sqrt{n} - \sqrt{n'})t]. \quad (16)$$

双模光场单个模相位的几率分布函数为

$$P(\theta_i, t) = \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta_1, \theta_2, t) d\theta \quad (i, j = 1, 2; i \neq j). \quad (17)$$

将(16)式代入(17)式,可得

$$P(\theta_i, t) = \frac{1}{2\pi}. \quad (18)$$

这表明辐射场每个模的相位完全是随机的。

根据 Pegg 和 Barnett 的相位理论,光场两个模相位差 $\theta_- = \theta_2 - \theta_1$ 与相位和 $\theta_+ = \theta_1 + \theta_2$ 的几率密度分别为^[7,8]

$$\left. \begin{aligned} P(\theta_-, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta_1, \theta_1 + \theta_-, t) d\theta_1, \\ P(\theta_+, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta_1, \theta_+ - \theta_1, t) d\theta_1, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将(16)式代入(19)式,有

$$P(\theta_-, t) = 1/(2\pi) \quad (20a)$$

$$\begin{aligned}
 P(\theta_+, t) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{n, n'=0}^s \exp[-i(n-n')\theta_+] \times \\
 & [\cos^2(\theta/2)F_n^y F_n^y + \sin^2(\theta/2)F_{n-1}^y F_{n-1}^y] \times \\
 & \cos[g_1(\sqrt{n+q} - \sqrt{n'+q})t] \times \\
 & \cos[g_2(\sqrt{n} - \sqrt{n'})t] + \\
 & \frac{1}{2\pi} \sum_{n, n'=0}^s \cos[(n-n')\theta_+ + (\varphi - \beta)] \times \\
 & \sin\theta F_n^y F_{n-1}^y \sin[g_1(\sqrt{n+q} - \sqrt{n'+q})t] \times \\
 & \sin[g_2(\sqrt{n} - \sqrt{n'})t]. \quad (20b)
 \end{aligned}$$

(20a)式表明光场两个模相位差也具有均匀的几率分布,显然两个模相位差的平均值为零,其偏差为 $\pi^2/3$ 。从(20b)式不难看出两个模相位和的几率分布是时间的函数。图1给出不同时刻两个模相位和的几率分布。

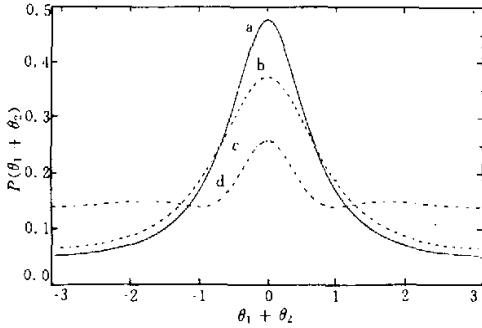


Fig. 1 Two atoms are in the ground state and two-mode field is in the $SU(1,1)$ coherent state. $g_1 = g_2 = g, q = 0, \xi = 0.5$. (a) $gt = 0$; (b) $gt = 0.5$; (c) $gt = 1.0$; (d) $gt = 1.5$

光场两个模相位和的平均值和方差分别为

$$\langle \Phi_1 + \Phi_2 \rangle_{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \theta_+ P(\theta_+, t) d\theta_+, \quad (21)$$

$$\langle \Delta_{\pm}^2 \rangle_{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} (\theta_+ - \langle \Phi_1 + \Phi_2 \rangle_{2\pi})^2 P(\theta_+, t) d\theta_+. \quad (22)$$

将(20b)式代入(21)式,得

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_1 + \Phi_2 \rangle_{2\pi} = & \sum_{n=0}^s \sum_{\substack{n' \neq n \\ n'=1}}^s \frac{(-1)^{n-n'+1} \sin(\varphi - \beta)}{n - n'} \times \\
 & \sin\theta F_n^y F_{n-1}^y \sin[g_1(\sqrt{n+q} - \sqrt{n'+q})t] \times \\
 & \sin[g_2(\sqrt{n} - \sqrt{n'})t]. \quad (23)
 \end{aligned}$$

为方便起见,取 $\varphi = \beta$,则

$$\langle \Phi_1 + \Phi_2 \rangle = 0. \quad (24)$$

在相同的条件下将(20b)代入(22)式,得

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta_{\pm}^2 \rangle_{2\pi} = & \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n, n'=0 \\ n \neq n'}}^s \frac{(-1)^{n-n'}}{(n-n')^2} \times \\
 & \{ [\cos^2(\theta/2)F_n^y F_n^y + \sin^2(\theta/2)F_{n-1}^y F_{n-1}^y] \times \\
 & \cos[g_1(\sqrt{n+q} - \sqrt{n'+q})t] \times \\
 & \cos[g_2(\sqrt{n} - \sqrt{n'})t] \times \\
 & \sin\theta F_n^y F_{n-1}^y \sin[g_1(\sqrt{n+q} - \sqrt{n'+q})t] \times \\
 & \sin[g_2(\sqrt{n} - \sqrt{n'})t] \}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

经分析上式可知,光场双模间光子数差 $q \neq 0$,或者两个原子与光场的耦合强度不同,都会导致两个模的拉比频率不同,从而使得光场两个模相位和方差的演化规律较为复杂。当光场双模间光子数差 $q = 0$,且两个原子与光场的耦合强度相同时,光场两个模的拉比频率一致。

如图2所示,光场两个模相位和方差的演化规律此时取决于光场强度与原子的相干性。当 $\xi = \tan(\theta/2)$ 时,光场两个模相位和的方差将不再随时间改变。

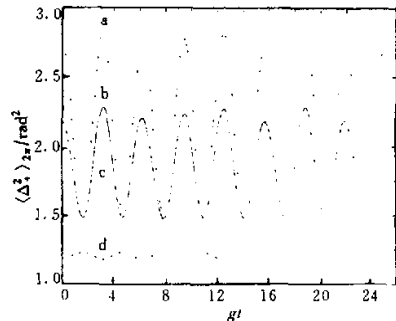


Fig. 2 Two atoms are in the coherent state. Two-mode field is in the $SU(1,1)$ coherent state. $q = 0, \varphi = \beta, \theta = \pi/3$. (a) $\xi = 0.15$; (b) $\xi = 0.30$; (c) $\xi = 0.45$; (d) $\xi = 0.60$

4 双原子系统的相干捕获

在两个原子与光场的耦合常数相等的条件下($g_1 = g_2 = g$),利用(6)式和(9)式容易求得初始时刻原子处于叠加态而光场为双模压缩真空场($q = 0$)时两个原子均处于激发态的几率

$$\begin{aligned}
 P_{\infty} = & \cos^2(\theta/2) \sum_{n=1}^{\infty} (F_{n-1}^0)^2 \left| \exp(i\beta)\xi \sin^2(g\sqrt{nt}) + \right. \\
 & \left. \tan(\theta/2) \exp(i\varphi) \cos^2(g\sqrt{nt}) \right|^2. \quad (26)
 \end{aligned}$$

分析上式不难发现,若

$$\xi = \tan(\theta/2), \quad \varphi = \beta, \quad (27)$$

则 P_{∞} 将不再随时间改变,此时原子的布居数保持初

始值不变,系统发生原子的相干捕获。

在双原子与双模光场的耦合系统中,原子具有如图3所示的多种跃迁过程,这多种跃迁过程间存在着一定的相干关联,当 $\xi = \tan(\theta/2)$,且 $\varphi = \beta$ 时处于叠加态的双原子在 $|e, e\rangle \leftrightarrow |e, g\rangle$ 和 $|g, g\rangle \leftrightarrow |e, g\rangle$ 以及 $|e, e\rangle \leftrightarrow |g, e\rangle$ 和 $|g, g\rangle \leftrightarrow |g, e\rangle$ 的跃迁过程中导致相消干涉,从而造成光场-原子相互作用系统彼此退耦,使得原子的布居数和光场的相位几率分布均不改变。不难看出,导致原子相干捕获的初态实际上是系统退耦合定态

$$(\sqrt{2}/2)(|g, g, n, n\rangle - |e, e, n-1, n-1\rangle)$$

的叠加态,这与单模 Jaynes-Cummings 模型的结论一致^[9]。

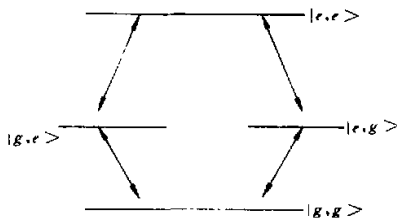


Fig. 3 Diagram of the atom-field coupling system

结论 总之,与双原子相互作用的 $SU(1,1)$ 双模相干场每个模的相位及两个模的相位差均保持均匀分布,而两个模相位和的几率分布随时间的演化不仅依赖于初始时刻光场的性质 (q, ξ) ,而且与原子的初态 (θ, φ) 及光场原子的相对相位有着密切的关

系。因此初始条件影响两个模相位和方差的变化规律,在适当的条件下,双模光场两个模的相位性质及双原子的布居数不随时间改变,出现原子的相干捕获现象。

参 考 文 献

- [1] 彭金生,李高翔. 近代量子光学导论. 北京: 科学出版社, 1996. 391~395
- [2] Peng Jinsheng, Li Gaoxiang, Zhou Peng. Atomic coherent trapping and phase property of the field in the system of two-level atoms interacting with a single-mode field. *Chinese J. Laser (B)*, 1992, 1(3):221~228
- [3] Dung H T, Huyen N D, Shumovsky A S. Phase properties of a coherent field interacting with two two-level atoms in a cavity. *Physica (A)*, 1992, 182(4):467~488
- [4] Cohen D, Ben-Aryeh Y, Mann A. Transfer of correlations from squeezed states of radiation to atoms in a generalized Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1994, 49(3):2040~2048
- [5] Gerry C C. Correlated two-mode $SU(1,1)$ coherent states nonclassical properties. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1991, 8(3):685~690
- [6] Pegg D T, Barnett S M. Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev. (A)*, 1989, 39(4):1665
- [7] Pegg D T, Barnett S M. Quantum optical phase. *J. Mod. Opt.*, 1997, 44(2):225
- [8] Barnett S M, Pegg D T. Quantum theory of optical phase correlations. *Phys. Rev. (A)*, 1990, 42(11):6713
- [9] Girac J I, Sanchez-Soto I L. Population trapping in the Jaynes-Cummings model via phase coupling. *Phys. Rev. (A)*, 1990, 42(5):2851~2857

Phase Properties of the Field in a System of Two Atoms Interacting with Two-Mode $SU(1,1)$ Coherent Field

Guo Hong Peng Jinsheng

(Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079)

(Received 26 October 1998; revised 19 August 1999)

Abstract: The phase properties of two-mode $SU(1,1)$ coherent field interacting with two atoms are investigated by means of the phase formalism given by Pegg and Barnett. It is found that single-mode phase and the difference of the two-mode phase are all randomly distributed. The expressions of variance of the phase sum are presented. It is verified that the atomic coherent trapping will take place in a appropriate initial state of the system.

Key words: phase sum and difference; two-mode $SU(1,1)$ coherent field; coherent trapping