第 21 卷 第 5 期
2001 年 5 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 21, No. 5
May, 2001

文章编号：0253-2239(2001)05-0522-03

空间频率域的张量 *ABCD* 定律*

王立刚 林 强
（浙江大学理学院物理系光学研究所，杭州 310028）

摘要： 运用张量分析方法把轴对称系统中的空间频率域的柯林斯公式推广到一般的非轴对称光学系统，并推导了在空间频率域中适用于非轴对称光学系统的张量 *ABCD* 定律。空间频率域中的柯林斯公式和张量 *ABCD* 定律直接给出了像散光束的空间傅里叶频谱的传输规律。它们在处理与空间频谱有关的问题，如空间滤波、成像系统的传递函数、复杂像散高斯光束在自由空间的传输等问题时更为简便。

关键词： 空间频率域；非轴对称光学系统；张量 *ABCD* 定律
中图分类号：TN012 文献标识码：A

1 引 言

柯林斯曾导出了一个用矩阵元表达的复杂光学系统的衍射积分公式[1]，在近轴条件下，它把光线光学和波动光学联系起来。文献[2]借助于张量代数方法，给出了用张量表达的适用于非轴对称光学系统的衍射积分公式，推导出了描写椭圆高斯光束传输的空间域张量 *ABCD* 定律。此后，空间域张量 *ABCD* 定律被广泛用于研究非轴对称光学系统中的光束变换、非轴对称光学谐振腔的模式等问题[3]。文献[4]给出了空间频率域的柯林斯公式。本文利用张量的方法研究了椭圆高斯光束在空间频率域中的传输，推导了适用于一般非轴对称光学系统的空间频率域柯林斯公式和空间频率域张量 *ABCD* 定律。

2 非轴对称光学系统在空间频率域的柯林斯公式

2.1 傅里叶变换法推导

一般非轴对称光学系统的衍射积分公式为[3]

$$E_2(\boldsymbol{r}_2) = -\frac{\mathrm{i}n_1}{\lambda|\boldsymbol{B}|^{1/2}}\exp(-\mathrm{i}kL_0)\times \iint E_1(\boldsymbol{r}_1)\exp(-\mathrm{i}kL_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1, \tag{1}$$

其中，$E_1(\boldsymbol{r}_1)$ 和 $E_2(\boldsymbol{r}_2)$ 分别表示变换前后的光束电场分布，$k = 2\pi/\lambda$ 为波数，L_0 为轴上光程，程函 L_1 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}_2\end{pmatrix},\\ \boldsymbol{R} &= \begin{bmatrix} n_1\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & -n_1\boldsymbol{B}^{-1}\\ n_2(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}) & n_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 n_1、n_2 分别为入射和出射空间的折射率，T 为转置符号。为简单起见，在下面的推导中令 $n_1 = n_2 = 1$。$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 分别为入射面和出射面上的位置矢量，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 为光学系统的分块变换矩阵，其定义为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_2\\ \boldsymbol{r}'_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}'_1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

分块矩阵之间满足下列关系：

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A},\\ (-\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A},\\ (\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

不考虑 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL_0}$ 项，对(1) 式两边进行傅里叶变换，得

$$\begin{aligned} A_2(\boldsymbol{\nu}_2) &= \iint E_2(\boldsymbol{r}_2)\exp(-\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{\nu}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 = \\ &-\frac{\mathrm{i}}{\lambda|\boldsymbol{B}|^{1/2}}\iint E_1(\boldsymbol{r}_1)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda}(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_1)\right]\times \\ &\left\{\iint\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda}(\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{r}_2 - 2\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{r}_2)\right]\times \right.\\ &\left.\exp(-\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{\nu}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda|\boldsymbol{B}|^{-1/2}}\iint E_1(\boldsymbol{r}_1)\times \\ &\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda}[(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_1)-(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1)]\right\}\times \\ &\left(\iint\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda}[(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1)]\right\}\times \right.\\ &\left.\exp(-\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{\nu}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1. \end{aligned} \tag{5}$$

* 浙江省自然科学基金青年科技人才专项基金(RC98029)和国家自然科学基金(60078003)资助课题。

收稿日期：1999-12-29；收到修改稿日期：2000-03-22

这里 $\boldsymbol{v}_2$ 为空间频率坐标矢量。上式积分变换用到(4)式,作变量代换

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}_2=(\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1})^{1/2}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1),$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}|^{-1/2}\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{r}}_2,$$

则(5)式经傅里叶变换为

$$A_2(\boldsymbol{v}_2)=-\frac{1}{|\boldsymbol{D}|^{1/2}}\exp(\mathrm{i}\pi\lambda\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v}_2)\times \iint E_1(\boldsymbol{r}_1)\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda}[\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}})\boldsymbol{r}_1+2\lambda\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1]\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1. \tag{6}$$

$E(\boldsymbol{r}_1)$ 可由 $A(\boldsymbol{v}_1)$ 的逆傅里叶变换得到:

$$E(\boldsymbol{r}_1)=\iint A_1(\boldsymbol{v}_1)\exp(\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1, \tag{7}$$

从(4)式可得

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}=(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

把(7)式、(8)式代入(6)式得

$$\begin{aligned}A_2(\boldsymbol{v}_2)=&-\frac{1}{|\boldsymbol{D}|^{1/2}}\exp(\mathrm{i}\pi\lambda\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v}_2)\times\iint A_1(\boldsymbol{v}_1)\iint\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda}[\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1+2\lambda\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1]\right\}\exp(\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1=\\&-\frac{1}{|\boldsymbol{D}|^{1/2}}\exp(\mathrm{i}\pi\lambda\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v}_2+\mathrm{i}\pi\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2)\times\iint A_1(\boldsymbol{v}_1)\iint\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda}[(\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2)]\right\}\exp(\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1.\end{aligned} \tag{9}$$

上式积分变换用到关系式:

$$(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}, \tag{10}$$

再作变量代换:

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}_1=(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})^{1/2}(\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2),$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1=|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|^{-1/2}\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{r}}_1,$$

则(9)式经傅里叶逆变换得

$$A_2(\boldsymbol{v}_2)=-\frac{\mathrm{i}\lambda}{|\boldsymbol{C}|^{1/2}}\exp(\mathrm{i}\pi\lambda\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v}_2+\mathrm{i}\pi\lambda\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2)\times\iint A_1(\boldsymbol{v}_1)\exp(\mathrm{i}\pi\lambda\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}_1)\times\exp(-\mathrm{i}2\pi\lambda\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1. \tag{11}$$

从(4)式及(10)式,有:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{D}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1},$$

代入(11)式,经整理得

$$A_2(\boldsymbol{v}_2)=-\frac{\mathrm{i}\lambda}{|\boldsymbol{C}|^{1/2}}\iint A_1(\boldsymbol{v}_2)\exp[\mathrm{i}\pi\lambda(\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2-2\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2)]\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1. \tag{12}$$

(12)式就是在空间频率域中适用于非轴对称光学系统的柯林斯公式。它直接给出了输入和输出光束的空间频率域之间的关系。

2.2 程函法推导

在 $\det(\boldsymbol{C})\neq0$ 时,从描述非轴对称系统的 4×4 阶矩阵的定义(3)式可直接得出

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\\boldsymbol{r}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}'_1\\\boldsymbol{r}'_2\end{pmatrix}. \tag{13}$$

在傍轴条件下,从输入面(x_1,y_1)到输出面(x_2,y_2)的程函可表示为

$$L=L_0+\frac{1}{2}[-n_1(x_1x'_1+y_1y'_1)+n_2(x_2x'_2+y_2y'_2)]=L_0+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}'_1\\\boldsymbol{r}'_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}'_1\\\boldsymbol{r}'_2\end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中, $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}n_1\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D} & -n_1\boldsymbol{C}^{-1}\\n_2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}) & n_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$,

且 $\boldsymbol{S}$ 为转置对称矩阵,因而下列关系式成立:

$$\left.\begin{aligned}&(n_1\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}=n_1\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D},\\&(-n_1\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}=n_2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}),\\&(n_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}=n_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

从(15)式可以直接推得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\frac{n_1}{n_2}E,\\&\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\frac{n_1}{n_2}E,\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中 E 为 2×2 单位矩阵。令 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 为空间频率坐标矢量,其定义为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}\nu_{x1}\\\nu_{y1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'_1/\lambda\\y'_1/\lambda\end{pmatrix}=\frac{\boldsymbol{r}'_1}{\lambda},\\&\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}\nu_{x2}\\\nu_{y2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'_2/\lambda\\y'_2/\lambda\end{pmatrix}=\frac{\boldsymbol{r}'_2}{\lambda},\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

则(14)式可用空间频率坐标表示为

$$L(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=L_0+\frac{1}{2}\lambda^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}. \tag{18}$$

空间频率域中的衍射积分公式为

$$A_2(\boldsymbol{v}_2)=\eta\iint A(\boldsymbol{v}_1)\exp(-\mathrm{i}kL)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1, \tag{19}$$

系数 η 可用能量守恒定律来确定:

$$\iint|A_2(\boldsymbol{v}_2)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2=\iint|A_1(\boldsymbol{v}_1)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1. \tag{20}$$

把(19)式代入(20)式,可得:

$$\eta=K'n_1\lambda|\boldsymbol{C}|^{-1/2}.$$

与(12)式比较,取 $K'=-\mathrm{i}$。并令 $n_1=n_2=1$,由此

得到与(12)式相同的空间频率域衍射积分公式。

当 $\det(\boldsymbol{C})=0$ 时，上述衍射积分公式不能直接应用。下面的推导将看到，空间频率域张量 *ABCD* 定律仍可应用。事实上，$\det(\boldsymbol{C})=0$ 对应于空间频率域成像。若 $\boldsymbol{C}=0$，为空间频率域完全成像；若 $\boldsymbol{C}\neq 0$，但 $\det(\boldsymbol{C})=0$，对应于空间频率域部分成像。

3 空间频率域中的张量 *ABCD* 定律

若输入光束的角谱为 $A_1(\boldsymbol{v}_1)$，则可以直接利用(12)式求得通过任意一个 *ABCD* 系统的角谱 $A_2(\boldsymbol{v}_2)$。下面我们来考虑一般的椭圆高斯光束[3]：

$$E(\boldsymbol{r},z)=|\boldsymbol{Q}|^{-1/2}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{k}{2}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{r}\right),\tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 为空间域的复曲率张量。对(21)式进行傅里叶变换，得

$$A_1(\boldsymbol{v}_1)=-\mathrm{i}\lambda\exp(\mathrm{i}\pi\lambda\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{v}_1).\tag{22}$$

我们把 $\boldsymbol{Q}_1$ 称为空间频率域的复曲率半径张量。把(22)式代入(12)式，可得

$$A_2(\boldsymbol{v}_2)=\frac{(\mathrm{i}\lambda)^2}{|\boldsymbol{C}|^{1/2}}\exp[\mathrm{i}\pi\lambda\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{v}_2]\iint\exp[\mathrm{i}\pi\lambda|(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})^{1/2}\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})^{-1/2}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2|^2]\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1,\tag{23}$$

其中，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_2&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}-\boldsymbol{C}^{-1\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}-\boldsymbol{C}^{-1\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{D})^{-1}=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{D})-\boldsymbol{C}^{-1\mathrm{T}}]\times\\&\quad(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{D})^{-1}=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}^{-1\mathrm{T}}](\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{D})^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{D})^{-1}.\end{aligned}\tag{24}$$

(24)式就是在空间频率域中适用于非轴对称光学系统的张量 *ABCD* 定律。作变量代换

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1=(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})^{1/2}\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})^{-1/2}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}_2,$$

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{v}}_1=|(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D})|^{1/2}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1,$$

则(23)式的积分为

$$A_2(\boldsymbol{v}_2)=-\mathrm{i}\lambda|\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_1|^{-1/2}\exp(\mathrm{i}\pi\lambda\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{v}_2).\tag{25}$$

小结 用张量分析的方法推导了适用于一般非轴对称光学系统的空间频率域柯林斯公式和适用于椭圆高斯光束传输的空间频率域张量 *ABCD* 定律。空间频率域中的柯林斯公式和张量 *ABCD* 定律直接给出了像散光束的空间傅里叶频谱的传输规律。它们在处理与空间频谱有关的问题，如成像系统的传递函数、空间滤波和复杂像散高斯光束在自由空间的传输等问题时更为简便。

参 考 文 献

[1] Collins S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 1970, **60**(9):1168~1177

[2] 林 强，陆璇辉，王绍民. 非对称光学系统的 *ABCD* 定律. 光学学报，1988，**8**(7):658 ~ 662

[3] 林 强，王绍民. 张量光学. 杭州：杭州大学出版社，1994. 1~17

[4] Liu Zhongyong, Wu Xiuying, Fan Dianyuan. Collins formula in frequency-domain and fractional Fourier transforms. *Opt. Commun.*, 1998, **155**(1):7~11

Tensor *ABCD* Law in Spatial-Frequency Domain

Wang Ligang Lin Qiang

(*Optics Institute, College of Science, Zhejiang University, Hangzhou* 310028)

(Received 29 December 1999; revised 22 March 2000)

Abstract: The Collins formula in spatial-frequency domain is generalized into axially nonsymmetrical optical system in terms of tensor analysis method. Based on this formula, the tensor *ABCD* law in spatial frequency domain is derived. The Collins formula and tensor *ABCD* law in spatial frequency domain provide the relation between the input spatial Fourier spectrum and the output spectrum directly. They have advantages in treating the problems concerned with spatial Fourier spectrum, such as spatial frequency filtering, optical transfer function of imaging systems and the propagation of general astigmatic Gaussian beam in free space, and so on.

Key words: spatial frequency domain; nonsymmetrical optical system; tensor *ABCD* law