

文章编号: 0253-2239(2001)03-0290-06

有限外尺度对大气湍流统计特征测量的影响

沈 锋 姜文汉

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

摘要: 导出了有限外尺度影响下的相位结构函数和孔径平均的斜率相关函数的表达式, 结果表明有限的大气外尺度对大气湍流统计特征的测量有很大的影响, 尤其对大尺寸的望远镜和子孔径更是如此。基于科尔莫戈罗夫模型的大气相位结构函数和相干长度仅仅是本文推导结果的近似。对结果的分析表明, 测量得到的对大气湍流科尔莫戈罗夫模型的偏离有可能是大气外尺度的影响, 而不完全是真正的偏离。

关键词: 有限外尺度; 湍流功率谱; 相位结构函数; 斜率相关函数

中图分类号: TB96 文献标识码: A

1 引 言

大气湍流对激光传输和天文成像的影响已经受到广泛的重视, 用自适应光学技术进行大气湍流的校正也已经作了大量的工作。有关的大气湍流的统计特征参数对自适应光学系统的设计和性能是非常重要的。利用夏克-哈特曼波前传感器探测大气相干长度和功率谱指数的方法在机载激光传输大气校正实验以及其它的试验中已经提出过^[1-4]。在早期的工作中, 通常采用宁静度测量仪和星象运动差分测量仪来获取大气的有关信息, 如大气相干长度等^[5-7]。近年来, 由于自适应光学技术的不断发展以及夏克-哈特曼波前传感器在探测和重构大气湍流相位波前方面的大量应用, 基于夏克-哈特曼波前传感器测量大气湍流统计特征的方法被提了出来。David Dayton 等人运用夏克-哈特曼波前传感器于 1991 年夏天在菲利普空军实验室的 1.5 m 望远镜上进行大气湍流相位结构函数和大气相干长度的测量^[1]。他们的结果表明大气湍流不遵守科尔莫戈罗夫指数谱模型。另外 Nichols、Dainty 和 Silbaugh、Welsh 等人分别利用拉帕尔马的 1 m Jacobus Kapteyn 望远镜和机载激光传输大气校正实验的波前探测数据进行了大气湍流特性的测量, 他们的结果同样表明大气湍流功率谱不完全是科尔莫戈罗夫指数谱模型, 并且显示了利用夏克-哈特曼波前传感器进行大气湍流统计特征的测量的能力^[2,3]。

在所有他们的研究中, 大气外尺度对大气特征测量的影响均没有考虑。本文基于夏克-哈特曼波

前探测方法, 研究了受大气有限外尺度影响的相位结构函数和斜率相关函数的表达式。结果显示基于科尔莫戈罗夫模型的大气相位结构函数、斜率相关函数以及大气相干长度是本文得出结果的近似表达, 结果还显示通过测量得到的大气湍流科尔莫戈罗夫谱的偏离程度不能说明是真正的功率谱偏离还是由于大气有限外尺度的影响造成的。

2 大气有限外尺度影响下的相位结构函数和孔径平均的斜率相关函数

Fried 等人给出了遵守科尔莫戈罗夫谱的相位结构函数^[8]:

$$D_{\phi}(\rho) = \langle |\phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle = 6.88 \left[\frac{\rho}{r_0} \right]^{5/3}, \quad (1)$$

上式中 r_0 称为 弗里德(Fried) 大气相干长度, $\phi(\mathbf{r}_1)$ 、 $\phi(\mathbf{r}_2)$ 分别表示某一空间位置 \mathbf{r} 处的光学波前相位, $\rho = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, 其空间功率谱为

$$\Phi_n(\kappa, z) = \frac{0.033 C_n^2(z)}{\kappa^{11/3}}, \quad (2)$$

其中 κ 为空间频率, $C_n^2(z)$ 为随高度 z 分布的折射率结构常数。从(2)式中可以看出, 空间功率谱在频率趋于零时, 将发散为无穷大, 因此科尔莫戈罗夫谱只在某个空间频率范围 $\kappa_0 \sim \kappa_m$ 内有效。本文采用与冯·卡曼(von Kaman)谱相似的广义功率谱解析表达式:

$$\Phi_n(\kappa, z) = \frac{u(p) \times C_n^2(z)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{p+1}}, \quad (3)$$

其中 κ_0 为受限于大气外尺度 L_0 的空间频率, p 为广

义的频谱指数, $u(p)$ 为与频谱指数有关的系数, 而 $C_n^2(z)$ 与折射率结构常数相似, 单位为 m^{1-2p} .

$$\kappa_0 = 1/L_0. \quad (4)$$

为了得到大气相位结构函数, 运用下面的关系^[8,9]:

$$D_\phi(\rho) = 8\pi^2 k^2 \int_0^H dz \int d\kappa \times \left[1 - J_0 \left[\rho \left[1 - \frac{z}{H} \right] \kappa \right] \right] \Phi_n(\kappa, z), \quad (5)$$

上式中, H 为目标(或信标)高度, k 为光波波数。将(3)式代入到(5)式中, 并将结果整理后, 可以得到如下式的相位结构函数表达式:

$$D_\phi(\rho) = 8\pi^2 k^2 \times u(p) \times \int_0^H C_n^2(z) dz \times \frac{\kappa_0^{-2p}}{2p} \times \left[1 - \frac{2p}{2^p \Gamma(p+1)} \times \left[\rho \left[1 - \frac{z}{H} \right] \kappa_0 \right]^p \times K_p \left[\rho \left[1 - \frac{z}{H} \right] \kappa_0 \right] \right], \quad (6)$$

其中 $K_p(\dots)$ 为第二类修正贝塞尔函数, 它可以扩展成如下级数^[13]:

$$\frac{2p}{2^p \Gamma(p+1)} \cdot Z^p K_p(Z) = 1 - \frac{\pi}{2 \sin p \pi} \times \left[2\rho \left[\frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \right]^2 Z^{2p} + \frac{2p}{\Gamma(p+1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \times \left[\frac{1}{\Gamma(-p+i+1)} - \frac{(Z/2)^{2p}}{\Gamma(p+i+1)} \right] \left[\frac{Z}{2} \right]^{2i} \right], \quad (7)$$

上式中 $Z = \rho(1 - z/H) \kappa_0$ 。将(7)式代入到(6)式中, 可以得出广义的相位结构函数将包含类似于(1)式的项和其它的高阶项(由于大气有限外尺度的影响):

$$D_\phi(\rho) = D_\phi^{(0)}(\rho) + \sum_{i=1}^{\infty} D_\phi^{(i)}(\rho, \kappa_0). \quad (8)$$

(8)式是相位结构函数对 κ_0 的级数展开式, 右边第一项为没有大气外尺度影响的相位结构函数:

$$D_\phi^{(0)}(\rho) = 4\pi^2 \times u(p) \times k^2 \times \frac{\Gamma(1-p)}{p 2^{2p} \Gamma(1+p)} \times \rho^{2p} \times \int_0^H dz C_n^2(z) \left[1 - \frac{z}{H} \right]^{2p}. \quad (9)$$

根据 Stribling 等人的分析^[10], $u(p)$ 的值可以表示为

$$u(p) = 2^{2p-4} 2p(2p-1) \pi^{-3/2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1.5-p)}. \quad (10)$$

将(9)式表示为更简洁的式子:

$$D_\phi^{(0)}(\rho) = w_0 \left[\rho / \rho_0 \right]^{2p}. \quad (11)$$

(11)式中 w_0 为与广义频谱指数 p 有关的系数, 即

$$w_0 = 2 \left[\frac{4}{p} \Gamma \left[\frac{1}{p} \right] \right]^p. \quad (12)$$

通过(9)式、(10)式、(11)式, 可以得到广义的大气相干常数:

$$\rho_0^{-2p} = \frac{u(p) \Gamma(1-p)}{p 2^{2p} \Gamma(1+p) w_0} 4\pi^2 k^2 \times \int_0^H dz C_n^2(z) \left[1 - \frac{z}{H} \right]^{2p}. \quad (13)$$

当 $p = 5/6$ 时, ρ_0 即是弗里德大气相干长度 r_0 。(8)式中的第二项为存在有限外尺度影响时的湍流相位结构函数, 将其中的 $D_\phi^{(i)}(\rho, \kappa_0)$ 分解为两部分, 从(6)和(7)式可以得到

$$D_\phi^{(i)}(\rho, \kappa_0) = D_{\phi_1}^{(i)}(\rho, \kappa_0) - D_{\phi_2}^{(i)}(\rho, \kappa_0), \quad (14a)$$

$$D_{\phi_1}^{(i)}(\rho, \kappa_0) = 4\pi^2 k^2 u(p) \times \frac{\Gamma(1-p) \kappa^{2(i-p)}}{\Gamma(-p+i+1) p i! 2^{2i}} \times \rho^{2i} \times \int_0^H dz C_n^2(z) \left[1 - \frac{z}{H} \right]^{2i}, \quad (14b)$$

$$D_{\phi_2}^{(i)}(\rho, \kappa_0) = 4\pi^2 k^2 u(p) \times \frac{\Gamma(1-p) \kappa^{2i}}{\Gamma(p+i+1) p i! 2^{2(i+p)}} \times \rho^{2(i+p)} \times \int_0^H dz C_n^2(z) \left[1 - \frac{z}{H} \right]^{2(i+p)}, \quad (14c)$$

同样地, (14b)式和(14c)式可以表示为如(11)式所示:

$$D_{\phi_1}^{(i)}(\rho, \kappa_0) = w_1 \left[\frac{\rho}{\rho_{01}^{(i)}} \right]^{2i}, \quad (15a)$$

$$D_{\phi_2}^{(i)}(\rho, \kappa_0) = w_2 \left[\frac{\rho}{\rho_{02}^{(i)}} \right]^{2(i+p)}. \quad (15b)$$

从(14)式和(15)式, 可以看出由于大气有限外尺度的存在, 相位结构函数的高阶项中包含了空间尺度的整数阶和其它阶数的幂指数, 并不完全是如(11)式所示的 p 幂指数。为了求得(15)式中的系数 w_1 和 w_2 , 采用弗里德分辨率以及斯特列尔比(SR)的表示式^[8]:

$$\text{SR} = \frac{R}{R_{\max}} \left[\frac{D}{\rho_0} \right]^2 = \frac{32D^2}{\pi \rho_0^2} \int_0^1 \frac{1}{2} [\cos^{-1}(u) - u \sqrt{1-u^2}] \times \exp \left[-\frac{1}{2} D_\phi \left[\frac{D}{\rho_0} u \right] \right] u du. \quad (16)$$

当 $D \rightarrow \infty$ 时, 斯特列尔比趋于 1, 因此可以得到下

式:

$$w_1 = 2 \left[\frac{4}{i} \Gamma \left[\frac{1}{i} \right] \right]^i, \quad (17a)$$

$$w_2 = 2 \left[\frac{4}{i+p} \Gamma \left[\frac{1}{i+p} \right] \right]^{i+p}, \quad (17b)$$

从(14)式、(15)式和(17)式,可以得到如下所示的广义大气相干长度:

$$[\rho_{01}^{(i)}]^{-2i} = \frac{4\pi^2 k^2 u(p)}{w_1} \times \frac{\Gamma(1-p) \kappa_0^{2(i-p)}}{\Gamma(-p+i+1) p i! 2^{2i}} \times \int_0^H dz C_n^2(z) \left[1 - \frac{z}{H} \right]^{2i}, \quad (18a)$$

$$[\rho_{02}^{(i)}]^{-2(i+p)} = \frac{4\pi^2 k^2 u(p)}{w_2} \times \frac{\Gamma(1-p) \kappa_0^{2i}}{\Gamma(p+i+1) p i! 2^{2(i+p)}} \times \int_0^H dz C_n^2(z) \left[1 - \frac{z}{H} \right]^{2(i+p)}. \quad (18b)$$

从(18)式可以得出,当不存在大气有限外尺度时,由此引起的广义相干长度为无穷大,因此对相位结构函数的影响也不存在;但是当考虑了大气有限外尺度的影响时,它以如(15)式所示的不同的行为影响相位结构函数。对于相位结构函数来说,可以给出一个有限外尺度的影响系数(将在下一节说明它的影响大小):

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho, p, \kappa_0) &= \frac{D_{\phi_1}^{(i)}(\rho, \kappa_0) - D_{\phi_2}^{(i)}(\rho, \kappa_0)}{D_{\phi}^{(0)}(\rho)} = \\ &= \frac{1}{\int_0^H C_n^2(z) \left[1 - \frac{z}{H} \right]^{2p} dz} \times \\ &\quad \left\{ \frac{\Gamma(1+p)}{i! \Gamma(-p+i+1)} t^{2(i-p)} \times \int_0^H C_n^2 \left[1 - \frac{z}{H} \right]^{2i} dz - \right. \\ &\quad \left. \frac{\Gamma(1+p)}{i! \Gamma(p+i+1)} t^{2i} \times \int_0^H C_n^2 \left[1 - \frac{z}{H} \right]^{2(i+p)} dz \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

从(14)式可看出,由于大气有限外尺度的影响,相位结构函数对科尔莫戈罗夫谱的偏离有可能不完全是真正的偏离,也有可能是由于外尺度的影响造成的,因此大气湍流倾斜功率谱的行为也不一定就是低频-2/3幂、高频-11/3幂指数^[11]。

由于夏克-哈特曼波前探测器在自适应光学技术中的广泛使用,因此下面将首先推导基于夏克-哈特曼探测器的子孔径平均的波前斜率相关函数的表达式。波前探测器子孔径斜率测量值可以表示为

$$s_x(n, t) = \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) [\nabla \phi(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{i}], \quad (20)$$

$$s_y(n, t) = \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) [\nabla \phi(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}].$$

其中 s_x 和 s_y 分别为 x 、 y 方向的斜率值, \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 分别为 x 、 y 方向的单位向量, \mathbf{r}_n 是第 n 个子孔径的中心坐标向量, d 为子孔径尺寸,子孔径函数表示为

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) = \frac{1}{d^2} \text{rect} \left[\frac{x - x_n}{d} \right] \text{rect} \left[\frac{y - y_n}{d} \right], \quad (21)$$

$$\text{其中 } \text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(20)式可以表示为下式^[12]:

$$s_x(n, t) = \int d\mathbf{r} [\nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{i}] \phi(\mathbf{r}, t). \quad (22)$$

所以从(22)式可以得到波前探测器斜率测量值的相关函数为

$$C_{sx}(n, n, \tau) = \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' [\nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{i}] \times [\nabla W(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_n) \cdot \mathbf{i}] \langle \phi(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}', t') \rangle, \quad (23)$$

其中 $\tau = t - t'$ 。在(20)式、(22)式和(23)式中, $\phi(\mathbf{r}, t)$ 是去除相位平移项的波前相位

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' W_A(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') = \\ &= \int d\mathbf{r}' W_A(\mathbf{r}') [\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}')]. \quad (24) \end{aligned}$$

式中 $W_A(\mathbf{r}')$ 表示望远镜孔径函数,因此波前相位的相关函数可以由下式得到

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}') \rangle &= -\frac{1}{2} D_{\phi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ &= g(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r}') - a, \quad (25) \end{aligned}$$

其中

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_2 W_A(\mathbf{r}_2) D_{\phi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2),$$

$$a = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_3 W_A(\mathbf{r}_2) W_A(\mathbf{r}_3) D_{\phi}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3).$$

(26)

一般来说,夏克-哈特曼波前探测器的子孔径是方形的,如式(21)所示,因此孔径函数的梯度可以表示为

$$\nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) = \frac{1}{d^2} \left[\mathbf{i} \left[\delta \left(x + \frac{d}{2} + x_n \right) - \delta \left(x - \frac{d}{2} + x_n \right) \right] \text{rect} \left[\frac{y + y_n}{d} \right] + \mathbf{j} \left[\delta \left(y + \frac{d}{2} + y_n \right) - \delta \left(y - \frac{d}{2} + y_n \right) \right] \times \text{rect} \left[\frac{x + x_n}{d} \right] \right]. \quad (27)$$

将(25)、(26)、(27)代入到(24)式中,则夏克-哈特曼波前探测器的子孔径斜率测量值的相关函数就可以表示如下:

$$C_{xx}(n, n, \tau) = -\frac{1}{2d^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' D_{\phi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \times \left[\delta \left[x - \frac{d}{2} + x_n \right] - \delta \left[x + \frac{d}{2} + x_n \right] \right] \times \text{rect} \left[\frac{y + y_n}{d} \right] + \left[\delta \left[x' - \frac{d}{2} + x'_n \right] - \delta \left[x' + \frac{d}{2} + x'_n \right] \right] \times \text{rect} \left[\frac{y' + y'_n}{d} \right]. \quad (28)$$

令

$$u = \frac{y + y_n}{d}, \quad v = \frac{y' + y'_n}{d}. \quad (29)$$

运用 Taylor 的湍流冻结假设,并且假定横向风速垂直于光束传播方向,而且是沿着 y 方向的,那么(28)式就可以化为

$$C_{xx}(n, n, \tau) = -\frac{1}{2d^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dudv \text{rect}(u) \text{rect}(v) \times \left[D_{\phi} \left[\frac{d}{2} - x_n, y, \frac{d}{2} - x'_n, y', \tau \right] + D_{\phi} \left[-\frac{d}{2} - x_n, y, -\frac{d}{2} - x'_n, y', \tau \right] - D_{\phi} \left[\frac{d}{2} - x_n, y, -\frac{d}{2} - x'_n, y', \tau \right] - D_{\phi} \left[-\frac{d}{2} - x_n, y, \frac{d}{2} - x'_n, y', \tau \right] \right]. \quad (30)$$

考虑(8)式、(11)式、(15)式,同样可以将(30)式表示为低阶项和高阶项之和

$$C_{xx}(n, n, \tau) = C_{xx}^{(0)}(n, n, \tau) + \sum_{i=1}^{\infty} [C_{xx1}^{(i)}(n, n, \tau) - C_{xx2}^{(i)}(n, n, \tau)], \quad (31a)$$

$$C_{xx}^{(0)}(n, n, \tau) = \left[\frac{d}{\rho_0} \right]^{2p} \frac{w_0}{d^2} \iint dudv \text{rect}(u) \text{rect}(v) \times \{ [1 + (u - v + v\tau)^2]^p - [(u - v + v\tau)^2]^p \}, \quad (31b)$$

$$C_{xx1}^{(i)}(n, n, \tau) = \left[\frac{d}{\rho_{01}^{(i)}} \right]^{2i} \frac{w_1}{d^2} \iint dudv \text{rect}(u) \text{rect}(v) \times \{ [1 + (u - v + v\tau)^2]^i - [(u - v + v\tau)^2]^i \}, \quad (31c)$$

$$C_{xx2}^{(i)}(n, n, \tau) = \left[\frac{d}{\rho_{02}^{(i)}} \right]^{2(i+p)} \frac{w_2}{d^2} \iint dudv \text{rect}(u) \text{rect}(v) \times \{ [1 + (u - v + v\tau)^2]^{i+p} - [(u - v + v\tau)^2]^{i+p} \}, \quad (31d)$$

其中 v 是归一化风速 V/d (V 为横向风速)。

在得到(31)式后,就可以得到夏克-哈特曼波前探测器子孔径斜率测量值的时间功率谱:

$$\Phi_s(f) = \int C_{xx}(\tau) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau = \Phi_s^{(0)}(f) + \sum_{i=1}^{\infty} [\Phi_{s1}^{(i)}(f) - \Phi_{s2}^{(i)}(f)], \quad (32)$$

上式中,右边第一项是没有大气外尺度时的子孔径波前倾斜的时间功率谱,如果功率谱指数 $p = 5/6$,那么它的行为将是低频 - $2/3$ 、高频 - $11/3$ 的幂指数^[11];但是由于有限外尺度的影响,(32)式的右边第二项将不会为零,而它们对倾斜功率谱的影响将不会完全是低频 - $2/3$ 、高频 - $11/3$ 的幂指数行为。

子孔径倾斜测量值的功率谱可以表达为

$$\Phi_s^{(0)}(f) = \frac{w_0}{d^2} \left[\frac{d}{\rho_0} \right]^{2p} \text{sinc}^2 \left[\frac{f}{v} \right] \times \frac{1}{v} \mathcal{F}_{i, f/v} [(1 + t^2)^p - t^{2p}] = \frac{D_{\phi}^{(0)}(d)}{d^2} \text{sinc}^2 \left[\frac{f}{v} \right] \times \frac{1}{v} \mathcal{F}_{i, f/v} [(1 + t^2)^p - t^{2p}]. \quad (33)$$

由(31b)式、(31c)式和(31d)式的相似性,(32)式中的第二项中的每一项与(33)式类似地得到如下:

$$\Phi_{s1}^{(i)}(f) = \frac{D_{\phi 1}^{(i)}(d)}{d^2} \text{sinc}^2 \left[\frac{f}{v} \right] \frac{1}{v} \times \mathcal{F}_{i, f/v} [(1 + t^2)^i - t^{2i}],$$

$$\Phi_{s2}^{(i)}(f) = \frac{D_{\phi 2}^{(i)}(d)}{d^2} \text{sinc}^2 \left[\frac{f}{v} \right] \frac{1}{v} \times \mathcal{F}_{i, f/v} [(1 + t^2)^{i+p} - t^{2(i+p)}],$$

其中 $\mathcal{F}_{i, f/v} [f(t)]$ 表示对函数 $f(t)$ 的傅里叶变换。

3 结果分析

从(8)式、(14)式、(15)式、(19)式中,可以看到大气湍流相位结构函数中包含广义指数项(对于科尔戈罗夫谱来说, $p = 5/6$),以及受大气外尺度影响的整数指数项和它的非整数指数项幂级数。为分析方便,假设大气折射率结构常数是常量(这对水平大气传输来说是合理的),则(19)式可以简化为

$$\varepsilon(\rho, p, \kappa_0) = \frac{\Gamma(1+p)(2p+1)}{i!} \times$$

$$\left[\frac{t^{2(i-p)}}{\Gamma(-p+i+1)(2i+1)} - \frac{t^{2i}}{\Gamma(p+i+1)(2i+2p+1)} \right], \quad (34)$$

其中 $t = (\kappa_0 \vartheta/2)$ 。

有研究表明^[14], 水平大气在高度 10 km 以下时, 大气湍流满足冯·卡曼谱, 并且大气湍流外尺度在 20 m 到 38 m 之间, 并随高度而增加。而对于垂直大气来说, 湍流外尺度也不过是几百米, 因此对于米级的望远镜来说, (34) 式中的 t 并不是一个很小的量, 不能忽略不计。图 1 表示了大气外尺度对测量相位结构函数的偏差。图 1(a) 中的曲线从上到下分别为 $i = 1, 2, 3, 4$ 时(34) 式的值, 从图中可以看出当 $i = 1$ 时, 大气外尺度对测量相位结构函数的偏差的影响最大, 其他的影响非常小。图 1(b) 中的曲线是当 $i = 1$ 时, 广义功率谱指数 p 分别为 $2/6, 3/6, 4/6, 5/6$ 时(34) 式的值, 从图中可以看出, 广义功率谱指

数 p 越小, 则大气外尺度对测量相位结构函数的影响就越大, 测量偏差也就越大。正如图 1 中所示, 这种偏差将随着归一化变量 t 的增大而增加, 并且对不同的 p , 其偏差的影响是不同的。

从(31) 式可知, 当不考虑大气外尺度的影响时, 波前探测器子孔径斜率测量值的相关函数如式(31b) 所示, 其时间功率谱如式(33) 所示。当功率谱指数 $p = 5/6$ 时, 正如科尔戈罗夫谱预测的, 倾斜功率谱为低频 $-2/3$ 、高频 $-11/3$ 的幂指数行为。但是由于大气外尺度的影响不可忽略, 尤其对于大的望远镜和子孔径, 倾斜自相关函数并非完全是 p 幂指数, 还存在与功率谱指数无关的整数幂指数以及其他幂指数项, 因此可以确定倾斜的时间功率谱行为受到大气外尺度的影响, 将呈现不同的行为。同样可以研究子孔径倾斜相关的偏差, 根据图 1, 仅取(31a) 式的第 1 项:

$$\varepsilon_c = \frac{C_{xx1}^{(1)}(\tau) - C_{xx2}^{(1)}(\tau)}{C_{xx}^{(0)}(\tau)} = \frac{\Gamma(1+p)(2p+1)}{\Gamma(-p+2)(2p+3)} \left[\frac{\kappa_0 d}{2} \right]^2 \times \frac{\iint dudv \text{rect}(u) \text{rect}(v) \{ [1 + (u-v+\nu\tau)^2]^{(1+p)} - [(u-v+\nu\tau)^2]^{(1+p)} \}}{\iint dudv \text{rect}(u) \text{rect}(v) \{ [1 + (u-v+\nu\tau)^2]^p - [(u-v+\nu\tau)^2]^p \}}. \quad (35)$$

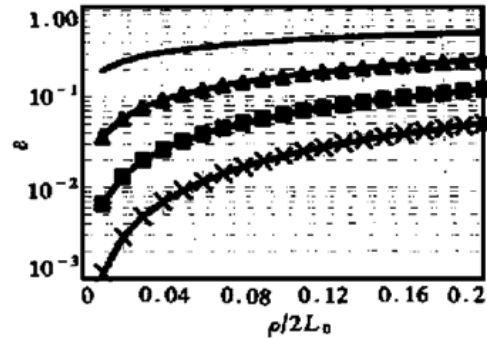
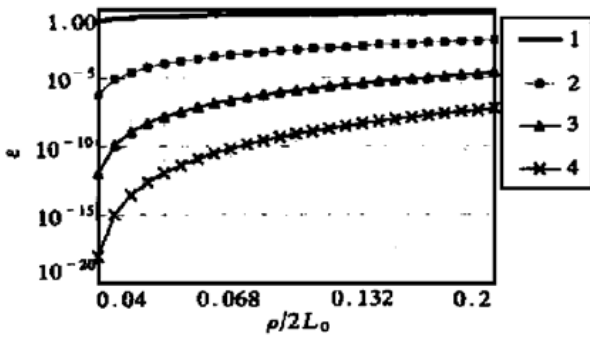


Fig. 1 The effects of finite outer scale on atmospheric turbulent phase structure function. (a) This effect when $i = 1$ in Eq. (34) is most effective. The curves from top to bottom are when $i = 1, 2, 3, 4$, respectively. (b) The deviation of phase structure function from Kolmogorov spectrum increases with the normalized value $\vartheta/2L_0$. The curves from top to bottom are when $p = 2/6, 3/6, 4/6, 5/6$, respectively

图 2 表示了子孔径倾斜测量值相关函数受大气

外尺度影响的相对误差 ε_c 。它的 x 坐标归一化到 $\nu\tau$, y 坐标归一化到 $(\kappa_0 d/2)^2$, 图中曲线是从上到下分别为 $p = 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6$ 时的值。从图 2 中可以看出, 相对误差并非是完全线性的, 因此斜率相关函数也并非完全是 p 幂指数, 斜率的时间功率谱也不会是如 G. A. Tyler 如所示的那样^[11], 并且 p 越小, 相对误差越大。

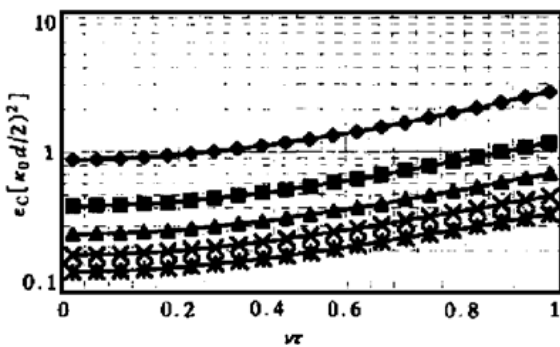


Fig. 2 The relative error of subaperture-averaged correlation function of slope measurements with Shack-Hartman wavefront sensor

结论 本文推导出了有大气湍流外尺度影响时的相位结构函数以及夏克-哈特曼波前探测器子孔径斜率测量值相关函数和倾斜功率谱的一般表达式, 结

果表明,其他作者对大气湍流统计特征的测量所依据的相位功率谱和结构函数仅仅是本文推导公式的近似,而大气外尺度对大气湍流统计特征测量的影响是不容忽视的。进而也可以说明当采用夏克-哈特曼波前探测器进行大气湍流特征的测量时,由于同时受到大气外尺度的影响,很难可以直接得到大气对科尔莫戈罗夫谱的偏离,并且这种影响随着探测器孔径增大而增大。

参 考 文 献

- [1] Dyton D, Pierson B, Spiebusch B *et al.*. Atmospheric structure function measurements with a Shack-Hartmann wave-front sensor. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(24): 1737~ 1739
- [2] Nicholls T W, Boreman G D, Dainty J C. Use of a Shack-Hartmann wave-front sensor to measurement deviations from a Kolmogorov phase spectrum. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(24): 2460 ~ 2462
- [3] Silbaugh E E, Welsh B M, Roggemann M C. Characterization of atmospheric turbulence phase statistics using wave-front slope measurements. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(12): 2453~ 2460
- [4] Szeto R W H, Butts R R. Atmospheric characterization in the presence of strong additive measurement noise. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1998, **15**(6): 1698~ 1707
- [5] Walters D L, Favier D L, Hines J R. Vertical path atmospheric MTF measurements. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1979, **69**(6): 828~ 837
- [6] Sarazzin M, Roddier F. The ESO differential image motion monitor. *Astron. Astrophys.*, 1990, **227**: 294~ 300
- [7] Fried D L. Differential angle of arrival: theory, evaluation and measurement feasibility. *Radio Sci.*, 1975, **10**: 71~ 76
- [8] Fried D L. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am.*, 1966, **56**(10): 1372~ 1379
- [9] A. 石丸. 随机介质中波的传播与散射. 北京: 科学出版社, 1986. 382~ 396
- [10] Stribling B E, Welsh B M, Roggemann M C. Optical Propagation in Non-Kolmogorov Atmospheric Turbulence. *Proc. SPIE*, 1995, **2471**: 181~ 196
- [11] Tyler G A. Bandwidth consideration for tracking through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, **11**(1): 358~ 367
- [12] Wallner E P. Optimal wave front correction using slope measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 1983, **73**(12): 1771~ 1776
- [13] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 科学出版社, 1965. 381~ 485
- [14] 龚知本. 激光大气传输研究若干问题进展. 量子电子学报, 1998, **15**(2): 114~ 132

The Effects of Finite Outer Scale on the Measurement of Characterization of Atmospheric Turbulence Statistics

Shen Feng Jiang Wenhan

(Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)

(Received 14 July 1999; revised 8 November 1999)

Abstract Phase structure function and aperture-averaged slope correlation function with finite outer scale are derived. The strong effects of finite outer scale on measurement of characterization of atmospheric turbulence statistics are shown, especially for large size telescope and subaperture. The phase structure function and atmospheric coherent length based on Kolmogorov model is just the proximation of the formalism derived here. The analysis indicates that it can not be determined whether the deviation from the model of Kolmogorov turbulence is caused by real variance of spectrum or by the effect of finite outer scale.

Key words: finite outer scale; turbulence power spectrum; phase structure function; slope correlation function